2. Cinemática: Movimientos en una dimensión

1. La gráfica representa las posiciones de un automóvil en función del tiempo. ¿Representa una situación real? ¿Por qué?

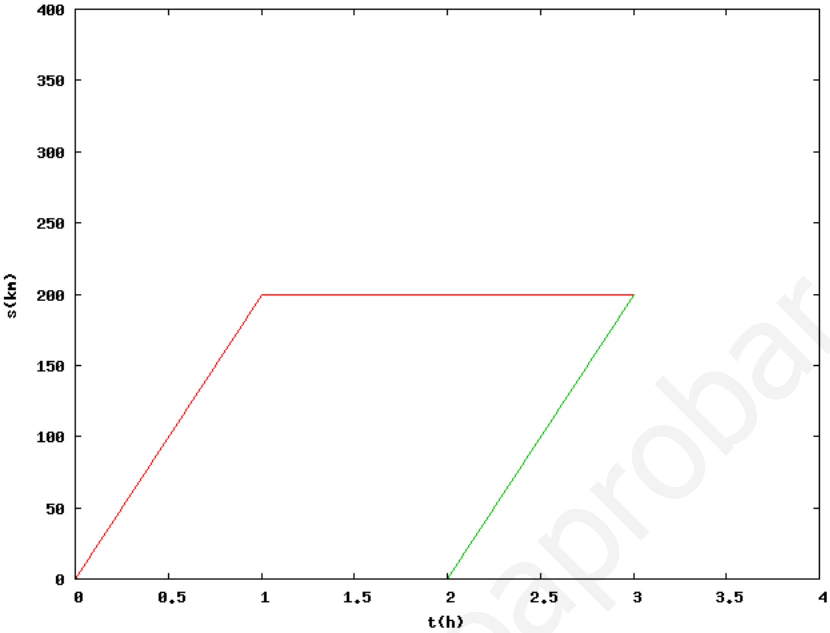

Figura 1:

2. Las siguientes gráficas corresponden a dos paseantes que parten del mismo origen.

   a) ¿Dónde está cada uno a los 3 s?

   b) ¿Qué espacio recorren en 1 s?

   c) ¿Cuál se desplaza más rápidamente?

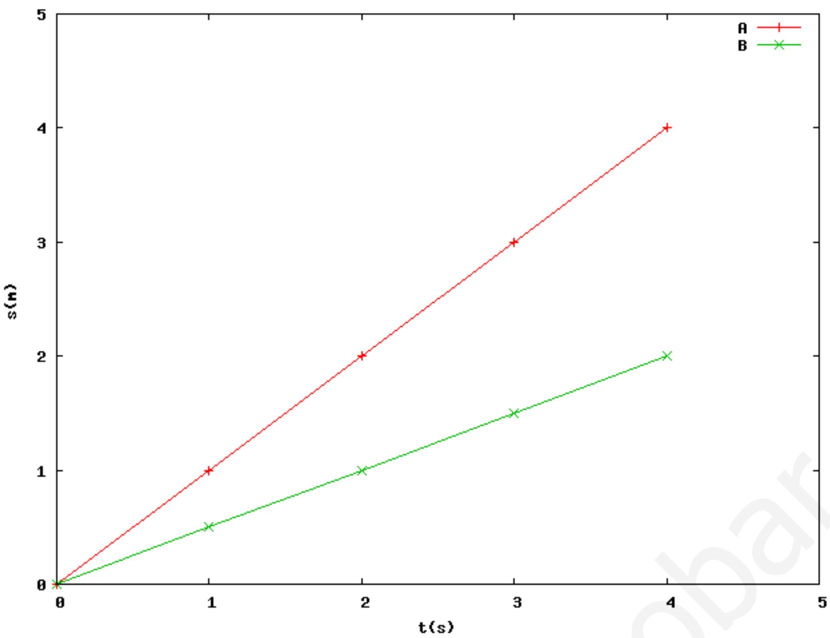

Figura 2:

3. Un móvil realiza un movimiento cuya gráfica v-t es la que se muestra en la figura. Si parte del origen, calcula:

   a) Su posición inicial.

   b) El espacio total recorrido por el móvil.

