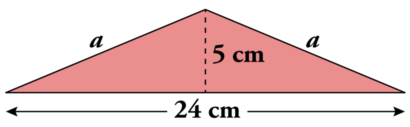
1 El teorema de Pitágoras

Página 147

1. **Calcula la longitud del segmento representado por cada letra en estos triángulos:**

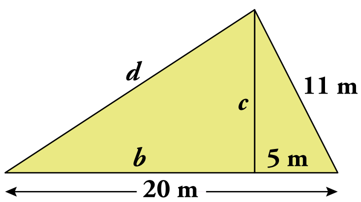


$a^2 = 12^2 + 5^2$

$a^2 = 144 + 25$

$a^2 = 169$

$a = \sqrt{169} = 13$ cm



$b = 20 - 5 = 15$ m

$11^2 = c^2 + 5^2$

$121 = c^2 + 25$

$c^2 = 121 - 25$

$c = \sqrt{96} = 9{,}8$ m

$d^2 = 15^2 + 9{,}8^2$

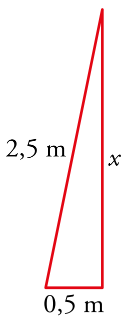
$d^2 = 225 + 96$

$d^2 = 321$

$d = \sqrt{321}$

$d = 17{,}9$ m

2. **Una escalera de mano, de 2,5 m de longitud, está apoyada en una pared, separándose, en su base, 50 cm de la misma. ¿A qué altura toca la pared?**

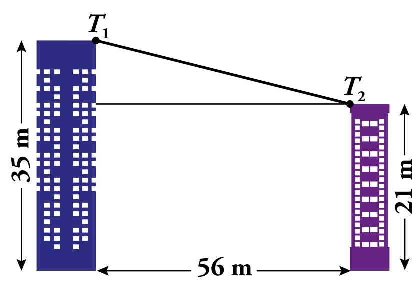


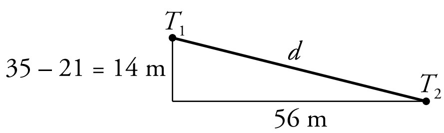
$2{,}5^2 = x^2 + 0{,}5^2$

$6{,}25 = x^2 + 0{,}25$

$x^2 = 6{,}25 - 0{,}25 = 6 \rightarrow x = \sqrt{6} = 2{,}45$ m

3. **¿Cuál es la distancia entre los puntos T_1 y T_2 de las azoteas de los dos edificios?**





$d^2 = 14^2 + 56^2$

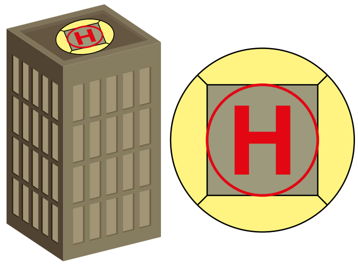
$d^2 = 196 + 3\,136 = 3\,332$

$d = \sqrt{3\,332} = 57{,}72$ m

Página 148

4. **En la azotea de un rascacielos se ha construido una plataforma circular, de 27 m de diámetro, que soporta un helipuerto como indica la ilustración.**

¿Cuál es el radio del círculo interior que marca la zona de aterrizaje, si los vértices del cuadrado están a dos metros del borde de la plataforma?



Como indica el dibujo de la "Ayuda", la diagonal del cuadrado mide k = 27 – 4 = 23 metros.

Conocida la diagonal, calculamos el lado:

$$23^2 = x^2 + x^2$$

$$529 = 2x^2$$

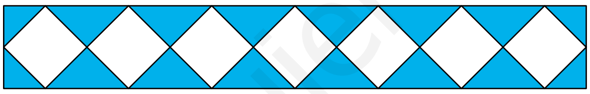
$$x^2 = 264{,}5$$

$$x = \sqrt{264{,}5} = 16{,}26 \text{ m}$$

El radio del círculo es la mitad del lado, que coincide con el diámetro, luego será:

$$r = \frac{16{,}26}{2} = 8{,}13 \text{ metros}$$

5. **El zócalo de un pasillo de 28 metros de longitud, se va a rematar con el friso que muestra la ilustración, construido con baldosines cuadrados de 10 cm de lado.**



¿Cuántos baldosines azules y cuántos blancos se necesitan para la confección del friso?

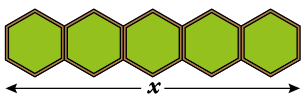
De acuerdo con el dibujo de la "Ayuda", en este trozo de friso hay un baldosín azul y otro blanco.

Para calcular la anchura, x, de ese trozo de friso usamos el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 100 = \frac{x^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ cm}$$

Como el zócalo del pasillo tiene 28 m = 2 800 cm de longitud, habrá $\frac{2\,800}{14{,}14} \approx 198$ trozos de friso como este, es decir, 198 baldosines blancos y otros tantos azules.

6. **Para la decoración de la entrada de un hotel, se va a instalar una fila de cinco módulos-jardinera de planta hexagonal regular, como indica la figura:**



Sabiendo que el lado de cada módulo mide 0,60 m, ¿qué longitud tendrá la fila?

Vamos a calcular la apotema del hexágono tal y como nos indica la "Ayuda". Para eso utilizamos el hecho de que en un hexágono regular el radio es igual al lado. Por tanto:

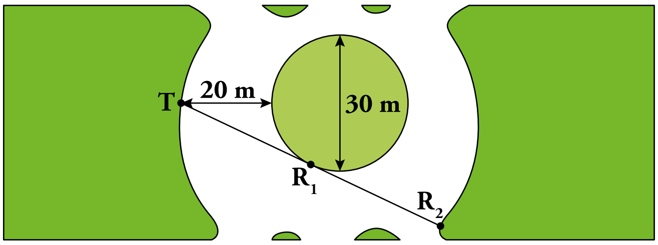
$$0{,}6^2 = a^2 + 0{,}3^2$$

$$0{,}36 = a^2 + 0{,}09 \rightarrow a^2 = 0{,}36 - 0{,}09 = 0{,}27$$

$$a = \sqrt{0{,}27} = 0{,}52 \text{ m}$$

La longitud de la fila será $x = 2a \cdot 5 = 2 \cdot 0{,}52 \cdot 5 = 5{,}2$ metros.

7. **En la plazoleta del parque se ha abierto una zanja recta para llevar el agua desde la toma, T, hasta las bocas de riego R_1 y R_2.**



¿Cuántos metros de tubería se necesitarán, si la boca R_1 está en el punto medio de la longitud de la zanja?

Utilizando el dibujo de la "Ayuda", tendremos:

$$35^2 = x^2 + 15^2$$

$$1\,225 = x^2 + 225$$

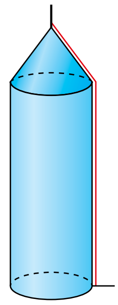
$$x = \sqrt{1\,000} = 31{,}623 \text{ m}$$

luego la tubería tendrá $2 \cdot 31{,}623 \approx 63{,}25$ metros.

Página 149

8. Una torre cilíndrica de 18,84 m de circunferencia y 15 m de altura está coronada por un tejado en forma de cono que la eleva otros 4 m.

¿Cuántos metros mide el cable que sube desde tierra hasta el pararrayos colocado en el vértice del tejado?



Calculamos el radio de la circunferencia: $L = 2\pi r$

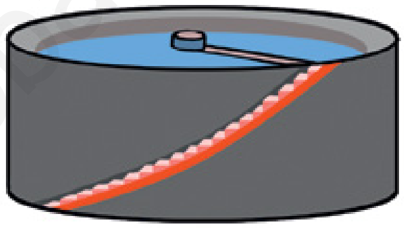
$$18{,}84 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \rightarrow r = 3 \text{ m}$$

Por tanto: $x^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25} = 5$ m

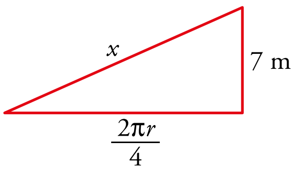
Luego la longitud del cable es 15 + 5 = 20 metros.

9. Un tanque cilíndrico de agua, con un diámetro de 20 m y una altura de 7 m, tiene una escalera, adosada a la pared, que sube desde el suelo hasta el borde superior.

¿Cuál es la longitud de la escalera si, mientras sube, cubre un cuarto de vuelta alrededor del depósito?



Ayudándonos del dibujo:

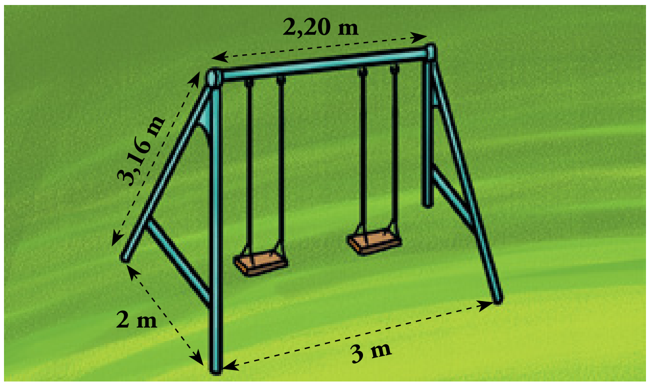


$$\frac{2\pi r}{4} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10}{4} = 15{,}7 \text{ m}$$

$$x^2 = 7^2 + 15{,}7^2 = 49 + 246{,}49 = 295{,}49$$

$x = \sqrt{295{,}49} = 17{,}19 \approx 17{,}20$ metros de longitud tiene la escalera.

10. Se van a instalar columpios en un parque infantil, según el modelo de la ilustración. ¿Qué longitud deben tener los tirantes para que los asientos queden a 60 cm del suelo?



Vamos a calcular k, n y h como nos dice la "Ayuda":

- $3{,}16^2 = k^2 + 1^2$

  $9{,}9856 = k^2 + 1 \rightarrow k^2 = 9{,}9856 - 1 = 8{,}9856 \rightarrow k = \sqrt{8{,}9856} \approx 3$ m

- $n = \dfrac{3 - 2{,}20}{2} = 0{,}4$ m

- $3^2 = 0{,}4^2 + \text{h}^2$

  $9 = 0{,}16 + \text{h}^2 \rightarrow \text{h}^2 = 9 - 0{,}16 = 8{,}84 \rightarrow \text{h} = \sqrt{8{,}84} = 2{,}97$ m

Por tanto, como los asientos están a 0,6 m del suelo, los tirantes deben tener una longitud de 2,97 – 0,6 = 2,37 metros.

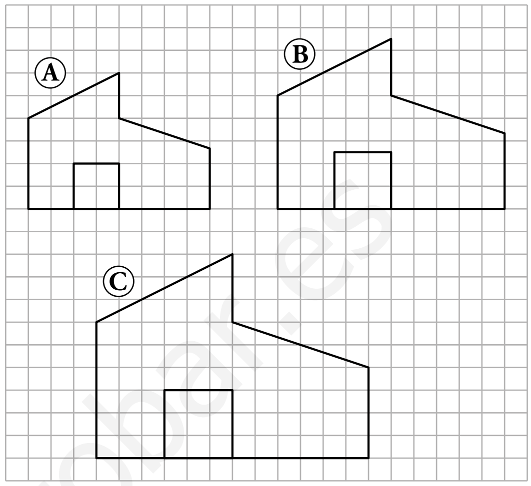
2 Semejanza

Página 150

1. Las figuras A, B y C son semejantes.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre A y B? ¿Y entre B y A? ¿Y entre B y C?

b) Copia sobre una cuadrícula la figura C y dibuja una reproducción, D, de forma que la razón de semejanza entre C y D sea 2/3.

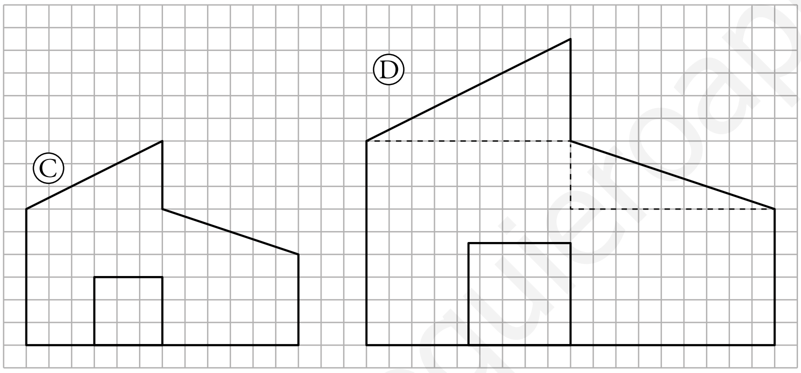


a) La razón de semejanza entre A y B es $\dfrac{8}{10} = 0{,}8$.

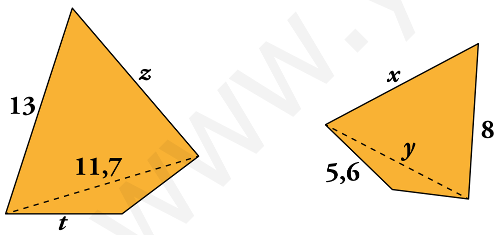
La razón de semejanza entre B y A es $\dfrac{10}{8} = 1{,}25$.

