1 Números naturales

Página 13

1. Un ganadero compra 45 terneras a 475 €/cabeza y, durante el viaje, dos de ellas se accidentan, por lo que debe sacrificarlas. Seis meses después vende las restantes a 1 690 €/cabeza. Calculando que los gastos de mantenimiento y ceba han sido de 34 680 €, ¿qué ganancia ha obtenido por cada una de las terneras que compró?

En la compra de las terneras se gasta $45 \cdot 475 = 21\,375$ €.

Por la venta obtiene $43 \cdot 1\,690 = 72\,670$ €.

Sus beneficios totales son: $72\,670 - 21\,375 - 34\,680 = 16\,615$ €

Por cada ternera obtuvo una ganancia de $16\,615 : 45 = 369{,}22$ €.

2. En el obrador de la bollería, sacan del horno 7 bandejas de magdalenas con 65 piezas en cada una. Después las envasan en bolsas de 8 unidades y las venden a 2 € la bolsa.

¿Qué recaudación se obtiene en caja, teniendo en cuenta que durante el proceso de manipulación se malograron 13 piezas?

Del horno sacan $7 \cdot 65 = 455$ piezas, de las que quedan $455 - 13 = 442$

Las envasan $(442 : 8 = 55{,}25)$, obteniendo 55 bolsas.

Por la venta recaudan $55 \cdot 2 = 110$ €.

3. En la confitería han fabricado una partida de bombones. Si los envasaran en cajas de 12, de 18 o de 20, sobrarían 5. Pero lo hacen en cajas de 25 y así no sobra ninguno.

¿Cuántos bombones han fabricado, sabiendo que no pasan de 1 000?

$12 = 2^2 \cdot 3$

$18 = 2 \cdot 3^2$

$20 = 2^2 \cdot 5$

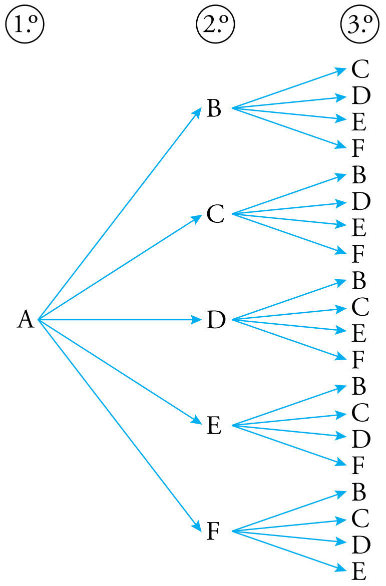
mín.c.m. $(12, 18, 20) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

Como al envasar los bombones en cajas de 12, 18 o 20 sobran 5, su número es múltiplo de $180 + 5 = 185$.

$185 \cdot 5 = 925$ y $185 \cdot 6 = 1\,110$

Han fabricado 925 bombones.

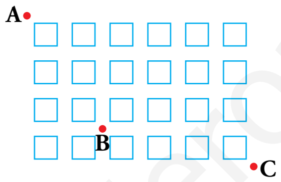
4. **¿De cuántas formas se pueden asignar 3 libros distintos a 6 estudiantes?**

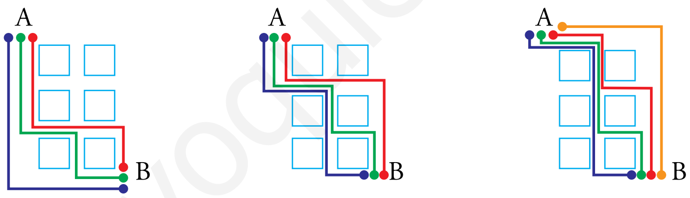


5 · 4 si el 1.º es para A. Lo mismo para los demás jugadores.

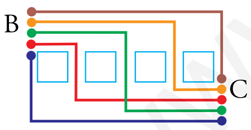
En total: 6 · 5 · 4 = 120 formas

5. **¿De cuántas formas podemos ir de A a B? ¿Y de B a C?**
¿Y de A a C pasando por B?





- Hay 10 formas para ir de A a B.



- Hay 5 formas para ir de B a C.
- Hay 10 · 5 = 50 formas para ir de A a C pasando por B.