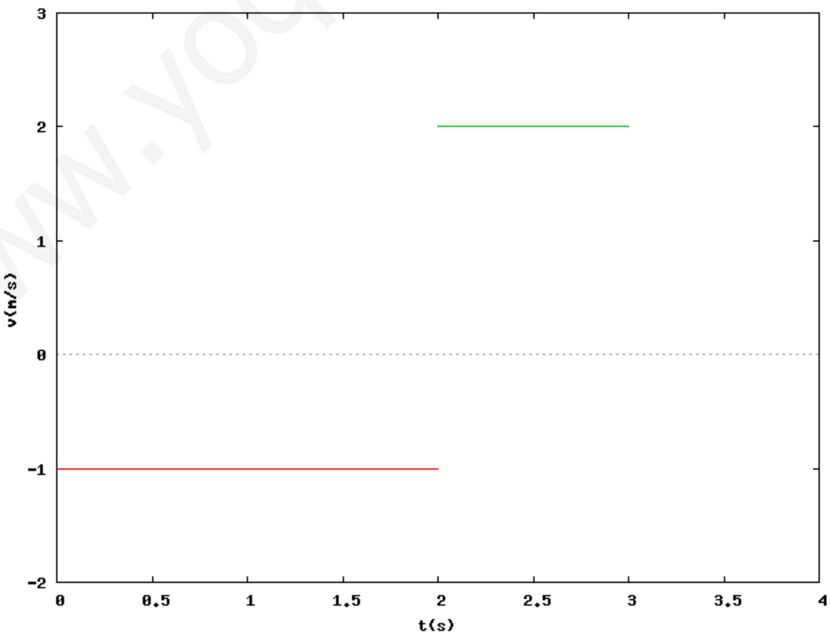

Figura 3:

4. Una motocicleta está parada en un semáforo que da acceso a una carretera. En el instante en el que el semáforo cambia a luz verde, le sobrepasa un automóvil que circula a una velocidad de 54 km/h. El motorista se entretiene en arrancar y lo hace con una aceleración constante de $3,6\ m/s^2$.

    a) ¿Cuánto tarda la motocicleta en alcanzar al coche?
    b) ¿Qué distancia han recorrido?
    c) ¿Comete alguna infracción la moto?
    d) ¿Construye los diagramas v-t y s-t para los dos vehículos?

5. Un conductor circula por una carretera con una velocidad de 90 km/h y ve que se enciende la luz ámbar de un semáforo situado a una distancia de 150. Si el semáforo tarda 3 s en cambiar a rojo y el coche frena con una aceleración de $2\ m/s^2$, ¿cometerá una infracción ese conductor?

6. Una persona está a punto de perder un tren. En un desesperado intento, corre a una velocidad constante de 6 m/s. Cuando está a 32 m de la última puerta del vagón de cola, el tren arranca con una aceleración constante de $0,5\ m/s^2$. ¿Logrará nuestro viajero aprovechar su billete o habrá perdido su billete, tiempo y aliento en un infructuoso intento?

7. Desde que se deja caer una piedra en un pozo hasta que se oye el sonido del choque con el agua trancurren 2 s. Calcula la profundidad del pozo sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s.

8. Desde un puente se tira hacia arriba una piedra con una velocidad inicial verical de 6 m/s. Calcula:

    a) Hasta qué altura se eleva la piedra.
    b) Cuánto tiempo tarda en volver a pasar al nivel del puente desde el que fue lanzada y cuál será entonces su velocidad.
    c) Si la piedra cae en el río 1.94 s después de haber sido lanzada, ¿qué altura hay desde el puente hasta el nivel del agua? ¿Con qué velocidad llega la piedra a la superficie del agua?

9. Desde una ventana situada a 15 m del suelo, una niña deja caer una pelota. Su amiga que se encuentra en la calle, debajo de la ventana, lanza hacia arriba, 1 segundo más tarde y con una velocidad de 12 m/s otra pelota.

    a) ¿A qué altura se cruzan?
    b) ¿Qué velocidad tiene cada pelota en ese instante?
    c) ¿Dónde se encuentra la segunda pelota cuando la primera llega al suelo?