La razón de semejanza entre B y C es $\dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} = 0{,}83$.

b)



2. Estas dos figuras son semejantes y la razón de semejanza es 0,8. Calcula *x*, *y*, *z* y *t*.



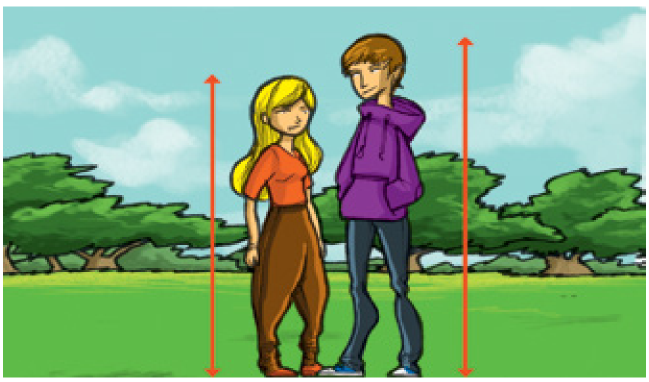
$x = 13 \cdot 0{,}8 \rightarrow x = 10{,}4$

$y = 11{,}7 \cdot 0{,}8 \rightarrow y = 9{,}36$

$z \cdot 0{,}8 = 8 \rightarrow z = 10$

$t \cdot 0{,}8 = 5{,}6 \rightarrow t = 7$

3. Sabiendo que él mide 1,83 m, ¿cuánto mide ella?



En el dibujo, el chico mide 4,5 cm, y la chica, 4 cm.

La razón de semejanza es 4 : 4,5 = 0,88

La chica mide 0,88 · 1,83 = 1,61 m.

Página 151

4. Este es el plano de una parte de cierta ciudad, a escala 1:20 000:

Estima cuánto se tarda en ir paseando, por el itinerario más corto, desde A hasta C, pasando por B, suponiendo que se camina a 3 km/h.

1 cm del plano equivale a 20 000 cm = 200 m en la realidad.

Medimos el camino sobre el mapa:

$$2 + 2{,}8 + 1{,}2 + 2{,}2 + 1{,}1 = 9{,}3 \text{ cm}$$

$$9{,}3 \cdot 20\,000 = 186\,000 \text{ cm} = 1{,}86 \text{ km}$$

$$t = \frac{e}{v} = \frac{1{,}86}{3} = 0{,}62 \text{ h} = 0{,}62 \cdot 60 \text{ min} = 37{,}2 \text{ min} \approx 37 \text{ min}$$

5. Sabiendo que Barcelona está a 1 000 kilómetros de Lisboa, o que Burdeos se encuentra a 1 600 kilómetros de Marrakech:

a) ¿A qué escala está dibujado el mapa?

b) ¿Cuál es la distancia entre Santander y Cádiz? ¿Y entre Cádiz y Santa Cruz de Tenerife?

c) Busca alguna ciudad que esté aproximadamente a 400 km de Almería.

d) Busca las dos capitales de provincia más alejadas en la España peninsular y calcula la distancia que las separa.

a) La distancia en el mapa de Lisboa a Barcelona es de 5 cm.

La distancia real de Lisboa a Barcelona es de 1 000 km = 100 000 000 cm = 10^8 cm.

1 cm en el mapa equivale a $\frac{10^8}{5}$ = 20 000 000 cm en la realidad.

Es decir, la escala es 1 : 20 000 000

b) Santander-Cádiz en el mapa mide 4 cm.

Santander-Cádiz en la realidad será 4 · 20 000 000 = 80 000 000 cm = 800 km

Cádiz-Santa Cruz de Tenerife en el mapa mide 6,5 cm.

Cádiz-Santa Cruz de Tenerife en la realidad será 6,5 · 20 000 000 = 130 000 000 cm = 1 300 km

c) 400 km = 40 000 000 cm; 40 000 000 : 20 000 000 = 2 cm

Tenemos que buscar alguna ciudad que esté en el mapa a 2 cm de Almería (trazamos una circunferencia de 2 cm de radio centrada en Almería). Por ejemplo, Castellón de la Plana, Madrid, Teruel, Huelva…

d) Las dos capitales de provincia dentro de la España peninsular más alejadas son Cádiz y Girona.

Distan en el mapa unos 5 cm, que equivalen a 5 · 20 000 000 = 100 000 000 cm = 1 000 km.

3 Semejanza de triángulos

Página 152

1. ¿Verdadero o falso?

Dos triángulos son semejantes si:

a) Tienen dos ángulos iguales.

b) Son rectángulos y tienen un lado en común.

c) Son rectángulos y tienen igual un ángulo agudo.

d) Los lados son paralelos dos a dos.

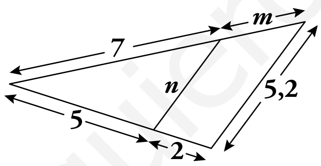
e) Se pueden colocar de forma que uno de los ángulos del menor quede encajado en un ángulo del mayor.

f) Tienen un ángulo en común y los correspondientes lados opuestos paralelos.

g) Se pueden colocar en posición de Tales.

a) Verdadero	b) Falso	c) Verdadero	d) Verdadero
e) Falso	f) Verdadero	g) Verdadero	

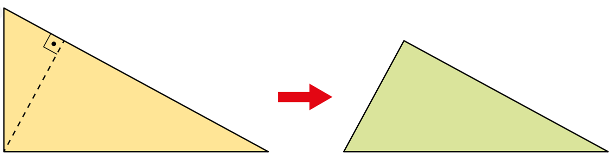
2. Calcula el valor de *m* y *n*.



$\frac{7}{5} = \frac{m}{2} \rightarrow 14 = 5m \rightarrow m = \frac{14}{5} = 2{,}8$

$\frac{7}{5} = \frac{5{,}2}{n} \rightarrow 26 = 7n \rightarrow n = \frac{26}{7} = 3{,}7$

3. Observa el triángulo amarillo y el triángulo verde:

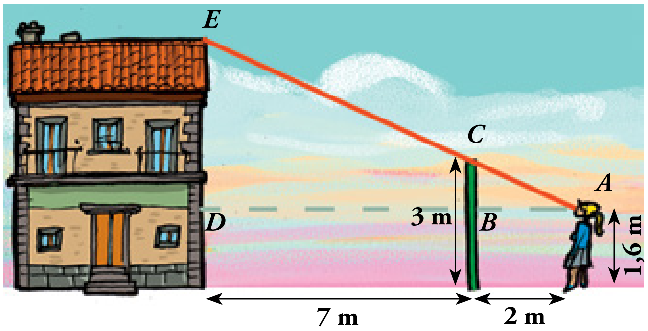


¿Se pueden colocar en posición de Tales? ¿Cómo? ¿Son semejantes? Justifica tus respuestas.

Se pueden colocar en posición de Tales porque son rectángulos y tienen el ángulo agudo menor igual. Por tanto, son semejantes.

Página 153

4. Micaela, que mide 1,60 m, se sitúa frente a la valla próxima a un edificio de modo que ve alineadas la parte alta de la valla y la del edificio. Después, señala su posición y toma las medidas que ves en el dibujo.



Y con esos datos, dice que puede calcular la altura del edificio. ¿Podrías hacerlo tú?

$\overline{CB} = 3 - 1{,}6 = 1{,}4$ m

$\overline{AD} = 2 + 7 = 9$ m

Por tanto: $\dfrac{9}{x} = \dfrac{2}{1{,}4} \rightarrow x = 6{,}3$ m

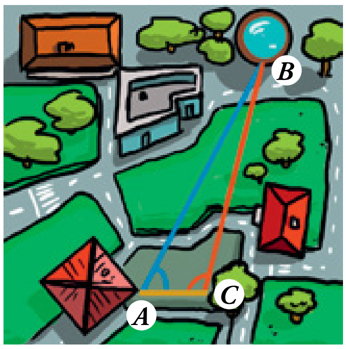
La altura del edificio es 6,3 + 1,6 = 7,9 m.

5. Eva ve desde su casa el depósito de agua del pueblo, y quiere averiguar a qué distancia se encuentra. Para conseguirlo, elige un punto C, cerca de casa. Después, mide:

— Los ángulos $\hat{A} = 62°$ y $\hat{C} = 105°$.

— La distancia $\overline{AC} = 45$ m.

Con esos datos, halla la distancia $\overline{AB}$ que busca Eva.



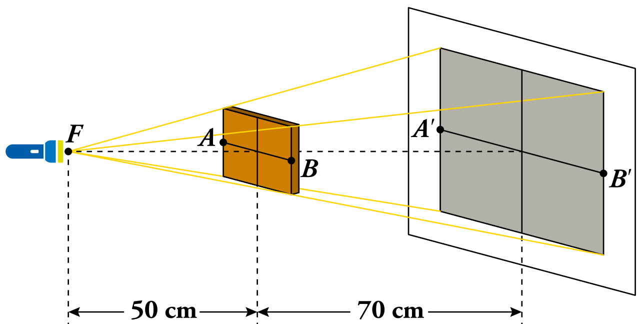
La razón de semejanza entre ABC y $A'B'C'$ es 1 000.

La medida de $\overline{A'B'}$ sobre el cuaderno es de unos 19,3 cm.

La distancia $\overline{AB}$ es de unos 19,3 · 1 000 = 19 300 cm = 193 metros.

6. Una linterna ilumina un tablero cuadrado, proyectando una sombra, también cuadrada, sobre la pantalla que tiene detrás.

Si el lado del tablero mide 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones de la sombra?



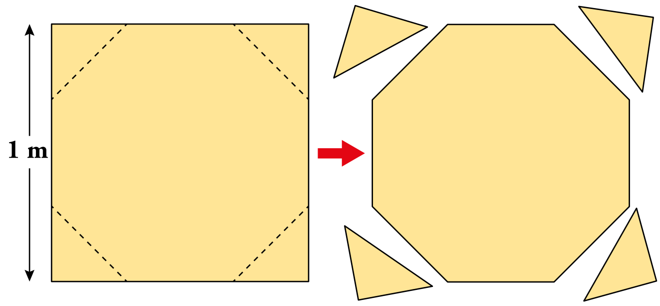
Los triángulos FAB y $FA'B'$ son semejantes porque están en posición de Tales.

Aplicamos Tales utilizando los lados AB y $A'B'$ y las alturas del triángulo:

$$\frac{50}{120} = \frac{18}{A'B'} \rightarrow A'B' = 43{,}2 \text{ cm}$$

Página 154

7. Cortando las cuatro esquinas de una plancha cuadrada de madera, de un metro de lado, se quiere obtener un tablero de una mesa con forma de octógono regular.



¿Qué dimensiones deben tener las esquinas?

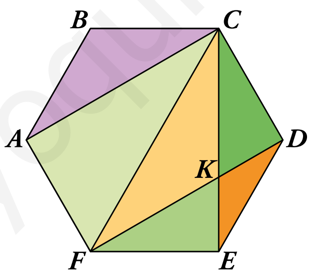
La primera ecuación refleja las relaciones de proporcionalidad entre los lados de los dos triángulos coloreados.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x + 2y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} -\cancel{x} + \sqrt{2}y = 0 \\ \cancel{x} + \ \ 2y = 1 \end{cases}$$

$$(2 + \sqrt{2})y = 1 \ \to \ y = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 0{,}293 \text{ m} \ \to \ 293 \text{ mm medirán los catetos}$$

$x + 2 \cdot 0{,}293 = 1 \ \to \ x = 1 - 0{,}586 = 0{,}414$ m $= 414$ mm medirá la hipotenusa.

8. Observa la propuesta de un taller de diseño en el proyecto de una vidriera hexagonal de un metro de lado:



Las piezas se cortarán de láminas de cristal de distintos colores.

¿Cuánto miden los lados *AC*, *CF*, *CK*, *FK*, *DK* y *EK*?

- $\overline{CF}$ es igual a dos veces el radio del hexágono, que es igual al lado. Luego $\overline{CF} = 2$, por tanto:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 = \overline{CF}^2 \qquad \overline{AC}^2 + 1^2 = 2^2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

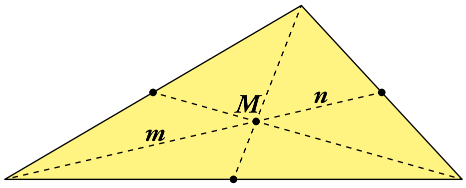
- Como los dos triángulos son semejantes con razón $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\overline{CK} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m} \qquad \overline{DK} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$\overline{FK} = \overline{DF} - \overline{KD} = \overline{AC} - \overline{KD} \ \to \ \overline{FK} = \sqrt{3} - \overline{KD} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$\overline{EK} = \overline{CE} - \overline{CK} = \overline{AC} - \overline{CK} \ \to \ \overline{EK} = \sqrt{3} - \overline{CK} = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

9. **En este triángulo se han trazado las medianas (segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto). Así, el punto *M* es el baricentro.**



Justifica la propiedad de las medianas: el baricentro, , divide a cada mediana en dos segmentos, uno doble del otro ($m = 2n$).

Los triángulos son semejantes porque sus lados son paralelos y por tanto sus ángulos son iguales.

Su razón de semejanza es $\frac{1}{2}$ y por tanto, al ser $n = y$, resulta:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{m} = \frac{n}{m} \rightarrow m = 2n$$

4 Una proporción interesante: la proporción cordobesa

Página 155

1. Justifica la siguiente afirmación:

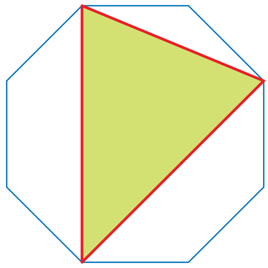
Cualquier triángulo acutángulo e isósceles, con un ángulo de 45°, es un triángulo cordobés.

Porque en un triángulo acutángulo e isósceles, si uno de sus ángulos mide 45°, este es necesariamente el ángulo desigual, ya que si no lo fuese, el ángulo desigual debería medir 90° y el triángulo sería rectángulo, no acutángulo.

Por tanto, verifica las condiciones del triángulo cordobés: es isósceles y el ángulo opuesto al lado desigual (el ángulo desigual) mide 45°.