6. ¿De cuántas formas podemos repartir 6 entradas entre 7 personas? ¿Y si fueran 8 los candidatos?

- Es más fácil pensar en quién se queda sin entrada:

  1 2 3 4 5 6 7 $\rightarrow$ Hay 7 formas.

- Si son 8:

  1-2 1-3 1-4 1-5 1-6 1-7 1-8
  2-3 2-4 2-5 2-6 2-7 2-8
  3-4 3-5 3-6 3-7 3-8
  4-5 4-6 4-7 4-8
  5-6 5-7 5-8
  6-7 6-8
  7-8

  Hay 28 formas.

7. Se organiza un torneo de pimpón entre seis jugadores. ¿Cuántas partidas han de disputar? Descríbelas.

	A	B	C	D	E	F
A	×	○	○	○	○	○
B		×	○	○	○	○
C			×	○	○	○
D				×	○	○
E					×	○
F						×

15 partidas si solo hay de ida:

AB, AC, AD, AE, AF
BC, BD, BE, BF
CD, CE, CF
DE, DF
EF

8. Cinco amigos organizan un torneo de ajedrez, en el que cada dos jugadores se enfrentan dos veces. ¿Cuántas partidas han de jugar? Descríbelas.

	A	B	C	D	E
A	×	○	○	○	○
B	○	×	○	○	○
C	○	○	×	○	○
D	○	○	○	×	○
E	○	○	○	○	×

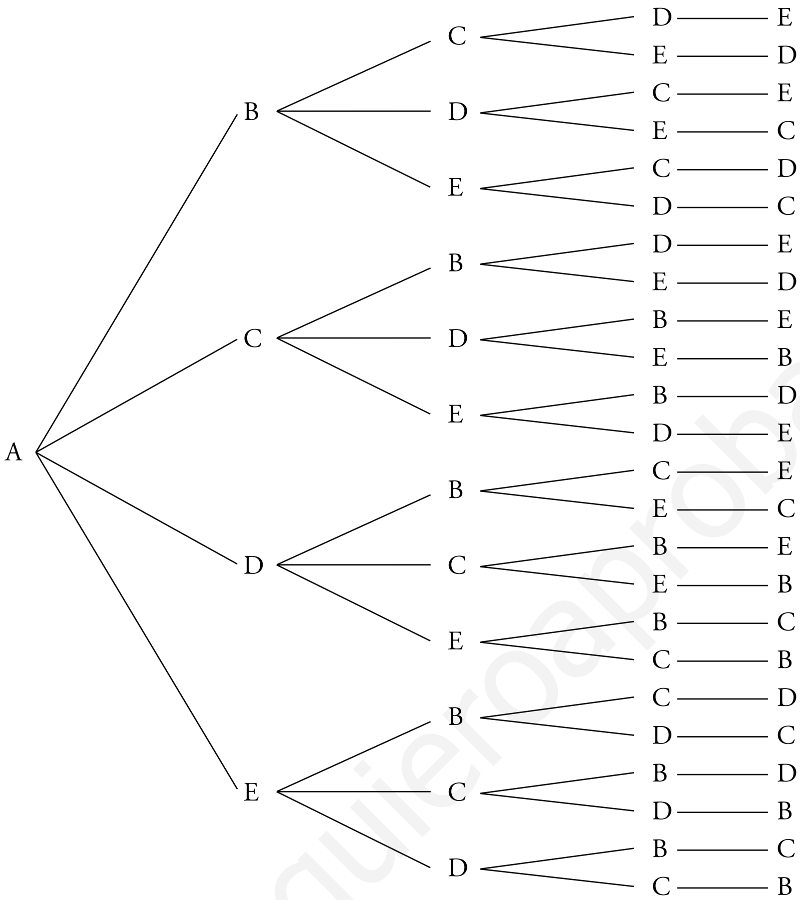
20 partidas:

AB AC AD AE
BA BC BD BE
CA CB CD CE
DA DB DC DE
EA EB EC ED

9. **¿De cuántas formas se pueden sentar cinco amigos en las cinco butacas contiguas de la fila de un cine? Descríbelas.**

Llamamos A, B, C, D y E a cada uno de los cinco amigos.