10. Un hombre que está frente a una ventana de 2 m de altura ve pasar un objeto que cae desde arriba, siendo 0,3 s el tiempo que tarda el objeto en recorrer la altura de la ventana.

    a) ¿Desde quá altura dejó caer el objeto?
    b) ¿Qué velocidad tendrá el objeto al caer al suelo?

2. Cinemática: Movimientos en una dimensión

2.1. Solución:

No representa una situación real, al menos en su último tramo. Como podemos observar en la gráfica, al cabo de una hora se encuentra a 200 km y al cabo de dos horas se encuentra simultáneamente en dos posiciones: por un lado a 200 km y por otro, ha vuelto al origen, al lugar de partida.

Evidentemente esta duplicidad de datos no puede corresponder a ninguna situación real.

2.2. Solución:

a) Desde la gráfica podemos deducir, primero el tipo de movimiento, que ambos casos es rectilíneo y uniforme y cuya ley del movimiento es

$$x = x_0 + vt$$

y también desde la gráfica y tan sólo observándola podemos llegar a la respuesta.

El móvil A, al cabo de 3 s se encuentra a 3 m del origen, del punto de partida; el móvil B, sin embargo, al cabo de 3 s se encuentra a 1,5 m del punto de partida.

b) Volvemos de nuevo a observar la gráfica. El móvil A al cabo de 1 s ha recorrido 1 m, mientras que el móvil B ha recorrido tan sólo 0,5 m.

c) Para responder en este caso bastaría con analizar las respuestas anteriores, evidentemente es el móvil A quien va más deprisa. No obstante, daremos de nuevo una respuesta desde la gráfica.

Irá más deprisa aquel que tenga una mayor velocidad y esta magnitud se corresponde con la pendiente de cada gráfica:

$$tg\ \alpha_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = v_A = \frac{4}{4} = 1\ m/s$$

$$tg\ \alpha_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = v_B = \frac{2}{4} = 0,5\ m/s$$

por lo tanto, se desplaza más rápidamente el móvil A.

2.3. Solución:

a) El movimiento es rectilíneo y uniforme como se puede observar desde la gráfica, donde la velocidad v en cada tramo es constante a lo largo del recorrido.

$$x = x_0 + vt$$

$x_0 = 0$, porque nos dicen que parte del origen. Ahora vamos a estudiar que pasa en los dos primeros segundos:

$$x_1 = 0 + (-1) \cdot 2 = -2m$$

por lo tanto el móvil se mueve hacia la izquierda en los dos primeros segundos, moviéndose por tanto, desde el origen hasta el punto -2 m. Ahora estudiamos qué sucede a continuación:

$$x_2 = x' + v't$$

donde:

- x' es la nueva posición del móvil (x' = -2 m).
- v' es la velocidad que va a llevar en este nuevo punto del recorrido.

$$x_2 = -2 + 2 \cdot 1 = 0$$

Podemos entonces afirmar que el móvil se mueve hacia la derecha, llegando al origen que será su posición final.

b) El espacio total está representado por la suma de las áreas (en valor absoluto, sin signo) definidas por el eje de abcisas, la gráfica de la velocidad y las ordenadas inicial y final. Debemos estudiarlo tramo a tramo:

- En el primer tramo, la gráfica de la velocidad $v = -1m/s$ y las ordenadas las define el tiempo, $t_0 = 0s$ y $t_1 = 2s$, por lo que el área será: $A_1 = 1 \cdot 2 = 2m$.
- En el segundo tramo, la gráfica de la velocidad $v = 2m/s$ y las ordenadas las vuelve a definir el tiempo $t_1 = 2s$ y $t_2 = 3s$, luego $A_2 = 2 \cdot 1 = 2m$.

Por tanto, el espacio total recorrido será

$$A = A_1 + A_2 = 4m$$

2.4. Solución:

a) Pimero hagamos un pequeño diagrama

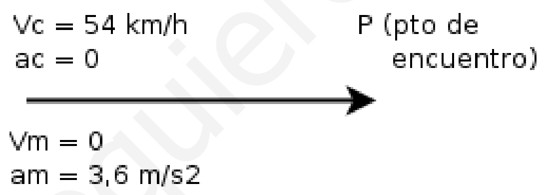

Figura 4: "Diagrama del problema"

escogemos el semáforo como origen del sistema de referencia, ya que es el punto donde los dos móviles coinciden y empezamos a contar tiempos en el instante en que el semáforo cambia a verde.