Página 156

2. Justifica que el triángulo coloreado en el octógono es un triángulo cordobés.

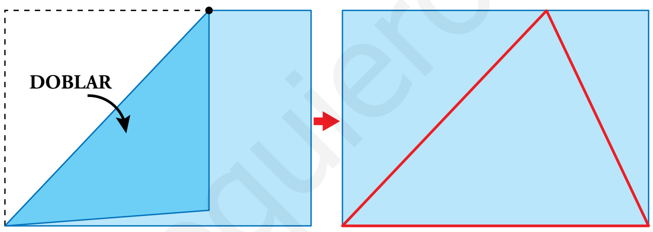


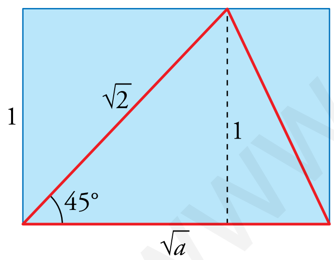
Es un triángulo isósceles, puesto que los lados que forman el ángulo α son dos diagonales iguales del octógono.

Además, si trazamos la circunferencia circunscrita al octógono, α sería el ángulo inscrito correspondiente a un ángulo central que mide $\frac{360°}{8} \cdot 2 = 90°$ (ya que abarca tres vértices del octógono), por tanto $\alpha = \frac{90}{2} = 45°$.

Verifica entonces la afirmación del ejercicio anterior que aseguraba que cualquier triángulo acutángulo isósceles, con un ángulo de 45° es un triángulo cordobés.

3. Explica por qué el triángulo rojo construido como se indica en el dibujo, con una hoja A-4, es un triángulo cordobés.





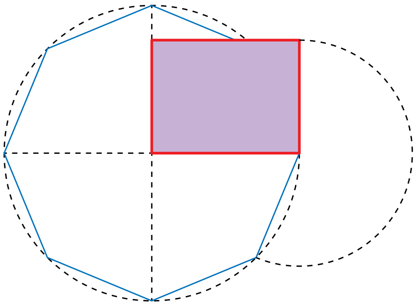
Como al doblar se forma un cuadrado de lado 1, su diagonal mide $\sqrt{2}$.

La mitad de un ángulo recto son 45°.

Ya que $\frac{a}{1} = \frac{1}{a/2} \rightarrow \frac{a^2}{2} = 1 \rightarrow a = \sqrt{2}$

Luego es un triángulo acutángulo isósceles con ángulo desigual 45°, por tanto, un triángulo cordobés.

4. **Explica por qué el rectángulo coloreado es un rectángulo cordobés.**

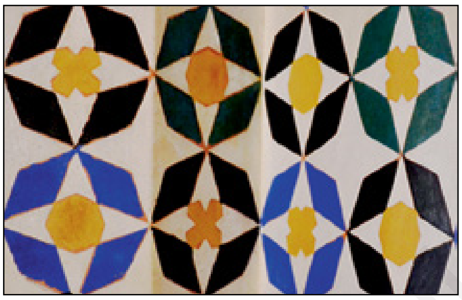


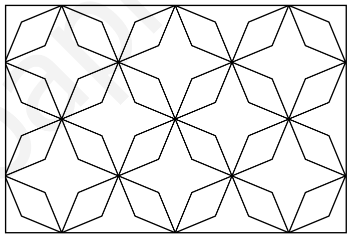
La altura del rectángulo coincide con el lado del octógono regular, puesto que es el radio de la circunferencia que se traza tomando como medida ese lado.

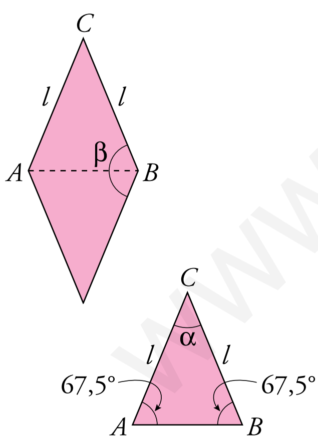
La base del rectángulo coincide con el radio del octógono regular.

Por tanto, la relación entre la altura y la base del rectángulo coincide con la relación entre el lado y el radio del octógono regular. El rectángulo es cordobés.

5. **El mosaico que ves debajo se encuentra en la Alhambra de Granada. ¿Encuentras en él la proporción cordobesa?**







El triángulo ABC es isósceles, puesto que los lados iguales se corresponden con los lados del octógono regular.

El ángulo β es el ángulo interior de un octógono regular, y mide $\frac{180° \cdot 6}{8} = 135°$.

Cada uno de los ángulos iguales del triángulo mide:

$$135° : 2 = 67{,}5°$$

y el desigual:

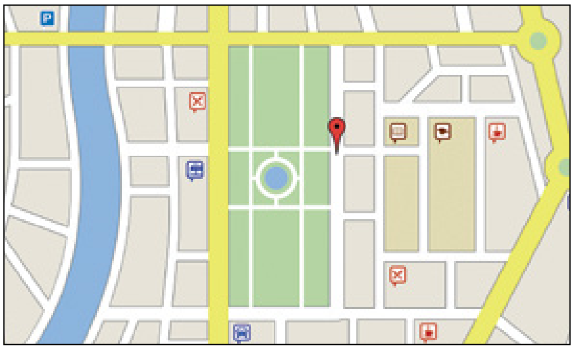
$$180° - 135° = 45°$$

Son, por tanto, dos triángulos cordobeses unidos por el lado desigual. Es un diamante cordobés.

5 Áreas y volúmenes de figuras semejantes

Página 158

1. La ilustración muestra una porción del plano de una ciudad, representado a escala 1:30 000.



a) ¿Qué superficie ocupa el parque en el plano?

b) ¿Cuál es su superficie real en metros cuadrados?

a) En el plano, el parque mide 1,3 cm de ancho y 3,4 cm de alto.

$A_{PLANO} = 1{,}3 \cdot 3{,}4 = 4{,}42 \text{ cm}^2$

b) La razón entre las superficies es $30\,000^2 = 900\,000\,000 = 9 \cdot 10^8$.

$A_{REAL} = 4{,}42 \cdot 9 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 = 39{,}78 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 = 397\,800 \text{ m}^2$

2. Con este mapa, y sabiendo que la distancia en línea recta entre Almería y A Coruña es de 885 km, haz una estimación de la superficie de la península ibérica.

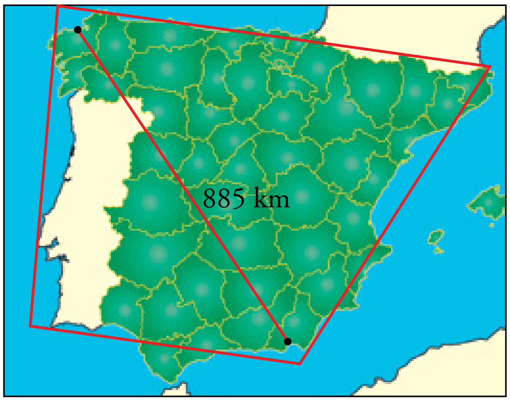
Después, busca la superficie real en Internet y cotéjala con la que has calculado.

Midiendo sobre el mapa, 5 cm se corresponden con los 885 km = 88 500 000 cm marcados.

Así, 1 cm del plano equivale a 88 500 000 : 5 = 17 700 000 cm en la realidad.

La razón entre las superficies es $17\,700\,000^2 = 3{,}1329 \cdot 10^{14}$.

Trazamos en el mapa un trapecio que abarque, aproximadamente, la superficie de la península ibérica.



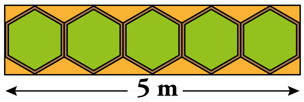
Tomamos las medidas aproximadas sobre él (base mayor = 5,7 cm; base menor = 3,5 cm; altura = 4,2 cm) y calculamos el área:

$$A_{MAPA} = \frac{5{,}7 + 3{,}5}{2} \cdot 4{,}2 = 19{,}32 \text{ cm}^2$$

$$A_{REAL} = 19{,}32 \cdot 3{,}1329 \cdot 10^{14} =$$
$$= 6{,}053 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2 \approx 600\,000 \text{ km}^2$$

(El área es más o menos aproximada, depende del trapecio trazado.)

3. Cinco jardineras de planta hexagonal regular, adosadas como muestra la ilustración, hacen una fila de cinco metros de largo.



a) ¿Qué superficie ocupa cada jardinera?

b) ¿Cuál es el área del rectángulo que las contiene?

a) La apotema de cada hexágono mide 5 : 5 : 2 = 0,5 m.

Calculemos el lado, x.

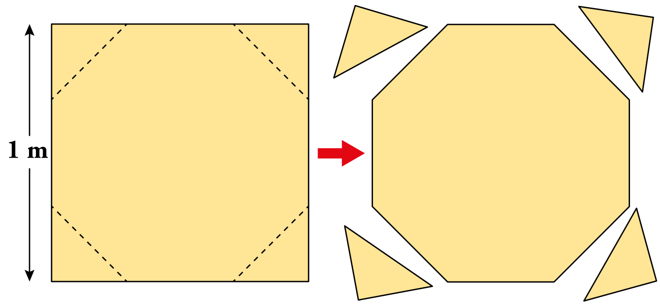
$$x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 0{,}5^2 \rightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} = 0{,}25 \rightarrow \frac{3x^2}{4} = 0{,}25 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577 \text{ m}$$

$$A_{\text{JARDINERA}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{6 \cdot 0{,}577 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}87 \text{ m}^2$$

b) $A_{\text{RECTÁNGULO}} = 5 \cdot (0{,}577 \cdot 2) = 5{,}77 \text{ m}^2$

Página 159

4. Cortando las cuatro esquinas de un tablero de madera de un metro de lado, se ha obtenido el tablero de una mesa octogonal regular:



¿Qué superficie tiene el tablero de la mesa?

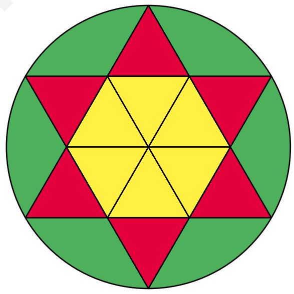
En el problema 7 de la página 154 se calculó el lado del octógono $x = 414$ mm.

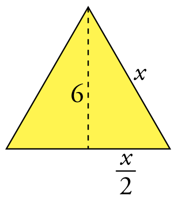
La apotema será la mitad del lado del tablero, 1 : 2 = 0,5 m = 500 mm.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{3\,312 \cdot 500}{2} = 828\,000 \text{ mm}^2 = 82{,}8 \text{ dm}^2$$

5. Se va a decorar la pista circular de un circo, de 12 m de radio, pintando en el suelo el siguiente diseño:

Si con cada bote de pintura se pueden colorear diez metros cuadrados, ¿cuántos botes de cada color se van a necesitar?





$$x^2 = 6^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 36 + \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 - \frac{x^2}{4} = 36$$

$$\frac{3x^2}{4} = 36 \rightarrow 3x^2 = 144 \rightarrow x^2 = 48 \rightarrow x = \sqrt{48} = 6{,}9 \text{ m}$$

Luego: Área triángulo $= \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{6 \cdot 6{,}9}{2} = 20{,}7 \text{ m}^2$

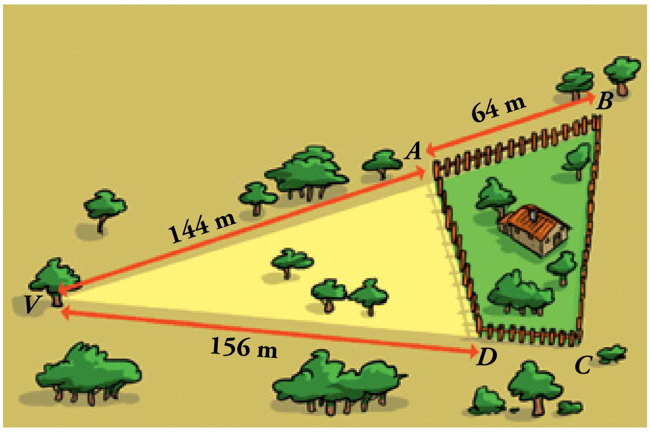
- Pintura amarilla: necesitamos pintar $20{,}7 \cdot 6 = 124{,}2$ m, como con cada bote se pueden colorear 10m^2, necesitaremos $\dfrac{124{,}2}{10} = 12{,}42$ botes, es decir, 13 botes de pintura amarilla.
- Pintura roja: como es la misma superficie que la pintura amarilla, seis triángulos, necesitamos la misma cantidad, 13 botes de pintura roja.
- Pintura verde:

  Área círculo $= \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 12^2 = 452{,}16 \text{ m}^2$

  El área de 12 triángulos será: $20{,}7 \cdot 12 = 248{,}4 \text{ m}^2$

  Luego necesitamos pintar $452{,}16 - 248{,}4 = 203{,}76 \text{ m}^2$ de pintura verde, como con cada bote se pueden colorear 10 m^2, necesitaremos $\dfrac{203{,}76}{10} = 20{,}376$ botes, es decir, 21 botes de pintura verde.