Si quien se sienta en la primera butaca es A, tenemos estas posibilidades:



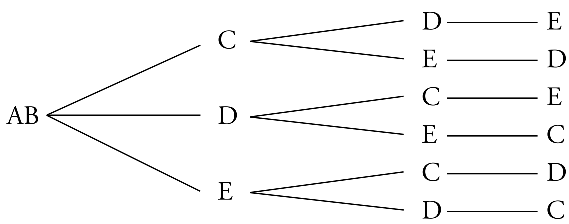
Es decir, $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ formas distintas de sentarse.

Otro tanto ocurriría si quien se sentase en la primera butaca fuese B, C, D o E.

En total hay $24 \cdot 5 = 120$ formas de sentarse.

10. **Repite el problema anterior con el condicionante de que dos de ellos son novios y se sentarán juntos.**

El que dos amigos se tengan que sentar juntos es equivalente a que haya 4 amigos. Por ejemplo, AB, C, D y E.



Si en las dos primeras butacas se sientan AB, hay $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ casos posibles.

En total habrá $6 \cdot 4 = 24$ formas de sentarse.

2 Números enteros

Página 14

1. Calcula:

a) $[(1 - 4) - (5 - 3) - (-6)] \cdot [-3 + (-7)]$

b) $|3 - 3 \cdot (-7) - |5 \cdot (-8)||$

a) $[(1 - 4) - (5 - 3) - (-6)] \cdot [-3 + (-7)] = [(-3) - (2)+6] \cdot [-3 - 7] =$

$= [-3 - 2 + 6] \cdot [-10] = [1] \cdot [-10] = -10$

b) $|3 - 3 \cdot (-7) - |5 \cdot (-8)|| = |3 + 21 - |-40|| = |24 - 40| = |-16| = 16$

2. Simplifica y calcula.

a) $5^3 \cdot 5^2 \cdot 2^5$

b) $[(-3)^{11} : (-3^3)^3] \cdot 5^2$

a) $5^3 \cdot 5^2 \cdot 2^5 = 5^{3+2} \cdot 2^5 = 5^5 \cdot 2^5 = 3\,125 + 32 = 3\,157$

b) $[(-3)^{11} : (-3^3)^3] \cdot 5^2 = [(-3)^{11} : (-3)^9] \cdot 5^2 = [(-3)^2] \cdot 5^2 = [(-3) \cdot 5]^2 = (-15)^2 = 225$

3. Opera las siguientes expresiones:

a) $[(1 - 7) - (8 - 3) - (-2)^5] \cdot (15 - 11)^2$

b) $(7 - 3) \cdot 12 + (5 - 1)^2 \cdot [6 - (-3)^4]$

c) $(-3)^2 - (-3^3) + 5^2 \cdot (-2)^2 - [2 - (-4)^2 \cdot (-7)]$

d) $17 - (-4) \cdot (-3 + 6) - 2[4 - 5(2 - 3)^7]^2$

e) $|26 - (-4) \cdot (-3)^2 \cdot (-3 + 2)^3| - |-2 + 7| \cdot (-4)^2$

a) $[(1 - 7) - (8 - 3) - (-2)^5] \cdot (15 - 11)^2 = [(-6) - (5) - (-32)] \cdot (-4)^2 = [-11 + 32] \cdot 16 =$

$= 21 \cdot 16 = 336$

b) $(7 - 3) \cdot 12 + (5 - 1)^2 \cdot [6 - (-3)^4] = 4 \cdot 12 + 4^2 \cdot [6 - 81] = 48 + 16 \cdot (-75) = 48 - 1\,200 =$

$= -1\,152$

c) $(-3)^2 - (-3^3) + 5^2 \cdot (-2)^2 - [2 - (-4)^2 \cdot (-7)] = 9 - (-27) + 25 \cdot 4 - [2 - 16 \cdot (-7)] =$

$= 36 + 100 - [2 + 112] = 136 - 114 = 22$

d) $17 - (-4) \cdot (-3 + 6) - 2[4 - 5(2 - 3)^7]^2 = 17 - (-12) - 2[4 - 5 \cdot (-1)]^2 = 29 - 2 \cdot 9^2 =$

$= -133$

e) $|26 - (-4) \cdot (-3)^2 \cdot (-3 + 2)^3| - |-2 + 7| \cdot (-4)^2 = |26 - (-4) \cdot 9 \cdot (-1)| - 5 \cdot 16 =$

$= |26 - 36| - 80 = 10 - 80 = -70$

Página 15

4. Para el problema de arriba, y suponiendo que el izado del batiscafo continúa a la misma velocidad, escribe una expresión con la que calcular el tiempo que tarda en subir, desde el punto donde realizó el trabajo, hasta el nivel de la plataforma.