Los movimientos que cada uno lleva son:

- Moto: M.R.U.A y la ley que le corresponde

$$x_M = \frac{1}{2} a_M {t_M}^2$$

- Coche: M.R.U y la ley que le corresponde

$$x_C = v_C t_C$$

La moto sale 2 s después de cambiar el semáforo a verde, es decir, de pasar el coche. Por lo tanto, la relación entre los tiempos del coche y la moto será:

$$t_M = t_C - 2$$

y las leyes nos quedarán:

$$x_M = \frac{1}{2}a_M(t_C - 2)$$
$$x_C = v_C t$$

y la moto alcanzará al coche cuando las posiciones coincidan:

$$x_M = x_C \Longrightarrow \frac{1}{2}a_M(t_C - 2)^2$$

$$\frac{1}{2}a_M({t_C}^2 + 4 - 4t_C) = v_C t$$

es una ecuación de segundo grado en el tiempo, que operando quedaría

$$0,9{t_C}^2 - 11,1t_C + 3,6 = 0$$

y al resolver nos da dos soluciones:

$$t_C = 12s \Longrightarrow t_M = 10s$$

$$t'_C = 0{,}3s \Longrightarrow t'_M \ imposible$$

El último valos obtenido para t'_M es imposible, ya que todavía estaba parada la moto, no tiene significado físico.

b) Para conocer la distancia recorrida necesitamos sustituir en las leyes del movimiento de cada uno:

$$x_M = \frac{1}{2}a_M(t_C - 2)^2 = \frac{1}{2}3,6 \cdot 10^2 = 180m = x_C$$

c) La velocidad de la moto es:

$$v_M = a_m t = 36m/s = 129,6km/h$$

con lo que evidentemente comete una infracción al sobrepasar el límite de velocidad permitida.

d) Primero vamos a construir una tabla de valores que después nos permita realizar la gráfica.

	t	0	2	4	6	8
M.R.U $\Longrightarrow$	V_C	15	15	15	15	15
M.R.U.A $\Longrightarrow$	V_M	0	0	7,2	14,4	21,6

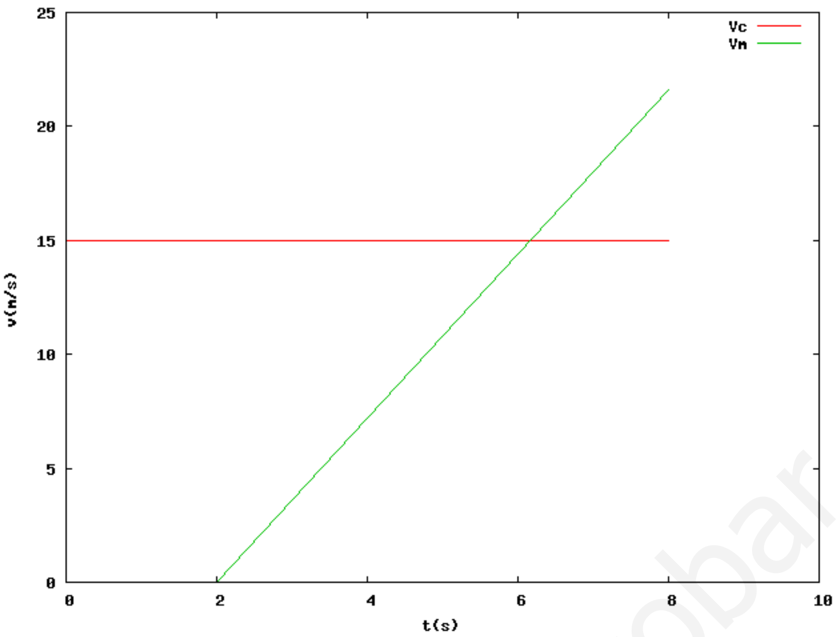

Figura 5:

y con las leyes del movimiento construimos la tabla para las posiciones:

	t	0	2	4	6	8	12
M.R.U $\Longrightarrow$	x_C	0	30	60	90	120	180
M.R.U.A $\Longrightarrow$	x_M	0	0	7,2	28,8	64,8	180