6. **Calcula la superficie de la finca vallada sabiendo que los ángulos $\widehat{VAD}$ y $\widehat{BCD}$ son rectos.**



Aplicando el teorema de Pitágoras en $\widehat{VAD}$:

$$AD^2 = 156^2 - 144^2 \rightarrow AD = \sqrt{3\,600} = 60 \text{ m}$$

Los triángulos $\widehat{VCB}$ y $\widehat{VAD}$ son semejantes:

$$\frac{60}{BC} = \frac{156}{144 + 64} \rightarrow BC = \frac{60 \cdot 208}{156} = 80 \text{ m}$$

$$\frac{144}{VC} = \frac{156}{208} \rightarrow VC = \frac{144 \cdot 208}{156} = 192 \text{ m}$$

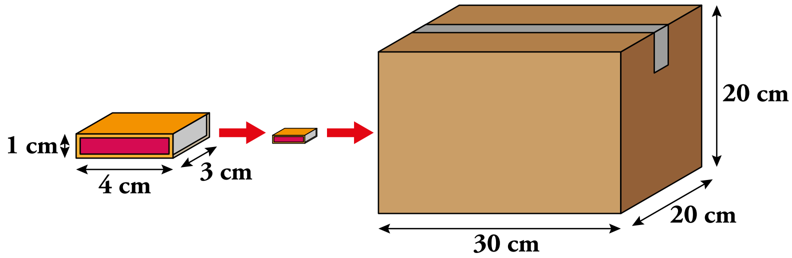
$$A_{\widehat{VCB}} = \frac{192 \cdot 80}{2} = 7\,680 \text{ m}^2$$

$$A_{\widehat{ADB}} = \frac{144 \cdot 60}{2} = 4\,320 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{FINCA VALLADA}} = 7\,680 - 4320 = 3\,360 \text{ m}^2$$

Página 160

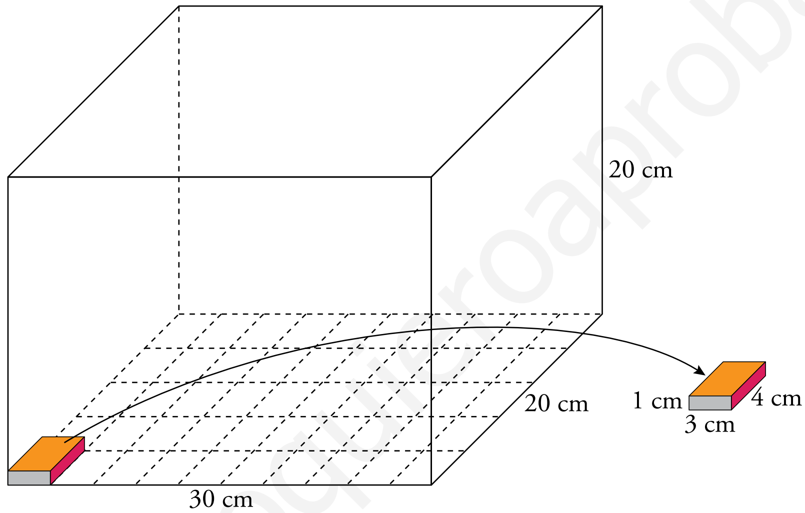
7. Un fabricante de cerillas presenta su producto en cajitas de 25 unidades y las distribuye en cajas grandes de cartón, con las formas y tamaños que ves en la ilustración.



a) ¿Cuántas cajitas de cerillas lleva cada caja-envase?

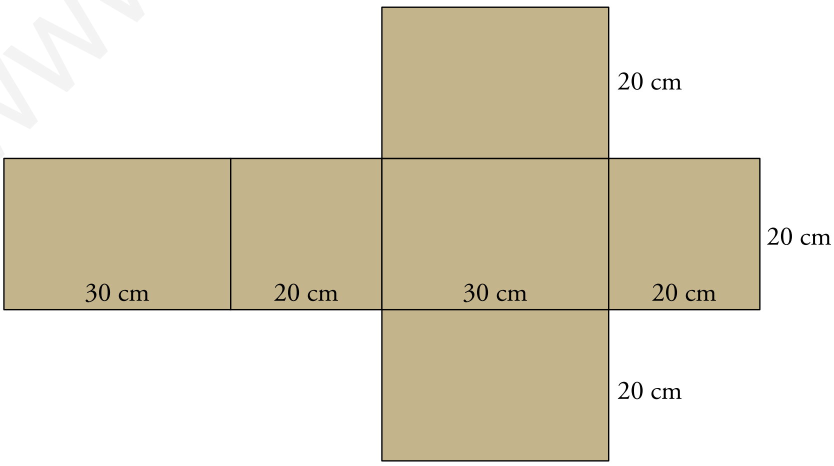
b) ¿Cuál es el área de la plantilla de cartón con la que se fabrica cada caja, si las solapas aumentan en un 20 % la superficie teórica?

a)



En la posición indicada en el gráfico, caben 10 cajitas a lo ancho y 5 en profundidad; es decir, 50 de ellas en cada capa. A lo alto caben 20 capas. En total, caben $50 \cdot 20 = 1\,000$ cajitas de cerillas.

b)

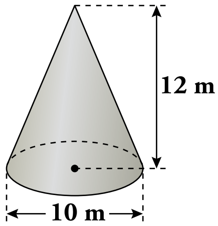


$S_{\text{TEÓRICA}} = 4 \cdot 30 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \cdot 20 = 2\,400 + 800 = 3\,200 \text{ cm}^2$

Añadimos un 20 % por las solapas, y la superficie de cartón necesaria es:

$S_{\text{CAJA}} = 3\,200 \cdot 1{,}20 = 3\,840 \text{ cm}^2$

8. Un torreón circular está coronado por un tejado de pizarra en forma de cono, de 10 m de diámetro en la base y 12 m de altura.



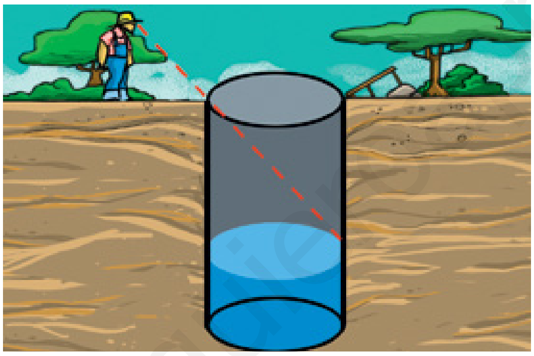
¿Cuánto costará renovar la cubierta, si se ha contratado a 85 € el metro cuadrado?

$$h^2 + r^2 = g^2 \rightarrow 12^2 + 5^2 = g^2 \rightarrow g = \sqrt{169} = 13$$

$$A = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 13 = 204{,}1 \text{ m}^2$$

Como cuesta 85 € el metro cuadrado, costará 204,1 · 85 = 17 348,50 €.

9. El pozo para riego de una huerta tiene una profundidad de siete metros y un diámetro de tres metros. El hortelano comprueba que hoy, para alcanzar a ver el agua, debe colocarse a menos de metro y medio del borde.



¿Cuáles son hoy las reservas de agua del pozo, sabiendo que el hortelano mira desde una altura de 1,80 m?

Como los triángulos son semejantes:

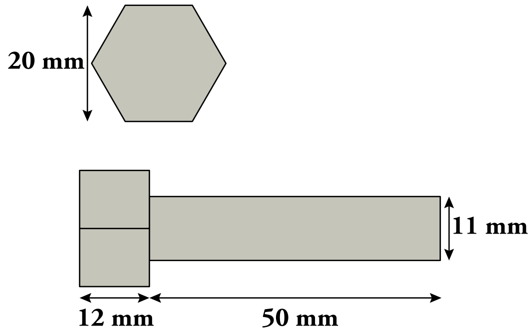
$$\frac{1{,}80}{x} = \frac{1{,}5}{3} \rightarrow x = 3{,}6 \text{ m}$$

$$y = 7 - 3{,}6 = 3{,}4 \text{ m}$$

Volumen cilindro = $A_{\text{BASE}} \cdot h = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 3{,}4 = 24{,}021 \text{ m}^3$ de agua.

Página 161

10. La masa de este tornillo es 52 gramos:



¿Cuál es la densidad del acero utilizado en su fabricación?

(NOTA: densidad = masa/volumen)

$$\text{Apotema} = 10 \text{ mm} \to x^2 = 10^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \to x^2 = \frac{400}{3} \to x = 11{,}55 \text{ mm}$$

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{6 \cdot 11{,}55 \cdot 10}{2} = 346{,}5 \text{ mm}^2$$

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{h} = 346{,}5 \cdot 12 = 4\,158 \text{ mm}^3$$

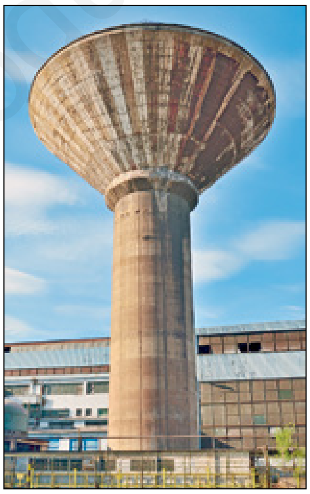
$$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{h} = \pi \cdot r^2 \cdot 50 = 3{,}14 \cdot 5{,}5^2 \cdot 50 = 4\,749{,}25 \text{ mm}^3$$

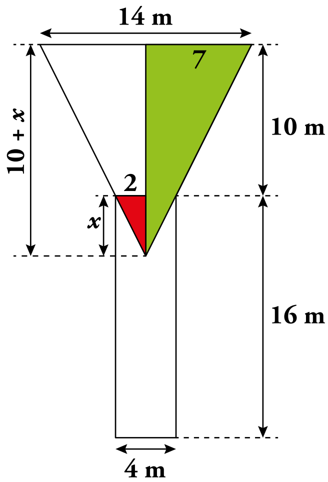
$$V_{\text{TOTAL}} = 4\,158 + 4\,749{,}25 = 8\,907{,}25 \text{ mm}^3 = 8{,}90725 \text{ cm}^3$$

$$\text{Densidad} = \frac{52}{8{,}90725} = 5{,}84 \text{ g/cm}^3$$

11. ¿Cuántos litros contiene este depósito cuando está lleno?

NOTA: La columna inferior no almacena agua.





Los dos triángulos coloreados son semejantes, pueden ponerse en posición de Tales:

$$\frac{2}{7} = \frac{x}{10 + x} \to 20 + 2x = 7x \to 5x = 20 \to x = 4$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \text{H} = \frac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 14 \approx 718{,}01 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \text{h} = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 \approx 16{,}75 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 718{,}01 - 16{,}75 = 701{,}26 = 701\,260 \text{ litros.}$$

12. Para averiguar la capacidad de este depósito, se ha tomado la foto adjunta y se ha medido, con una cuerda, la circunferencia de la base: 9,42 m.

¿Son suficientes esos datos? Justifica tu respuesta y, si es afirmativa, calcula la capacidad.

Los datos son suficientes. Midiendo sobre la fotografía y aplicando lo que sabemos sobre semejanza, averiguaremos la capacidad del depósito.

Veamos cuál es el radio real del depósito cilíndrico:

$$L = 2\pi r \;\rightarrow\; 9{,}42 = 2\pi r \;\rightarrow\; r = \frac{9{,}42}{2\pi} \approx 1{,}5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$$

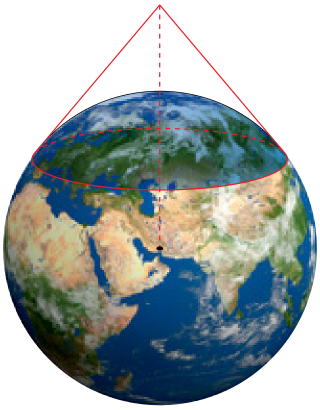
Medimos sobre la fotografía: el depósito tiene 3,5 cm de altura y 2 cm de diámetro.

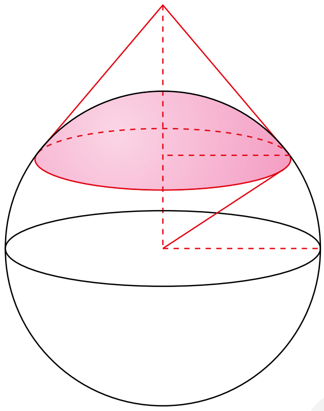
$$\frac{\text{Diámetro en la foto}}{\text{Diámetro real}} = \frac{\text{Altura en la foto}}{\text{Altura real}} \;\rightarrow\; \frac{2}{300} = \frac{3{,}5}{h} \;\rightarrow\; h = 525 \text{ cm} = 5{,}25 \text{ m}$$

$$V_{\text{DEPÓSITO}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5{,}25 \approx 37{,}11 \text{ m}^3 = 37\,110 \text{ litros.}$$

Página 162

13. ¿Cuál es la superficie de la Tierra que se ve desde un satélite que orbita a 1 000 km de altura?





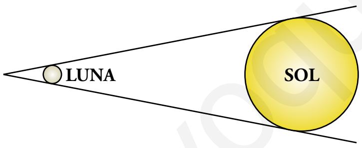
$$\frac{R}{R+d} = \frac{R-h}{R} \rightarrow \frac{6\,371}{6\,371+1\,000} = \frac{6\,371-h}{6\,371}$$

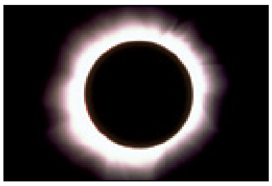
$40\,589\,641 = 46\,960\,641 - 7\,371h \rightarrow h = 864{,}33$ km

$A_{CASQUETE} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 2 \cdot 3{,}1415 \cdot 6371 \cdot 864{,}33 = 34\,598\,259{,}51$

Casi 35 millones de km^2.

14. La Luna está a 384 000 km de la Tierra, y el Sol, a 150 millones de kilómetros. El tamaño aparente de ambos es prácticamente el mismo, como se comprueba en los eclipses, cuando la Luna se pone delante del Sol.