$(|-14| + 30) : 2 = 44 : 2 = 22$ min

5. Di con qué edad murió cada uno de los siguientes personajes, cuyos años de nacimiento y muerte se dan:

a) Pitágoras (–582, –507)

b) Platón (–428, –347)

c) Al-Jwarizmi (780, 850)

d) Einstein (1879, 1955)

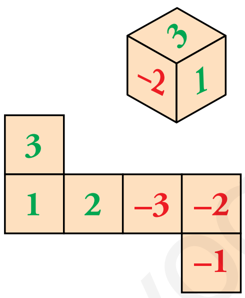
a) Pitágoras $\rightarrow$ $-507 - (-582) = 75$ años

b) Platón $\rightarrow$ $-347 - (-428) = 81$ años

c) Al-Jwarizmi $\rightarrow$ $850 - 780 = 70$ años

d) Einstein $\rightarrow$ $1\,955 - 1\,879 = 76$ años

6. Varios amigos inventan el siguiente juego con el dado que ves:



<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>1</td><td>|</td><td>|</td><td>||</td></tr>
<tr><td>2</td><td>|||</td><td></td><td>||</td></tr>
<tr><td>3</td><td>|</td><td>||||</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td>||</td><td>|</td><td>~~||||~~</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>||</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>|</td><td>|||</td><td></td></tr>
</table>

— Cada uno tira 10 veces y suma los puntos obtenidos.

— Por cada resultado que se repita tres veces, se duplica el total de puntos.

— Por cada resultado que se repita cuatro o más veces, el total se triplica.

La tabla recoge los resultados de una partida entre tres jugadores.

¿Cuántos puntos ha obtenido cada uno?

A $\rightarrow$ $1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 = 1 + 12 + 3 - 2 - 4 - 3 = 7$ puntos

B $\rightarrow$ $1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) \cdot 2 = 1 + 36 - 1 - 2 - 18 = 16$ puntos

C $\rightarrow$ $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 2 + 4 - 15 - 2 = -11$ puntos

3 Números racionales. Fracciones

Página 16

1. Expresa como suma de un entero y una fracción.

a) $\frac{40}{9}$ **b)** $\frac{86}{5}$ **c)** $\frac{127}{10}$

d) $\frac{127}{12}$ **e)** $-\frac{43}{8}$

a) $\frac{40}{9} = 4 + \frac{4}{9}$ b) $\frac{86}{5} = 17 + \frac{1}{5}$ c) $\frac{127}{10} = 12 + \frac{7}{10}$

d) $\frac{127}{12} = 10 + \frac{7}{12}$ e) $-\frac{43}{8} = -5 - \frac{3}{8}$

2. Obtén la fracción irreducible.

a) $\frac{18}{21}$ **b)** $\frac{14}{35}$ **c)** $\frac{42}{36}$

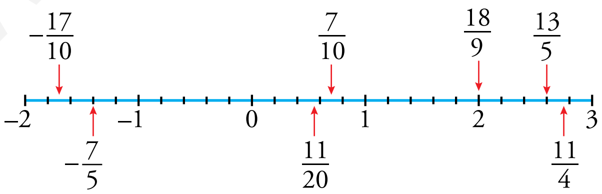
d) $\frac{14}{56}$ **e)** $\frac{75}{200}$

a) $\frac{18}{21} = \frac{6}{7}$ b) $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$ c) $\frac{42}{36} = \frac{7}{6}$

d) $\frac{14}{56} = \frac{1}{4}$ e) $\frac{75}{200} = \frac{3}{8}$

3. Copia la recta en tu cuaderno y representa, aproximadamente, las fracciones.

$$\frac{13}{5}, \frac{18}{9}, -\frac{7}{5}, \frac{11}{4}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, -\frac{17}{10}$$



$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$ $-\frac{7}{5} = -1 - \frac{2}{5}$