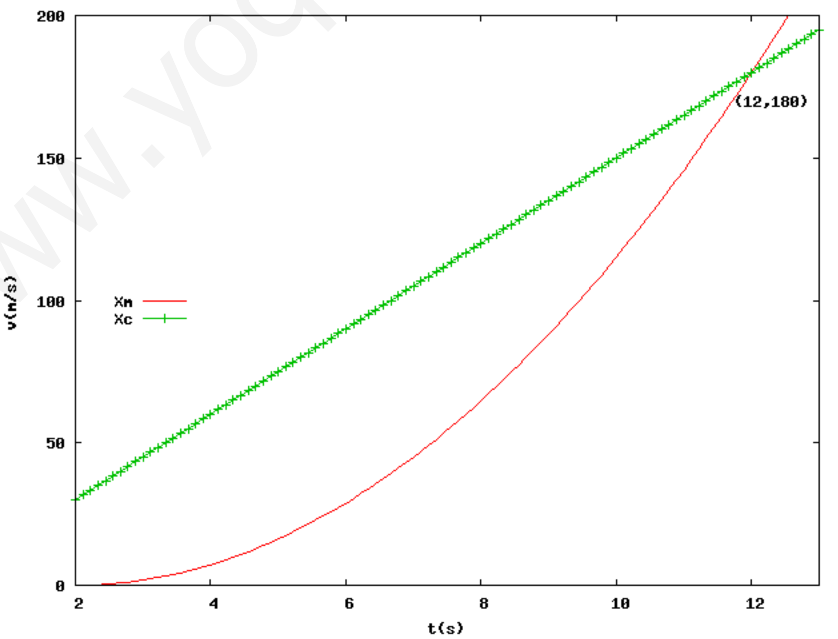

Figura 6:

2.5. Solución:

Hagamos un esquema de la situación planteada:

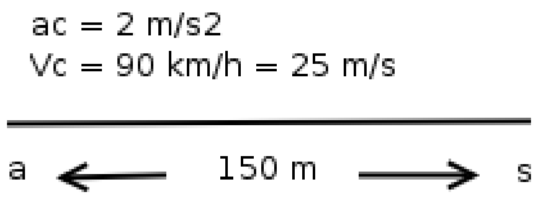

Figura 7: "Diagrama del problema"

El movimiento que lleva el coche es rectilineo y uniformemente acelerado. Si consideramos positivo el sentido del movimiento y puesto que frena, la aceleración será negativa, por lo que la ley del movimiento que le corresponde es:

$$x_0 = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

Podemos calcular cuál será la velocidad que el conductor tiene al cabo de 150 m:

$${v_f}^2 = {v_0}^2 - 2as = 25^2 - 2 \cdot 2 \cdot 150 = 25$$

$$v_f = 5\ m/s = 18\ km/h$$

evidentemente sí comete una infracción porque no logra pararse al llegar al semáforo.

Podemos averiguar cuánto tiempo tarda en llegar al semáforo y cuánto en detenerse. Ésta sería otra forma de razonar y responder:
$x = 150 = 25t - t^2$ así conoceríamos el tiempo que tarda en llegar al semáforo. Obtenemos dos resultados: $t_1 = 15s$ y $t_2 = 10s$. El resultado que aceptamos es t_2 y la otra solución se corresponde al movimiento de regreso que el conductor podría emprender una vez se haya detenido.

Y el tiempo que tarda en detenerse:

$$v_f = v_0 - at' \longrightarrow 0 = 25 - 2t' \Longrightarrow t' = 12,5s$$

con lo que volvemos a concluir que se pasa el semáforo en rojo y comete, por tanto, una infracción que será penalizada.