Sabiendo que la Luna tiene un diámetro de 3 500 km, ¿cuál es la superficie del Sol? ¿Y el volumen?

Suponemos que la Luna es una esfera perfecta.

$$S_{LUNA} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1\,750^2 = 38\,484\,510 \text{ km}^2 \approx 3{,}85 \cdot 10^7 \text{ km}^2$$

$$V_{LUNA} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1\,750^3 = 22\,449\,297\,500 \text{ km}^3 \approx 2{,}24 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$$

La razón de semejanza entre la Luna y el Sol será:

$$\frac{d_L}{d_S} = k \rightarrow k = \frac{384\,000}{150\,000\,000} = 0{,}00256$$

Por tanto:

$$S_{SOL} = \frac{S_L}{k^2} = \frac{3{,}85 \cdot 10^7}{(0{,}00256)^2} \approx 5{,}87 \cdot 10^{12} \text{ km}^2$$

$$V_{SOL} = \frac{V_L}{k^3} = \frac{2{,}24 \cdot 10^{10}}{(0{,}00256)^3} \approx 1{,}34 \cdot 10^{18} \text{ km}^3.$$

15. **La gran pirámide de Guiza se construyó en tiempos del faraón Keops, unos 2 550 años a. C. Inicialmente estaba recubierta de una capa de planchas de roca caliza pulida, que se perdió, en parte, en un terremoto (siglo XIV), y después por el saqueo destinado a la construcción de otros edificios.**

Un aventurero que la visitó a finales del siglo XVIII dejó constancia en su diario de algunas de sus dimensiones: rodeándola por la base, midió 920 m, y para escalarla hasta la cima, por una arista lateral, hubo de recorrer 214 m.

a) Calcula el área que cubría originalmente la caliza blanca.

b) Estima el peso de la pirámide, suponiendo que un metro cúbico de piedra pesa 2,5 toneladas.

a) Calculamos la apotema de la pirámide:

$$214^2 = a^2 + 115^2 \to a = \sqrt{45\,796 - 13\,225} = \sqrt{32\,571} \approx 180{,}5 \text{ m}$$

El área de cada triángulo es: $A = \dfrac{b \cdot \text{h}}{2} = \dfrac{230 \cdot 180{,}5}{2} = 20\,757{,}5 \text{ m}^2$

El área que abarca la caliza blanca es $20\,757{,}5 \cdot 4 = 83\,030 \text{ m}^2$.

b) Para calcular el volumen de la pirámide, calculamos primero su altura:

$$a^2 = \text{h}^2 + 115^2 \to 180{,}5^2 = \text{h}^2 + 115^2$$

$$32\,580{,}25 = \text{h}^2 + 13\,225$$

$$\text{h}^2 = 19\,355{,}25 \to \text{h} = 139 \text{ m aproximadamente}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot \text{h} = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 139 = 2\,451\,033{,}3 \text{ m}^3$$

Como un metro cúbico de piedra pesa 2,5 toneladas, el peso de la pirámide será:

$$2\,451\,033{,}3 \cdot 2{,}5 = 6\,127\,583{,}3 \text{ toneladas}$$

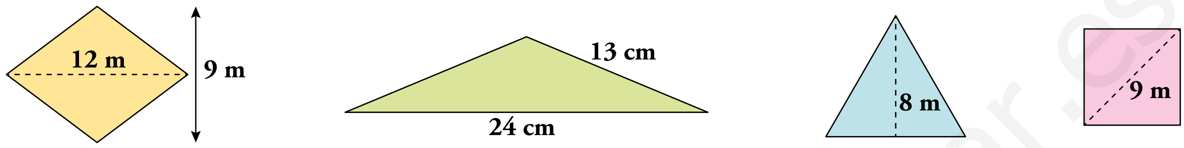
Ejercicios y problemas

Página 163

Practica

Teorema de Pitágoras

1. Observa las figuras y calcula.



a) El perímetro del rombo.

b) La altura del triángulo isósceles.

c) El lado del triángulo equilátero.

d) El lado del cuadrado.

a) $l^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25$

$l = 7{,}5$ cm

Luego, Perímetro $= 4 \cdot l = 4 \cdot 7{,}5 = 30$ m.

b) $13^2 = \text{h}^2 + 12^2$

$169 = \text{h}^2 + 144$

$\text{h}^2 = 169 - 144 = 25 \rightarrow \text{h} = \sqrt{25} = 5$ cm

c) $l^2 = 8^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = 64 + \dfrac{l^2}{4}$

$64 = l^2 - \dfrac{l^2}{4} = \dfrac{3l^2}{4} \rightarrow l^2 = 85{,}3$

$l = 9{,}24$ m

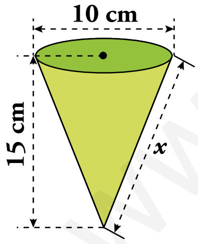
d) $9^2 = l^2 + l^2$

$81 = 2l^2 \rightarrow l^2 = \dfrac{81}{2} = 40{,}5$

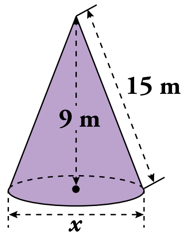
$l = 6{,}36$ m

2. Calcula x en cada caso:

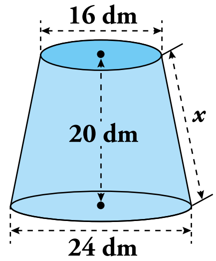
a)



b)



c)



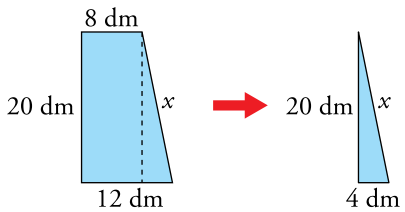
a) $x^2 = 15^2 + 5^2 = 225 + 25 = 250$

$x = \sqrt{250} = 15{,}8$ cm

b) $15^2 = 9^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

$225 - 81 = \dfrac{x^2}{4} \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow x = 24$ m

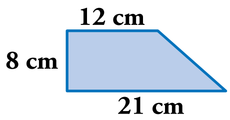
c)

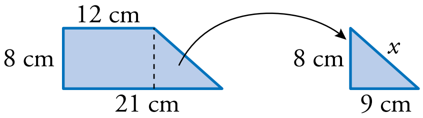


$x^2 = 20^2 + 4^2 = 400 + 16 = 416$

$x = \sqrt{416} = 20{,}4$ m

3. **Calcula el perímetro de este trapecio rectángulo:**





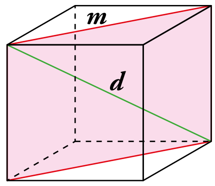
$x^2 = 8^2 + 9^2 \rightarrow x = \sqrt{145} \approx 12{,}04$ cm

Perímetro $= 8 + 12 + 12{,}04 + 21 = 53{,}04$ cm

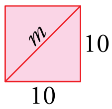
4. **En un cubo de arista 10 cm, calcula:**

a) La diagonal de una cara (*m*).

b) La diagonal del cubo (*d*).



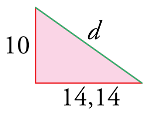
a)



$m^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$

$m = \sqrt{200} = 14{,}14$ cm

b)

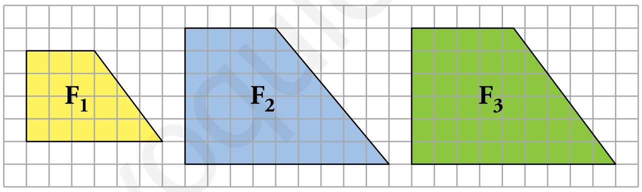


$d^2 = 10^2 + 14{,}14^2 = 100 + 200 = 300$

$d = 17{,}32$ cm

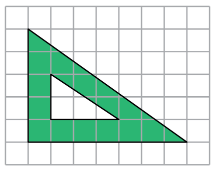
Figuras semejantes

5. **¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?**



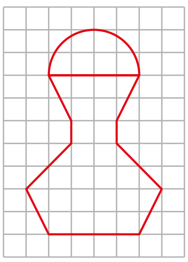
F_1 es semejante a F_3. La razón de semejanza es $\frac{2}{3}$.

6. **¿Son semejantes los triángulos interior y exterior del cartabón? Razona tu respuesta.**



No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

7. **Reproduce esta figura en papel cuadriculado y dibuja otra, semejante, de doble tamaño. Después, calcula el área de cada una.**



¿Cuál es la razón entre las áreas de las dos figuras?

- El área de la semicircunferencia pequeña es $\dfrac{\pi \cdot 4}{2} = 2\pi \text{ u}^2$.

  El resto de la figura pequeña tiene un área de 26 u^2.

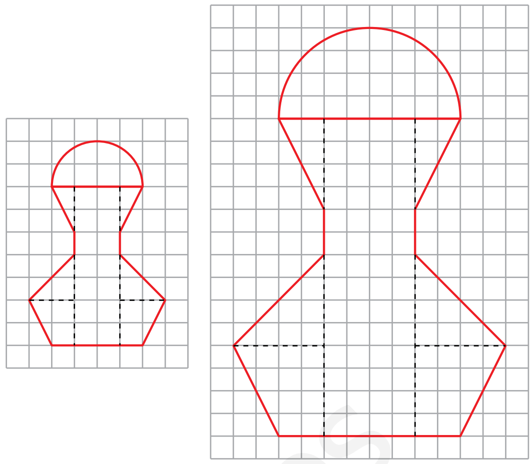
  $A_{\text{TOTAL}} = 26 + 2\pi \text{ u}^2$

- El área de la semicircunferencia mayor es $\dfrac{\pi \cdot 16}{2} = 8\pi \text{ u}^2$.

  El resto de la figura mayor tiene un área de 104 u^2.

  $A_{\text{TOTAL}} = 104 + 8\pi \text{ u}^2$

La razón entre las áreas es 4.



8. **Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:**

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm².

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm³ de agua.

a) $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \to 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} \to h \\ 4 \text{ cm} \to d \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} h = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array}\right\}$ La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.

b) $40 \cdot 250^2 = 2\,500\,000 \text{ cm}^2 = 250 \text{ m}^2$

c) $20 \cdot 250^3 = 312\,500\,000 \text{ cm}^3 = 312{,}5 \text{ m}^3$

9. **En un mapa de escala 1:1 500 000, la distancia entre dos poblaciones es de 2 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real?

b) ¿Qué distancia habrá en el plano entre dos ciudades que distan 180 km?

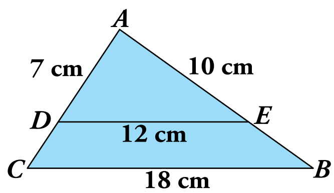
a) Distancia real = $2 \cdot 1\,500\,000 = 3\,000\,000 \text{ cm} = 30 \text{ km}$

b) $180 \text{ km} = 18\,000\,000 \text{ cm}$

Distancia en el mapa = $\dfrac{18\,000\,000}{1\,500\,000} = 12 \text{ cm}$

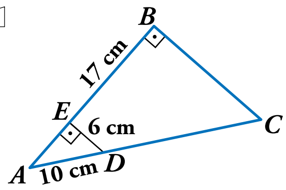
Semejanza de triángulos

10. **En el triángulo *ABC* hemos trazado *DE* paralelo a *CB*. ¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *ADE*? Calcula $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.**



Los triángulos son semejantes porque están en posición de Tales.

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \to \overline{AC} = \dfrac{7 \cdot 18}{12} = 10{,}5 \text{ cm}$ $\qquad$ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \to \overline{AB} = \dfrac{10 \cdot 18}{12} = 15 \text{ cm}$

11. 

¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *AED*? Halla el perímetro del trapecio *EBCD*.

Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, $\hat{A}$. Tienen los tres ángulos iguales.

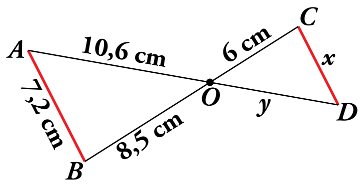
- Hallamos $\overline{EA}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

  $\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm; $\overline{EA} = 8 + 17 = 25$ cm

- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \rightarrow \dfrac{10 + x}{10} = \dfrac{25}{8} \rightarrow 80 + 8x = 250 \rightarrow x = 21{,}25 \rightarrow \overline{DC} = 21{,}25$ cm
- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{6} = \dfrac{25}{8} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{150}{8} = 18{,}75$ cm
- Perímetro de $EBCD = 17 + 18{,}75 + 21{,}25 + 6 = 63$ cm

Página 164

12. **Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD.**



a) Di por qué son semejantes los triángulos OAB y ODC.

b) Calcula x e y.

a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

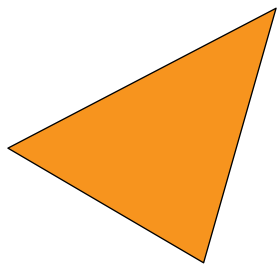
b) $\dfrac{x}{7,2} = \dfrac{6}{8,5} \rightarrow x = \dfrac{7,2 \cdot 6}{8,5} \approx 5,08$ cm $\qquad \dfrac{6}{8,5} = \dfrac{y}{10,6} \rightarrow y = \dfrac{10,6 \cdot 6}{8,5} \approx 7,48$ cm

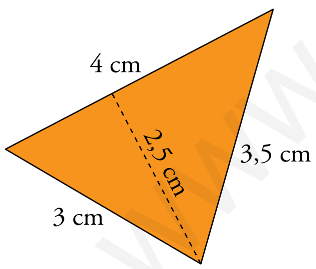
13. **La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm², ¿cuál es el área del menor?**

El área menor es $150 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = 24$ cm^2.