$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$ $-\frac{17}{10} = -1 - \frac{7}{10}$

Página 17

4. Calcula.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b) $\frac{3}{4}+2-\frac{13}{10}$

c) $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$

d) $\frac{7}{3}-\left(\frac{2}{6}+\frac{5}{9}\right)$

e) $\frac{5}{2}-\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]$

f) $\frac{1}{3}-\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{5}-1\right)-\frac{1}{20}\right]$

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

b) $\frac{3}{4}+2-\frac{13}{10}=\frac{15}{20}+\frac{40}{20}-\frac{26}{20}=\frac{29}{20}$

c) $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1-\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{3}{6}=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{3}-\left(\frac{2}{6}+\frac{5}{9}\right)=\frac{7}{3}-\left(\frac{6}{18}+\frac{10}{18}\right)=\frac{7}{3}-\frac{16}{18}=\frac{42}{18}-\frac{16}{18}=\frac{26}{18}=\frac{13}{9}$

e) $\frac{5}{2}-\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{5}{2}-\left[1-\left(\frac{8}{12}-\frac{3}{12}\right)\right]=\frac{5}{2}-\left[1-\frac{5}{12}\right]=$

$=\frac{5}{2}-\left[\frac{12}{12}-\frac{5}{12}\right]=\frac{5}{2}-\frac{7}{12}=\frac{30}{12}-\frac{7}{12}=\frac{23}{12}$

f) $\frac{1}{3}-\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{5}-1\right)-\frac{1}{20}\right]=\frac{1}{3}-\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{5}\right)-\frac{1}{20}\right]=$

$=\frac{1}{3}-\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}\right]=\frac{1}{3}-\left[\frac{15}{20}-\frac{4}{20}-\frac{1}{20}\right]=$

$=\frac{1}{3}-\frac{10}{20}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{1}{6}$

5. Reduce a una única fracción.

a) $\left(\frac{12}{11}:3\right):\frac{16}{33}$

b) $\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{13}{14}\right)\cdot\frac{21}{26}$

c) $\frac{11}{39}:\left(\frac{3}{13}\cdot\frac{22}{9}\right)$

d) $\left(\frac{7}{10}:\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}$

a) $\left(\frac{12}{11}:3\right):\frac{16}{33}=\frac{12}{33}:\frac{16}{33}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

b) $\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{13}{14}\right)\cdot\frac{21}{26}=\frac{65}{42}\cdot\frac{21}{26}=\frac{65}{2}\cdot\frac{1}{26}=\frac{65}{52}$

c) $\frac{11}{39}:\left(\frac{3}{13}\cdot\frac{22}{9}\right)=\frac{11}{39}:\left(\frac{3\cdot 22}{13\cdot 9}\right)=\frac{11\cdot 13\cdot 9}{39\cdot 3\cdot 22}=\frac{9}{3\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{7}{10}:\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{10}:\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}=\frac{7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 7}=\frac{3}{2\cdot 9}=\frac{1}{6}$

6. Calcula.

a) $\frac{1}{5}$ **de 275** **b)** $\frac{3}{7}$ **de 581** **c)** $\frac{11}{20}$ **de 580**

a) $\frac{1}{5}$ de $275 = \frac{275}{5} = 55$ b) $\frac{3}{7}$ de $581 = \frac{3 \cdot 581}{7} = 249$ c) $\frac{11}{20}$ de $580 = \frac{11 \cdot 580}{20} = 319$

7. Halla la fracción resultante.

a) $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **de** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{5}{9}$ **de** $\frac{3}{5}$

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

8. Calcula.

a) $1 + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)$ **b)** $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{12} \cdot \left[\frac{1}{7} - (-2) \cdot \frac{1}{10}\right]$ **d)** $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) + (-2) \cdot \left[\frac{5}{6} - \left(2 - \frac{5}{7}\right)\right]$

e) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{10}\right) : \left(1 - \frac{7}{15}\right)$ **f)** $\left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} - 1\right)\right] : \left[5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)\right]$

a) $1 + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{4}{20} + \frac{5}{20}\right) = 1 + \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{20} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = 1 - \left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) : \frac{3}{2} = 1 - \left(\frac{7}{12}\right) : \frac{3}{2} =$