2.6. Solución:

Hagamos un esquema que resuma el movimiento de los dos móviles: la persona y el tren:

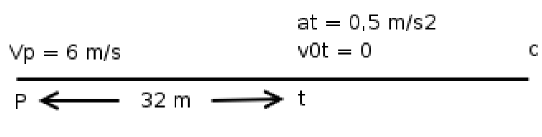

Figura 8: "Diagrama del problema"

Vamos a situar el origen del sistema de referencia en la persona que trata de coger el tren en el instante en que arranca el tren; por eso, las posiciones iniciales serán:

$$x_{0p} = 0 \qquad\qquad x_0t = 32\ m$$

y los movimientos de cada uno de ellos serán:
persona $\Longrightarrow$ M.R.U $\Longrightarrow x_p = v_p t$
tren $\Longrightarrow$ M.R.U.A $\Longrightarrow x_t = x_{0t} + \frac{1}{2}at^2$
Si C es el punto donde el viajero logra alcanzar el tren, debe cumplirse que:

$$x_p = x_t$$

ya que las posiciones de ambos móviles coinciden

$$v_p t = x_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow 6t = 32 + \frac{1}{2}0,5t^2$$

resolvemos la ecuación de 2º grado y encontramos dos soluciones:

$$t_1 = 8s \qquad\qquad t_2 = 16s$$

y aceptamos como válida la primera de las soluciones: al cabo de 8 s, el viajero alcanza al tren, y no habrá perdido ni el tiempo ni el billete, y por supuesto, su carrera ha sido fructífera. (La otra solución corresponde al alcance del tren al peatón).

2.7. Solución:

Vamos a situar el origen del sistema de referencia en el brocal del pozo (lugar desde el que dejamos caer la piedra) y empezamos a contar tiempo desde el mismo instante que la dejamos caer.

Debemos considerar que existen 2 movimientos distintos:

- La piedra cae y choca con el agua $\longrightarrow$ M.R.U.A.
- Sonido del choque que sube hasta que llega a nuestro oido $\longrightarrow$ M.R.U

El movimiento de la piedra es rectilíneo (vertical) y uniformemente acelerado, con a = g.

Sin embargo, el sonido también realiza un movimiento rectilíneo (vertical) pero uniforme (sin aceleración).

Si tenemos en cuenta el criterio de signos con el que trabajamos, las leyes del movimiento para cada uno de ellos será:
piedra $\Longrightarrow -y_P = -\frac{1}{2}g{t_p}^2$
sonido $\Longrightarrow y_S = v_s t_s \Longrightarrow y_p = y_s$ ya que el recorrido que realizan la piedra y el sonido es el mismo, la altura del pozo.

Del enunciado deducimos que:

$$t_p + t_s = 2$$

por lo que las ecuaciones con las que contamos para resolver el ejercicio son:

$$\frac{1}{2}g{t_p}^2 = v_s t_s$$

$$t_p + t_s = 2$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, por lo que podemos resolver.

$$5{t_P}^2 = v_s(2 - t_p) \Longrightarrow 5{t_P}^2 + v_s t_P - 2v_s = 0$$

$$t_P = \frac{-v_s \pm \sqrt{{v_s}^2 - 4 \cdot 5(-2v_s)}}{2 \cdot 5} = \frac{-v_s \pm \sqrt{{v_s}^2 + 40v_s}}{10}$$

Resolviendo esta ecuación tenemos tan sólo una solución físicamente posible, la otra nos da un valor negativo para el tiempo, lo que es físicamente imposible.

$$t_p = 1{,}94\ s \qquad\qquad t_s = 0{,}06\ s$$

y desde estos valores y sustituyendo en cualquiera de las leyes del movimiento la profundidad del pozo:

$$y_p = \frac{1}{2} g {t_p}^2 = v_s t_s = y_s$$

$$h = 18\ m$$

2.8. Solución:

Tomamos como sistema de referencia para medir alturas el nivel del agua del río; y como origen de tiempos, el instante en que la piedra es lanzada.

a) La piedra realiza un movimiento vertical y uniformemente acelerado y cuando alcanza la máxima altura se detiene instantáneamente. Si consideramos la expresión:

$$v_f = v_0 + at \Longrightarrow 0 = 6 - 10t_1$$

(consideramos el mismo criterio de signos que en otros ejercicios).
$t_1 = 0,6\ s$, tiempo que tarda la piedra en alcanzar la máxima altura. Para conocer la altura de alcanzada desde el puente:

$$ {v_f}^2 = {v_0}^2 + 2as \Longrightarrow 0 = 6^2 - 2 \cdot g \cdot y_1$$

$$y_1 = 1,8\ m$$

b) El tiempo que tarda en regresar al puente es el mismo que tardó en alcanzar la máxima altura, donde se detuvo instantáneamente, y allí invirtió el sentido de su movimiento.