Aplica lo aprendido

14. **Esta figura representa, a escala 1:2000, una parcela de terreno. Calcula su perímetro y su área, tomando las medidas necesarias.**





$P_{\text{GRÁFICO}} = 4 + 3 + 3,5 = 10,5$ cm

$P_{\text{REAL}} = 10,5 \cdot 2\,000 = 21\,000$ cm $= 210$ m

$A_{\text{GRÁFICO}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4 \cdot 2,5}{2} = 5$ cm^2

$A_{\text{REAL}} = 5 \cdot 2\,000^2 = 20\,000\,000$ cm$^2 = 2\,000$ m^2

15. **Dos triángulos ABC y PQR son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.**

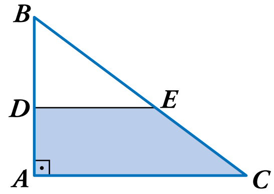
Perímetro del triángulo ABC: $24 + 28 + 34 = 86$ m

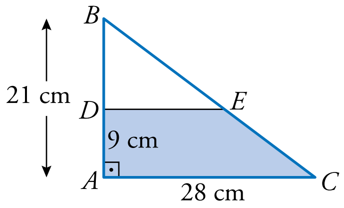
Razón de semejanza: $\dfrac{129}{86} = \dfrac{3}{2}$

Lados del triángulo PQR: $24 \cdot \dfrac{3}{2} = 36$ cm; $28 \cdot \dfrac{3}{2} = 42$ cm; $34 \cdot \dfrac{3}{2} = 51$ cm

16. **Los catetos del triángulo rectángulo ABC miden $\overline{AC} = 28$ cm y $\overline{AB} = 21$ cm.**

Desde el punto D tal que $\overline{AD} = 9$ cm, se traza una paralela a AC. Halla el área y el perímetro del trapecio $ADEC$.





Los triángulos ABC y DBE son semejantes.

Por ello:

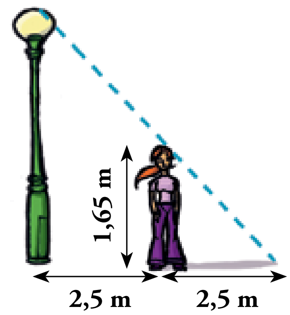
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{21}{12} = \frac{28}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 28}{21} = 16 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35 \text{ m} \\ \overline{BE} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ m}\end{array}\right\} \overline{EC} = 35 - 20 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Área del trapecio} = \frac{28 + 16}{2} \cdot 9 = 198 \text{ cm}^2$$

Perímetro del trapecio = 9 + 16 + 15 + 28 = 68 cm

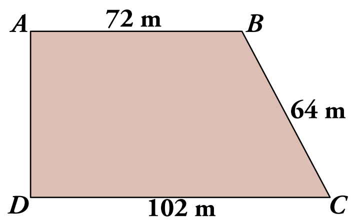
17. **Si la altura de Rita es 1,65 m, ¿cuál es la altura de la farola?**



Si x es la altura que buscamos, entonces:

$$\frac{x}{1,65} = \frac{5}{2,5} \rightarrow x = 3,3 \text{ m}$$

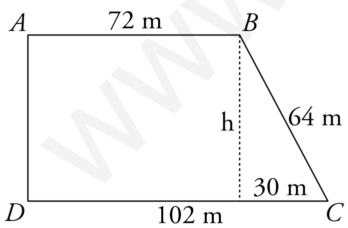
18. **Una parcela tiene forma de trapecio rectángulo con las dimensiones que se ven en la figura.**



a) Calcula su altura.

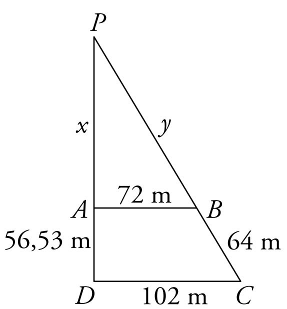
b) Se quiere hacer un pozo en el punto donde se cortan las prolongaciones de los lados AD y BC. ¿A qué distancia de A y de B estará el pozo?

a)



$$h = \sqrt{64^2 - 30^2} = 56,53 \text{ m}$$

b)

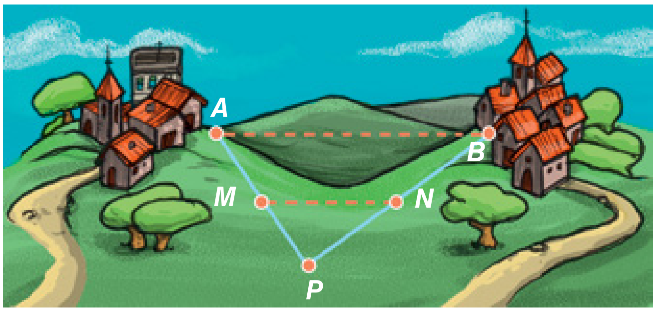


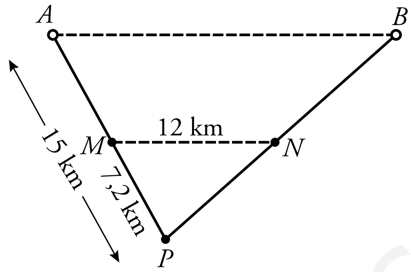
$$\frac{x}{72} = \frac{x + 56,53}{102} \rightarrow 102x = 72x + 4\,070,16 \rightarrow x = 135,67 \text{ m}$$

$$\frac{y}{72} = \frac{y + 64}{102} \rightarrow 102y = 72y + 4\,608 \rightarrow y = 153,6 \text{ m}$$

El pozo estará a 135,67 m de A y a 153,6 m de B.

19. **Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia $\overline{AB}$ fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas $\overline{AP}$ = 15 km, $\overline{PM}$ = 7,2 km y $\overline{MN}$ = 12 km. (MN es paralela a AB). Halla la distancia $\overline{AB}$.**

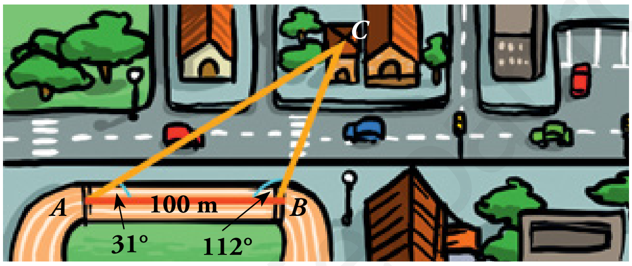




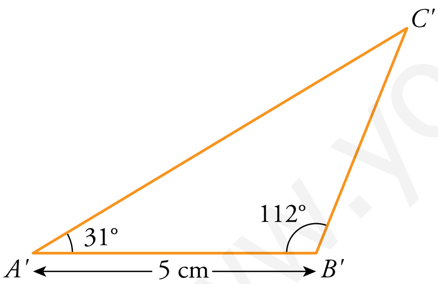
Los triángulos APB y MPN son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{12} = \frac{15}{7,2} \rightarrow \overline{AB} = \frac{15 \cdot 12}{7,2} = 25 \text{ km}$$

20. **Desde los extremos A y B de la recta de los 100 m de una pista de atletismo se ve la torre de la iglesia, C. Medimos los ángulos $\hat{A}$ = 31° y $\hat{B}$ = 112°. Calcula la distancia $\overline{AC}$.**



Dibuja un triángulo $A'B'C'$, semejante a ABC, con $\overline{A'B'}$ = 5 cm.

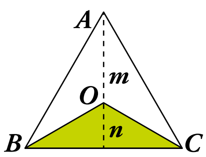


$\overline{A'C'}$ = 7,7 cm

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \rightarrow \frac{100 \text{ m}}{5 \text{ cm}} = \frac{\overline{AC}}{7,7 \text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AC} = \frac{100 \cdot 7,7}{5} \rightarrow \overline{AC} = 154 \text{ m}$$

21. **El triángulo ABC es equilátero y se ha dividido, desde el centro, en tres partes iguales. Así, podemos afirmar que el área del triángulo verde es 1/3 del total.**



Basándote en lo anterior, justifica que $m = 2n$ (el segmento m es doble que el segmento n).

Como el área del triángulo verde es $\frac{1}{3}$ del total y la base de los dos triángulos es la misma, siendo n la altura del verde y $m + n$ la altura del total:

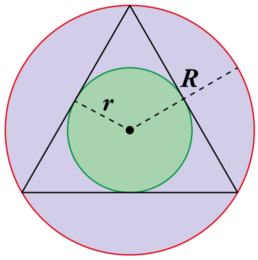
$$\frac{\cancel{b} \cdot n}{\cancel{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{b}(m+n)}{\cancel{2}}$$

$$3n = m + n \rightarrow m = 2n$$

Página 165

22. **Calcula los radios de las circunferencias inscrita, r, y circunscrita, R, a un triángulo equilátero de 12 cm de lado.**

Resuelve primero la actividad anterior.



De la actividad anterior deducimos que $R = 2r$ $(R = m$ y $r = n)$.

Si llamamos h a la altura del triángulo de 12 cm de lado:

$12^2 = h^2 + 6^2$

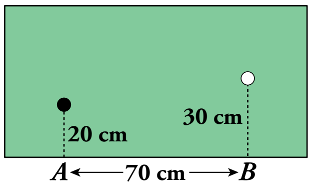
$144 = h^2 + 36$

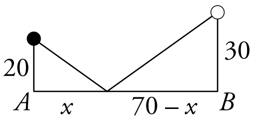
$h^2 = 108 \rightarrow h = 10{,}4$ cm

Por tanto: $\left.\begin{array}{l} R + r = 10{,}4 \\ R = 2r \end{array}\right\} \rightarrow 2r + r = 10{,}4 \rightarrow 3r = 10{,}4 \rightarrow r = \dfrac{10{,}4}{3} = 3{,}5 \text{ cm} \rightarrow R = 7 \text{ cm}$

Resuelve problemas

23. **En la mesa de billar, ¿en qué punto comprendido entre A y B debe dar la bola blanca, para que al rebotar alcance a la bola negra?**

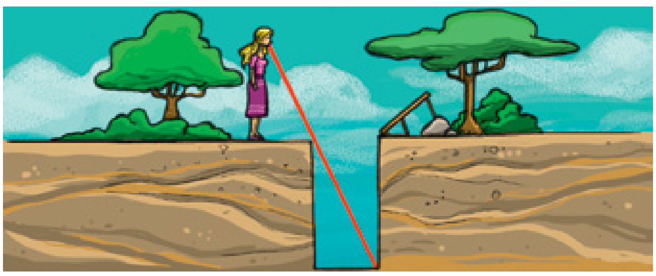


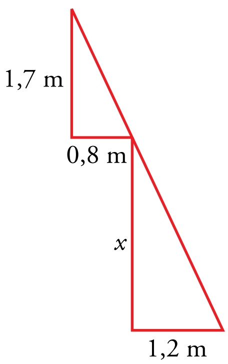


$\dfrac{20}{x} = \dfrac{30}{70 - x} \rightarrow 1\,400 - 20x = 30x \rightarrow 1\,400 = 50x \rightarrow x = 28$ cm

Debe dar a 28 cm del punto A.

24. **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

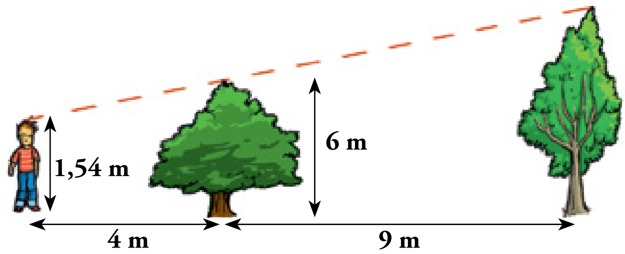


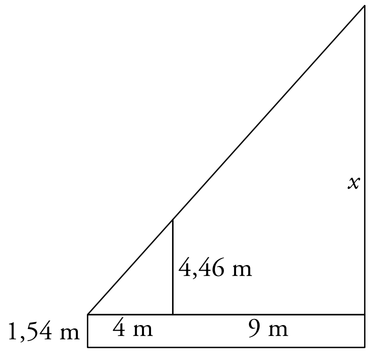


$\dfrac{x}{1{,}7} = \dfrac{1{,}2}{0{,}8} \rightarrow x = \dfrac{1{,}2 \cdot 1{,}7}{0{,}8} \rightarrow x = 2{,}55$ cm

La profundidad es de 2,55 m.

25. **Si la altura de Luis es 1,54 m, ¿cuál es la altura del árbol más alto?**



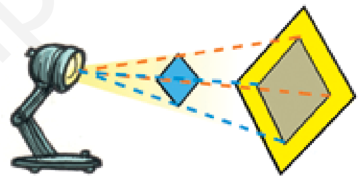


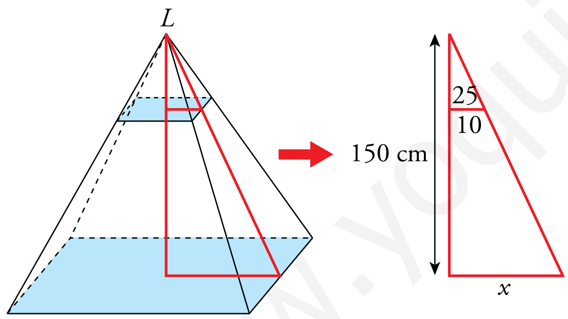
$$\frac{4,46}{4} = \frac{x}{13} \rightarrow x = \frac{4,46 \cdot 13}{4} = 14,495 \text{ m}$$

El árbol más alto tiene una altura de 14,495 + 1,54 = 16,035 m.