$= 1 - \frac{14}{36} = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$

c) $\frac{5}{12} \cdot \left[\frac{1}{7} - (-2) \cdot \frac{1}{10}\right] = \frac{5}{12} \cdot \left[\frac{1}{7} + \frac{2}{10}\right] = \frac{5}{12} \cdot \left[\frac{1}{7} + \frac{1}{5}\right] =$

$= \frac{5}{12} \cdot \left[\frac{5}{35} + \frac{7}{35}\right] = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

d) $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) + (-2) \cdot \left[\frac{5}{6} - \left(2 - \frac{5}{7}\right)\right] = \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{9}\right) + (-2) \cdot \left[\frac{5}{6} - \left(\frac{14}{7} - \frac{5}{7}\right)\right] =$

$= 0 - 2 \cdot \left[\frac{5}{6} - \frac{9}{7}\right] = -2 \cdot \left[\frac{35}{42} - \frac{54}{42}\right] = -2 \cdot \left(\frac{-19}{42}\right) = \frac{19}{21}$

e) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{10}\right) : \left(1 - \frac{7}{15}\right) = \left(\frac{24}{30} - \frac{20}{30} - \frac{3}{30}\right) : \left(\frac{15}{15} - \frac{7}{15}\right) = \frac{1}{30} : \frac{8}{15} =$

$= \frac{15}{30 \cdot 8} = \frac{1}{16}$

f) $\left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} - 1\right)\right] : \left[5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)\right] = \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{7}{7}\right)\right] : \left[5 \cdot \left(\frac{5}{10} - \frac{4}{10}\right)\right] =$

$= \left[\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right)\right] : \left[5 \cdot \frac{1}{10}\right] = -\frac{1}{7} : \frac{1}{2} = -\frac{2}{7}$

Página 19

9. Un terreno se divide en tres partes. Dos de ellas son 2/5 y 1/3 del total. ¿Cuál es la más grande?

1.ª parte → $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ 2.ª parte → $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ 3.ª parte → $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$

La más grande es la primera, $\frac{2}{5}$

10. En el problema anterior, la menor de las partes mide 240 m². ¿Cuál es la superficie total del terreno?

La menor de las partes es $\frac{4}{15}$ de 240 m^2 = $\frac{240 \cdot 4}{15} = 64$ m^2.

La superficie total es $(240 : 4) \cdot 15 = 900$ m^2.

11. Los 2/5 de los chicos de una clase llevan gafas. En la lista de esa clase hay 36 personas, de las que 7/12 son chicas. ¿Cuántos chicos llevan gafas?

$1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ son chicos.

$36 \cdot \frac{5}{12} = 15$ son chicos.

$15 \cdot \frac{2}{5} = 6$ chicos llevan gafas.

12. Jorge se ha gastado 2/7 de la paga en música y 1/5 en libros. ¿Qué fracción de la paga se ha gastado? ¿Qué fracción le queda?

Ha gastado $\frac{2}{7} + \frac{1}{5} = \frac{10}{35} + \frac{7}{35} = \frac{17}{35}$ en música y libros.

La fracción que le queda es $1 - \frac{17}{35} = \frac{35-17}{35} = \frac{18}{35}$.

13. En una frutería se venden, por la mañana, 3/5 de la fruta que había y, por la tarde, la mitad de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción queda por vender?

b) Si al empezar el día había 750 kg, ¿cuántos kilos se vendieron?

a) MAÑANA: Se venden $\frac{3}{5}$ del total. Quedan $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ del total.

TARDE: Se vende $\frac{1}{2}$ de lo que queda → $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ del total.

Se han vendido $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ del total. Queda sin vender $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

b) En total se vendieron $\frac{4}{5}$ de 750 kg = $\frac{4 \cdot 750}{5} = 600$ kg de fruta.

14. **De un sueldo de 1 500 €, se gasta en comida la sexta parte, y en el pago de la hipoteca, 350 € más que en comida. ¿Qué fracción del sueldo queda para otros gastos?**

En comida se gasta $\frac{1}{6}$ de 1 500 = 250 €.

En el pago de la hipoteca se gasta 250 + 350 = 600 €.

En total, se gasta 250 + 600 = 850 €.