Hasta llegar al puente debe caer 1.8 m por ello tarda 0.6 s. Si aplicamos la ley del movimiento:

$$y = y_0 + v_0' t - \frac{1}{2} g t^2$$

- $y = h_p + y_1$, donde h_p es la altura del puente medida desde el río.
- $y_0 = h_p$, es el punto donde debe encontrarse para medir tiempos.
- $v_0' = 0$, porque acaba de iniciar el movimiento de caida.

$$h_p + y_1 = h_p - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = 0,6s$$

Por lo tanto, el tiempo total transcurrido será

$$t_T = 1,2s$$

c) La velocidad también será la misma, aunque ahora el signo será distinto

$$v_p = v_0 - gt_T = 6 - 10 \cdot 1,2 = -6 \ m/s$$

y el signo nos indica que la piedra está cayendo.

d) El tiempo que tarda en ir desde el puente hasta la superficie del agua será:

$$t_p = t - t_T = 1,96 - 1,2 = 0,74s$$

y ahora apliquemos la ley del movimiento:
$y = y_p - v_p t_p - \frac{1}{2} g {t_p}^2$ (y = 0 porque la piedra llega al río donde hemos escogido el origen del sistema de referencia).

$$0 = y_p - 6 \cdot 1,2 - \frac{1}{2} 10 \cdot (1,2)^2$$

$$y_p = 7,2 \ m$$

(Ahora podemos regresar al primer apartado y afirmar que la altura total alcanzada por la piedra es $N = 7,2 + 1,8 = 9 \ m$.

La ley de la aceleración nos va a permitir conocer la velocidad con que llega al río.

$$v_f = v_0 + at \longrightarrow v_f = -v_p - gt_p = -6 - 10 \cdot 0,74$$

$$v_f = -13,4 \ m/s$$

o bien $v_f = v_0 - gt_T = 6 - 10 \cdot 1,94 = -13,4 \ m/s$ (v_0: velocidad con la que hemos empezado el problema, inicia el movimiento vertical y hacia arriba).

2.9. Solución:

Hagamos primero un pequeño esquema que nos permita visualizar el problema:

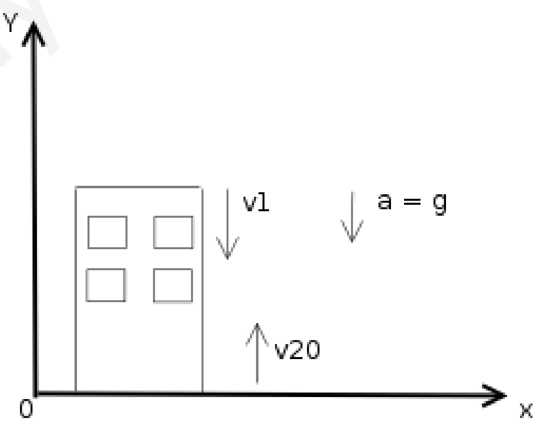

Figura 9: "Diagrama del problema"

Situamos el sistema de referencia en el suelo y adoptamos el criterio de signos establecido. En función de ello los datos que el problema nos proporciona son:

	posición inicial	velocidad inicial	aceleración
Primera pelota	$y_{10} = 15\ m$	$v_{10} = 0$	$a_1 = -g$
Segunda pelota	$y_{20} = 0$	$v_{20} = 2\ m/s$	$a_2 = -g$

y designamos por t_1 y t_2 el tiempo que llevan moviéndose la pelota 1 y 2 respectivamente.