26. **Una lámpara, situada a 25 cm de una lámina cuadrada de 20 cm de lado, proyecta una sombra sobre una pantalla paralela que está a 1,5 m de la lámpara.**

¿Cuánto mide el lado del cuadrado proyectado?

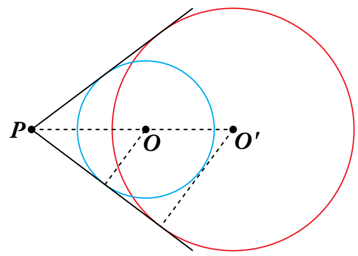


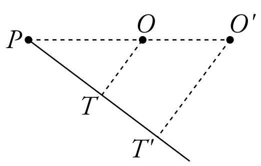


$$\frac{x}{150} = \frac{10}{25} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 150}{25} = 60$$

Por tanto, el lado del cuadrado proyectado mide 2 · 60 = 120 cm.

27. **Desde un punto P, trazamos las tangentes comunes a dos circunferencias. Las distancias de P a los centros son $\overline{PO}$ = 17 cm y $\overline{PO'}$ = 30 cm. Si el radio de la mayor mide 18 cm, ¿cuánto mide el radio de la menor?**

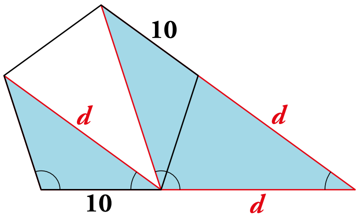




$$\frac{\overline{OT}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{O'T'}}{\overline{PO'}} \rightarrow \frac{\overline{OT}}{17} = \frac{18}{30} \rightarrow \overline{OT} = \frac{18 \cdot 17}{30} = 10,2 \text{ cm}$$

El radio de la menor mide 10,2 m.

28. **Observa y demuestra que la diagonal de un pentágono regular de 10 cm de lado es:**



$$d = 5 + 5\sqrt{5} \approx 16{,}18 \text{ cm}$$

$$\frac{d}{10} = \frac{d+10}{d}$$

Los dos triángulos sombreados son semejantes porque se pueden colocar en posición de Tales, por tanto verifican $\dfrac{d}{10} = \dfrac{d+10}{d}$.

$$d^2 = 10d + 100 \;\rightarrow\; d^2 - 10d - 100 = 0$$

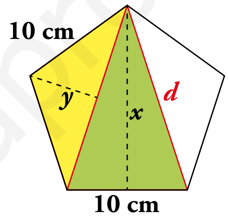
Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$d = \frac{10 \pm \sqrt{100+400}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{500}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{5 \cdot 10^2}}{2} = \frac{10 \pm 10\sqrt{5}}{2} = 5 \pm 5\sqrt{5}$$

Es válido únicamente el resultado positivo $d = 5 + 5\sqrt{5}$.

29. **Observa esta figura:**

Sabiendo que $d = 5 + 5\sqrt{5} \approx 16{,}18$ cm, calcula:



a) Las distancias x e y.

b) Las áreas de los triángulos verde y amarillo.

c) El área del pentágono.

a) • $16{,}18^2 = x^2 + 5^2$

$261{,}8 - 25 = x^2 \rightarrow x^2 = 236{,}8 \rightarrow x = 15{,}4$ cm

• $10^2 = y^2 + \left(\dfrac{16{,}18}{2}\right)^2$

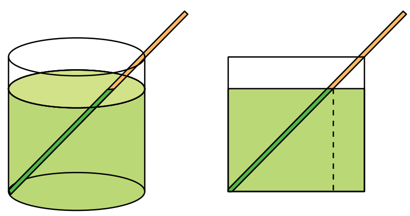
$10^2 = y^2 + 8{,}09^2 \rightarrow 100 = y^2 + 65{,}4 \rightarrow y^2 = 34{,}6 \rightarrow y = 5{,}9$ cm

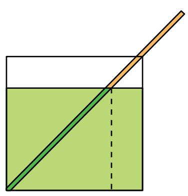
b) $A_{\text{TRIÁNGULO AMARILLO}} = \dfrac{b \cdot \text{h}}{2} = \dfrac{16{,}18 \cdot 5{,}9}{2} = 47{,}7 \text{ cm}^2$

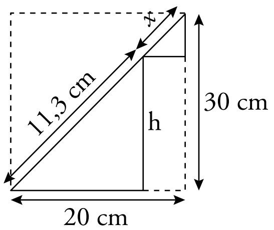
$A_{\text{TRIÁNGULO VERDE}} = \dfrac{b \cdot \text{h}}{2} = \dfrac{10 \cdot 15{,}4}{2} = 77 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{PENTÁGONO}} = 77 + 2 \cdot 47{,}7 = 172{,}4 \text{ cm}^2$

30. **En un bote de pintura de 20 cm de diámetro y 30 cm de altura, han olvidado la varilla de remover, que ha quedado apoyada en el borde, resbalando el extremo inferior hasta topar con la pared opuesta. Al sacar la varilla, vemos que la parte húmeda de pintura mide 11,3 cm. ¿Cuánta pintura queda en el bote?**







$30^2 + 20^2 = (11{,}3 + x)^2$

$\sqrt{900+400} = 11{,}3 + x \rightarrow x = \sqrt{1300} - 11{,}3 = 24{,}8$ cm

Por tanto:

$$\frac{30}{\text{h}} = \frac{11{,}3 + 24{,}8}{11{,}3} \rightarrow \text{h} = \frac{11{,}3 \cdot 30}{36{,}1} = 9{,}39$$

$V_{\text{PINTURA}} = \pi \cdot 10^2 \cdot 9{,}39 = 2\,948{,}46 \text{ cm}^3 = 2{,}94846 \text{ dm}^3$

Página 166

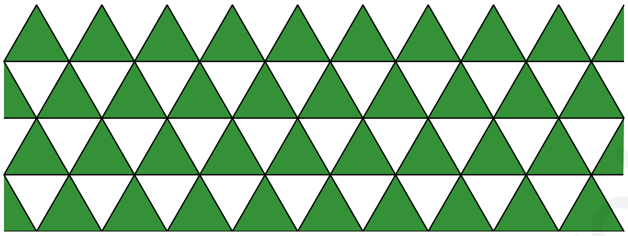
31. **Queremos construir un ortoedro de volumen 36 015 cm^3 que sea semejante a otro de dimensiones 25 × 15 × 35 cm. ¿Cuánto medirán sus aristas?**

$$V = 25 \cdot 15 \cdot 35 = 13\,125 \text{ cm}^3$$

$$k^3 = \frac{36\,015}{13125} = 2{,}744 \;\rightarrow\; k = 1{,}4$$

Las aristas del ortoedro deben medir: $25 \cdot 1{,}4 = 35$ cm; $15 \cdot 1{,}4 = 21$ cm; $35 \cdot 1{,}4 = 49$ cm.

32. **El zócalo rectangular de una pared está formado por un mosaico de baldosines (triángulos equiláteros), blancos y verdes, distribuidos así:**



Calcula las dimensiones del zócalo, sabiendo que está formado por 205 piezas de 20 cm de lado.

Si h es la altura de cada pieza:

$$20^2 = \text{h}^2 + 10^2$$

$$400 = \text{h}^2 + 100 \;\rightarrow\; \text{h} = \sqrt{300} = 17{,}32 \text{ cm}$$

El área de cada triángulo es:

$$A = \frac{b \cdot \text{h}}{2} = \frac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 173{,}2 \text{ cm}^2$$

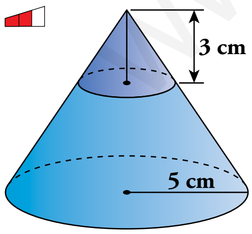
El área total del zócalo es:

$$A_{\text{TOTAL}} = 205 \cdot 173{,}2 = 35\,506 \text{ cm}^2$$

La altura del zócalo es $4 \cdot \text{h} = 4 \cdot 17{,}32 = 69{,}28$ cm.

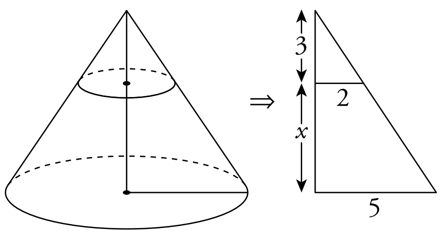
Por tanto su base, b, cumple la ecuación:

$$35\,506 \text{ cm}^2 = b \cdot 69{,}28 \;\rightarrow\; b = 512{,}5 \text{ cm}$$

33. 

Para hacer un embudo de boca ancha, hemos cortado un cono de 5 cm de radio a 3 cm del vértice. La circunferencia obtenida tiene 2 cm de radio.

Calcula la superficie y el volumen del embudo.

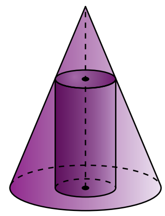


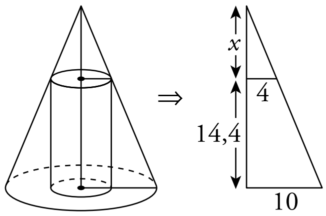
$$\frac{3+x}{5} = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; 3 + x = \frac{15}{2} \;\rightarrow\; x = 4{,}5 \text{ cm}$$

$$S = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{(3+4{,}5)^2 + 5^2} - \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{3^2 + 2^2} = 37{,}86\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}5) - \frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2 \cdot 3) = 58{,}5\pi \text{ cm}^3$$

34. **Hemos recubierto con un tejado cónico un depósito cilíndrico de 4 m de radio y 14,4 m de altura. Si el radio del cono es 10 m, ¿cuál es el volumen de la zona comprendida entre el cono y el cilindro?**





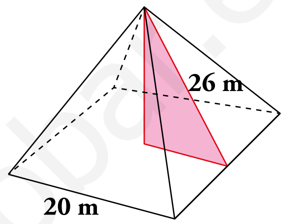
$$\frac{x}{4} = \frac{x + 14,4}{10} \rightarrow 10x = 4x + 57,6 \rightarrow x = 9,6 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 10^2) \cdot (14,4 + 9,6) = 800\pi \text{ m}^3 \\ V_{\text{CILINDRO}} = (\pi \cdot 4^2) \cdot 14,4 = 230,4\pi \text{ m}^3 \end{array}\right\}$$

$$V = V_{\text{CONO}} - V_{\text{CILNDRO}} = 800\pi - 230,4\pi = 569,6\pi \text{ m}^3$$

35. **En una pirámide cuadrangular regular, la arista de la base mide 20 m, y la apotema, 26 m.**

Calcula el área total y el volumen de la pirámide.



$$\left.\begin{array}{l} \text{El área de las caras es: } A = \frac{20 \cdot 26}{2} = 260 \text{ m}^2 \\ \text{El área de la base es: } A = l^2 = 20^2 = 400 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 260 \cdot 4 + 400 = 1\,040 + 400 = 1\,440 \text{ m}^2$$

Para calcular el volumen de la pirámide hay que calcular su altura, h:

$$26^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{20}{2}\right)^2$$

$$26^2 = \text{h}^2 + 10^2$$

$$676 = \text{h}^2 + 100 \rightarrow \text{h}^2 = 676 - 100 = 576 \rightarrow \text{h} = \sqrt{576} = 24 \text{ m}$$

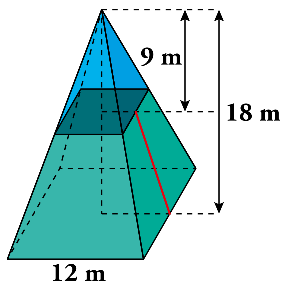
$$V = \frac{A_B \cdot \text{h}}{3} = \frac{400 \cdot 24}{3} = 3\,200 \text{ m}^3$$

36. **Observa el tronco de pirámide y calcula:**

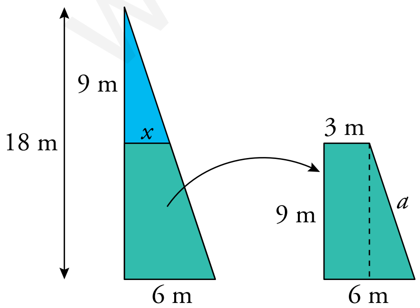
a) Su apotema (segmento rojo).

b) Su área lateral.

c) Su volumen.



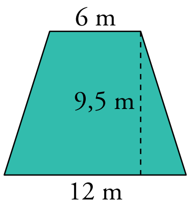
a)



Aplicando el teorema de Tales: $\frac{6}{x} = \frac{18}{9} \rightarrow x = 3$ m

$a^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90 \rightarrow a = \sqrt{90} = 9,5$ m

b)



$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{B + b}{2} \cdot \text{h} = \frac{12 + 6}{2} \cdot 9,5 = 85,5 \text{ m}^2$$

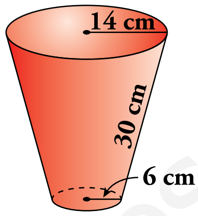
$$A_{\text{LATERAL}} = 85,5 \cdot 4 = 342 \text{ m}^2$$

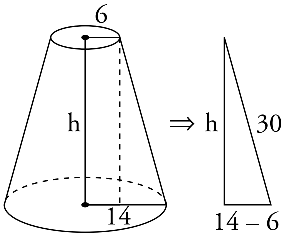
c) $A_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{12^2 \cdot 18}{3} = 864 \text{ m}^3$

$A_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{6^2 \cdot 9}{3} = 108 \text{ m}^3$

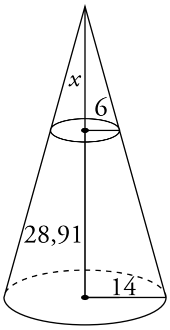
$V = 864 - 108 = 756 \text{ m}^3$

37. **Halla el volumen de una maceta como la de la figura, en la que los radios de las bases miden 6 cm y 14 cm, y la generatriz, 30 cm.**





$h = \sqrt{30^2 - 8^2} = 28{,}91 \text{ cm}$



$\dfrac{x}{6} = \dfrac{x + 28{,}91}{14} \rightarrow 14x = 6x + 173{,}46 \rightarrow x = 21{,}68 \text{ m}$

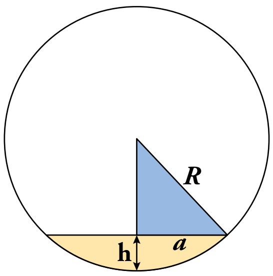
$V_{\text{CONO GRANDE}} = \dfrac{1}{3}(\pi \cdot 14^2) \cdot (28{,}91 + 21{,}68) = 3\,305{,}21\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \dfrac{1}{3}(\pi \cdot 6^2) \cdot (21{,}68) = 260{,}16\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{MACETA}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = 3\,045{,}05\pi \text{ cm}^3$

La maceta tiene un volumen de 9 561,46 cm^3.