De los datos que acabamos de poner y del propio enunciado, deducimos que el movimiento que llevan las dos pelotas es vertical y uniformemente acelerado y las leyes del movimiento para cada una de ellas:

$$y_1 = y_{10} - \frac{1}{2}g{t_1}^2 = 15 - 5{t_1}^2$$

$$y_2 = v_{20}t_2 - \frac{1}{2}g{t_2}^2 = 12t_2 - 5{t_2}^2$$

La relación entre los dos tiempos nos la proporciona el enunciado: la segunda pelota lleva menos tiempo moviéndose que la primera:

$$t_2 = t_1 - 1$$

a) Si las dos pelotas se cruzan significa que la posición de ambas pelotas en ese instante es la misma:

$$y_1 = y_2 \longrightarrow 15 - 5{t_1}^2 = 12(t_1 - 1) - 5(t_1 - 1)^2$$

$$15 - 5{t_1}^2 = 12t_1 - 12 - 5({t_1}^2 + 1 - 2t_1)$$

$$32 = 22t_1 \Rightarrow t_1 = 1,45\ s \qquad t_2 = 0,45\ s$$

y la posición la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos leyes del movimiento:

$$y_1 = 15 - 5(1,45)^2 = 4,48\ m \approx= 4,5\ m$$

b) La expresión de la velocidad para cada una de ellas sería:

$$v_1 = -gt_1 = -14,5\ m/s$$

$$v_2 = v_{20} - gt_2 = 7,5\ m/s$$

el signo negativo nos indica que está cayendo (se mueve hacia abajo) y sin embargo, el signo positivo de v_2 nos indica que todavía está subiendo, esto es, que no alcanzó la máxima altura.

c) Para poder responder a este apartado, primero debemos averiguar cuanto tiempo tarda la primera pelota en llegar al suelo:

$$y_1 = 15 - 5{t_1}^2 \Rightarrow y_1 = 0 = 15 - 5{t_1}^2$$

$$t_1 = 1,7\ s$$

y ahora sustituimos en la ley del movimiento para la segunda pelota:

$$y_2 = 12t_2 - 5{t_2}^2$$

$$y_2 = 12(1,7 - 1) - 5(1,7 - 1)^2 = 5,95 \approx= 6\ m$$

y dado el signo positivo de este resultado, aún continúa subiendo.

2.10. Solución:

Como siempre, iniciemos el problema con un pequeño esquema:

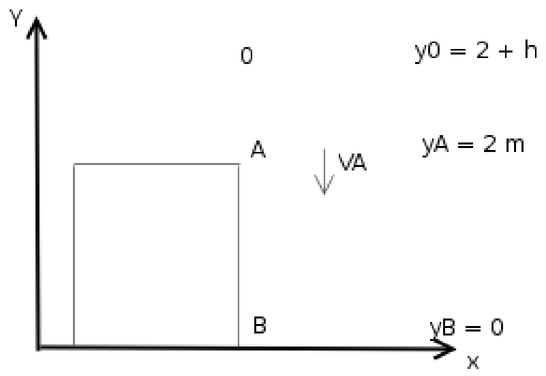

Figura 10: "Diagrama del problema"

El movimiento que realiza el objeto es vertical y uniformemente acelerado. Si tomamos el origen del sistema de referencia en el borde inferior de la ventana:

a) $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, ésta será la ley de movimiento que corresponda a su movimiento. Consideremos como punto de partida para estudiar el problema la posición A; la ley nos queda:

$$y = 0y_A + v_A \Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = 2 + v_A 0,3 - 5(0,3)^2$$

Pretendemos conocer la velocidad con que llega a la ventana desde que se lanza (v_A), y consideramos el movimiento que el objeto realiza al pasar desde A a B.

Resolviendo la ecuación antes planteada, nos queda $v_A = 5,2\ m/s$. Si ahora consideramos el espacio recorrido desde la posición 0 a la posición A y dados los datos facilitados por el problema, utilizamos la expresión

$$v_A{}^2 = v_0^2 - 2gh \Rightarrow h = 1,4\ m$$

y sumando la altura de la ventana

$$y_0 = 2 + h = 3,4\ m$$

b) La velocidad con que llega al suelo, posición B, la podemos conocer desde la misma expresión:

$$v_B{}^2 = v_0{}^2 - 2g(2 + h)$$
$$v_B = 8,1\ m/s$$