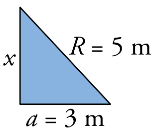
38. **Este depósito tiene un radio de cinco metros y se asienta sobre un círculo de 6 metros de diámetro.**



***R* = 5**
***a* = 3**
h = ?

Calcula su superficie y su capacidad.

Área y volumen del casquete esférico: $A_{CASQUETE} = 2\pi R h$ $\quad V_{CASQUETE} = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$



$5^2 = x^2 + 3^2$

$25 = x^2 + 9 \rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow x = \sqrt{16} = 4 \text{ m}$

$h = 5 - 4 = 1 \text{ m}$

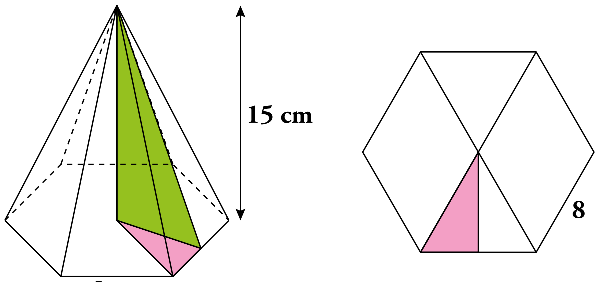
Por tanto la altura del casquete esférico del que tenemos que calcular su superficie y su capacidad es $10 - 1 = 9$ m.

$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi R h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 9 = 282{,}6 \text{ m}^2$

$V_{\text{CASQUETE}} = \dfrac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3R - h) = \dfrac{3{,}14 \cdot 9^2}{3} \cdot (3 \cdot 5 - 9) = 84{,}78 \cdot 6 = 508{,}68 \text{ m}^3$

Analiza, reflexiona y exprésate

39. **Observa la imagen e interpreta, en los cálculos adjuntos, el significado de cada letra, el objetivo perseguido y los resultados obtenidos. Añade la unidad en cada resultado.**



$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \rightarrow A_B = \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 6{,}93 = 166{,}32$$

$$a = \sqrt{15^2 + x^2} = \sqrt{225 + 48} \approx 16{,}52$$

$$A_L = \frac{8 \cdot 16{,}52}{2} \cdot 6 = 396{,}48$$

$$A_T = 166{,}32 + 396{,}48 = 562{,}8$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 166{,}32 \cdot 15 = 831{,}6$$

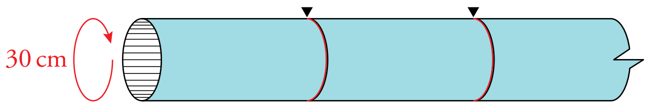
- $x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm es la apotema del hexágono regular, que calculamos para poder obtener el área de la base.

  A_B será el área de la base = 166,32 cm^2
- $a \approx 16{,}52$ cm es la apotema de la pirámide, que calculamos para obtener el área lateral.
- $A_L = 396{,}48$ cm^2 es el área lateral.
- $A_T = 562{,}8$ cm^2 es el área total.
- $V = 831{,}6$ cm^3 es el volumen de la pirámide.

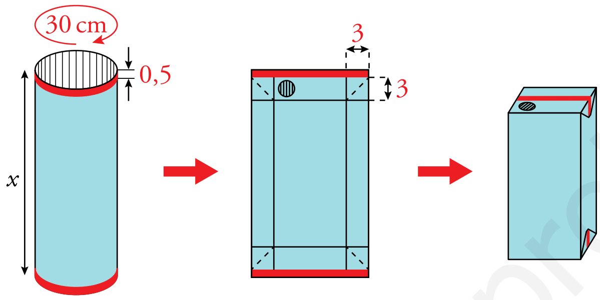
Página 167

40. **¿Has desplegado y aplanado alguna vez, sin arrugarlo, un tetrabrik de leche o de zumo? ¿Sabes cómo se fabrican? Veámoslo:**

Piensa en una máquina que va cortando a intervalos regulares un tubo de cartón con una circunferencia de 30 cm.

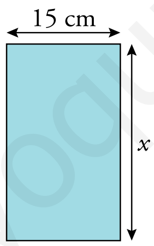


Después, los aplasta, los suelda por los cortes (0,5 cm, señalados en rojo), les marca unos dobleces, a 3 cm de los bordes, y les pone una boquilla redonda.

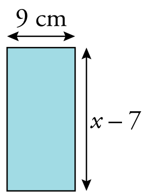


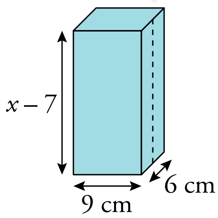
Por último, insufla aire en su interior, para expandirlos y que tomen la forma de prisma prevista por los dobleces. (Puedes comprobarlo con un envase vacío). ¿Qué longitud, *x*, debe tener cada porción de tubo, para que la capacidad del tetrabrik fabricado sea de un litro? (Redondea *x* a un número entero).

Al aplastar el cilindro queda:



Quito lo que soldamos y los dobleces y quedará:



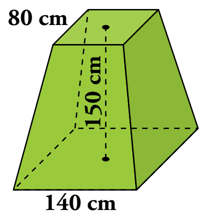


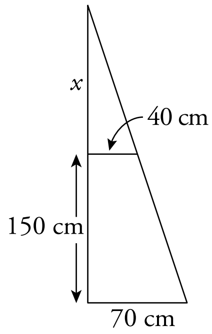
$1\,l = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

$9 \cdot 6 \cdot (x - 7) = 1\,000 \;\rightarrow\; x - 7 = \dfrac{1\,000}{54} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1\,000}{54} + 7 \approx 26 \text{ cm}$

41. **La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm.**

Halla su volumen.





Calculamos la altura de la pirámide:

$$\frac{x+150}{x} = \frac{70}{40} \rightarrow 40x + 6\,000 = 70x \rightarrow x = 200 \text{ cm}$$

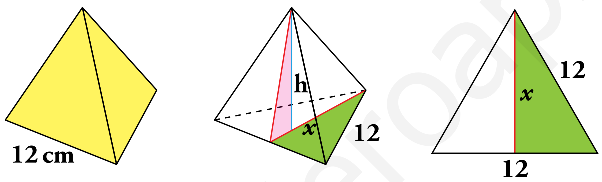
Altura = 200 + 150 = 350 cm

$$\text{Volumen tronco} = V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} =$$

$$= \frac{1}{3}140^2 \cdot 350 - \frac{1}{3}8^2 \cdot 200 = 1\,860\,000 \text{ cm}^3 = 1\,860 \text{ dm}^3$$

Problemas "+"

42. **Calcula el área y el volumen de un tetraedro regular de 12 cm de arista.**



Calculamos la altura de los triángulos que forman el tetraedro:

$$12^2 = x^2 + 6^2$$

$$144 = x^2 + 36 \rightarrow x^2 = 144 - 36 = 108 \rightarrow x = \sqrt{108} = 10{,}4 \text{ cm}$$

$$A_{\text{CARA}} = \frac{b \cdot \text{h}}{2} = \frac{12 \cdot 10{,}4}{2} = 62{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TETRAEDRO}} = 4 \cdot 62{,}4 = 249{,}6 \text{ cm}^2$$

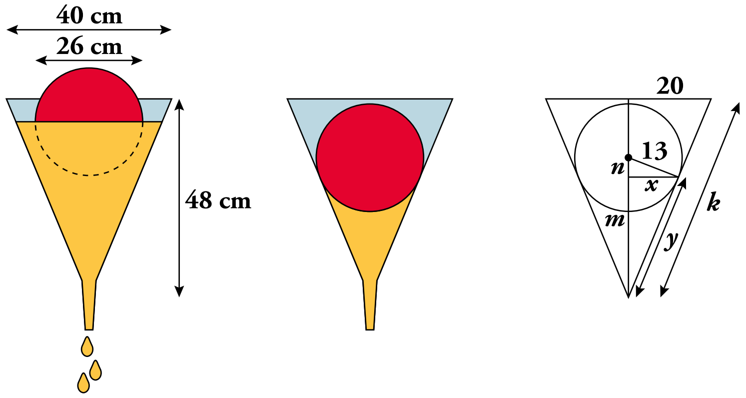
Para calcular la altura del tetraedro utilizaremos el hecho de que la altura va justo al baricentro del triángulo equilátero de la base que coincide con el ortocentro. En los triángulos equiláteros la altura coincide con la mediana y la distancia al vértice es $\frac{2}{3}$ de la mediana, es decir, $\frac{2}{3}$ de la altura, en este caso, $\frac{2}{3} \cdot 10{,}4 = 6{,}9$:

$$12^2 = \text{h}^2 + 6{,}9^2$$

$$144 = \text{h}^2 + 47{,}61 \rightarrow \text{h}^2 = 96{,}39 \rightarrow \text{h} = 9{,}8 \text{ cm}$$

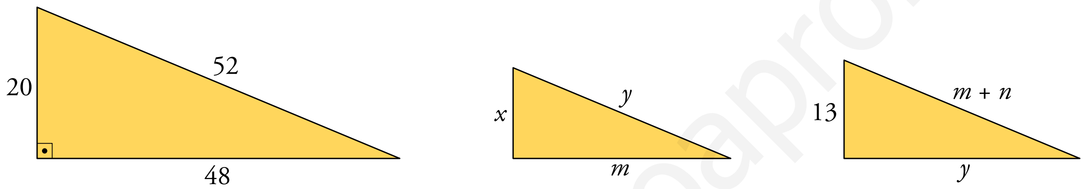
$$V = \frac{A_B \cdot \text{h}}{3} = \frac{62{,}4 \cdot 9{,}8}{3} = 203{,}84 \text{ cm}^3$$

43. **Experimento: Una pelota de goma, de 26 cm de diámetro, flota sobre la superficie del aceite que llena un embudo de cristal, en las condiciones que ves en la ilustración.**



El aceite gotea por la estrecha boca inferior del embudo, y la pelota va descendiendo hasta que toma contacto con el cristal. Entonces hace de tapón y el aceite deja de salir. ¿Qué cantidad de aceite queda en ese momento en el embudo?

- $k^2 = 20^2 + 48^2 \;\to\; k = 52$ cm
-



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{20}{13} = \frac{48}{y} \;\to\; y = 31{,}2 \text{ cm}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{52}{31{,}2} \;\to\; x = 12 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{20}{13} = \dfrac{52}{m+n} \;\to\; m + n = 33{,}8 \text{ cm} \\[2ex] \dfrac{48}{m} = \dfrac{52}{31{,}2} \;\to\; m = 28{,}8 \text{ cm} \end{array}\right\} \;\to\; n = 5 \text{ cm}$$

La cantidad de aceite será $V_{\text{CONO}} - V_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}}$

- $V_{\text{CONO}} = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot x^2 \cdot m}{3} = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 28{,}8}{3} = \dfrac{6\,912}{5}\pi \text{ cm}^3$

- $V_{\text{CASQUETE}} = \dfrac{\pi \cdot (R - n)^2}{3} \cdot \left[3 \cdot R - (R - n)\right] = \dfrac{\pi \cdot (13 - 5)^2}{3} \cdot \left[3 \cdot 13 - (13 - 5)\right] =$

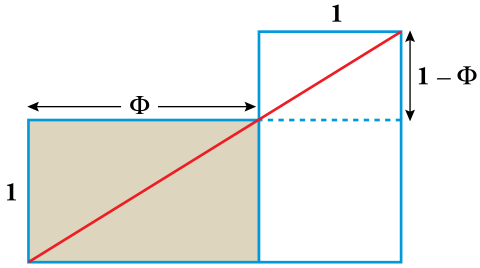
  $= \dfrac{\pi \cdot 8^2}{3} \cdot (39 - 8) = \dfrac{1984}{3}\pi \text{ cm}^3$

- $V_{\text{ACEITE}} = \dfrac{6\,912}{5}\pi - \dfrac{1984}{3}\pi = \dfrac{10\,816}{15}\pi \text{ cm}^3$

Curiosidades matemáticas

Rectángulos áureos

El rectángulo que ves a continuación tiene la siguiente peculiaridad: si se le suprime un cuadrado de lado igual a su lado menor, se obtiene otro rectángulo semejante al inicial.



$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1}$$

- **Comprueba que la relación entre los lados, Φ, es:**

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow \text{(número de oro)}$$

Los rectángulos que tienen esta propiedad se denominan rectángulos áureos, y como sabes, los puedes encontrar en el carné de identidad, en las tarjetas de banda magnética y en numerosas obras de arte.

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \rightarrow \Phi^2 - \Phi = 1 \rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$