Para otros gastos quedan 1 500 – 850 = 650 €.

La fracción que corresponde a esa cantidad es $\frac{650}{1500} = \frac{13}{50}$.

15. **Al cerrar su puesto del mercadillo, el melonero piensa:**

"Hoy he vendido bastantes melones. Solo me han quedado once, que son la décima parte de los vendidos".

¿Cuántos melones tenía cuando abrió el puesto?

$\frac{1}{10}$ de $x = 11 \rightarrow x = 110$. Ha vendido 110 melones.

Abrió el puesto con 110 + 11 = 121 melones.

16. **El presupuesto anual de una oficina es 297 000 €. Los gastos fijos suponen la quinta parte y los 2/11 del resto se invierten en equipamiento. ¿Cuánto queda para otros gastos?**

Fracción de gastos fijos más equipamiento $\rightarrow \frac{1}{5} + \frac{2}{11} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{55} = \frac{11+8}{55} = \frac{19}{55}$

Otros gastos $\rightarrow 1 - \frac{19}{55} = \frac{55-19}{55} = \frac{36}{55}$

Fracción de otros gastos $\rightarrow 1 - \frac{19}{55} = \frac{55-19}{55} = \frac{36}{55}$

Otros gastos $\rightarrow \frac{36}{55}$ de 297 000 = 194 400 €

17. **Un club dispone de 1 200 entradas para un partido. Asigna 3/5 partes a su hinchada y 5/8 del resto a la visitante. ¿Cuántas entradas quedan para venta libre?**

A su hinchada asigna $\frac{3}{5}$ de 1 200 = 720 entradas.

Quedarán 1 200 – 720 = 480 entradas, y $\frac{5}{8}$ de 480 = 300 entradas asigna a la visitante.

Para la venta libre quedarán 480 – 300 = 180 entradas.

18. **Un dentista dedica 1 h y 3/4 a su consulta. Si recibe a 15 pacientes, ¿qué fracción de hora puede dedicar a cada uno? ¿Cuántos minutos son?**

$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ h dedica a la consulta.

$\frac{7}{4} : 15 = \frac{7}{60}$ h dedica a cada paciente.

$\frac{7}{60} \cdot 60 = 7 \rightarrow$ Dedica 7 minutos a cada paciente.

19. Reparto entre cuatro: A y B se llevan, respectivamente, 2/7 y 13/21 del total. C recibe 7/10 del resto. Y D, finalmente, 390 €. ¿Cuánto dinero se repartió?

Entre A y B: $\frac{2}{7} + \frac{13}{21} = \frac{19}{21}$. Quedan $\frac{2}{21}$.

C $\to$ $\frac{7}{10}$ de $\frac{2}{21} = \frac{1}{15}$. Quedan $\frac{2}{21} - \frac{1}{15} = \frac{1}{35}$.

D se lleva $\frac{1}{35}$ del total, que son 390 €. En total se repartieron $35 \cdot 390 = 13\,650$ €.

20. Un corredor ciclista abandona la carrera cuando lleva cubiertos los 2/3 del recorrido. Si hubiera aguantado 10 kilómetros más, habría cubierto las tres cuartas partes. ¿Cuántos kilómetros hicieron los que llegaron a la meta?

Los 10 km suponen $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$ del recorrido total.

Por tanto, $\frac{1}{12}$ de $x = 10 \to x = 120$ km hicieron los corredores que llegaron a la meta.

Este problema también se puede hacer de forma muy sencilla planteando la siguiente ecuación:

$$\frac{2x}{3} + 10 = \frac{3x}{4} \to x = 120 \text{ km}$$

21. Seis amigos compran solidariamente un regalo para el séptimo miembro de la pandilla. A la hora de pagar, uno no tiene dinero y, así, cada uno de los demás debe poner 1,50 euros más. ¿Cuánto costaba el regalo?

Llamamos x a lo que cada uno tenía que poner al principio.

$6x = 5 \cdot (x + 1{,}50) \to 6x = 5x + 7{,}50 \to x = 7{,}50$

El regalo costaba $6 \cdot 7{,}50 = 45$ €.

4 Potencias de exponente entero

Página 20

1. Ordena de menor a mayor.

$$2^{-3},\ 2^{-1},\ 2^{0},\ 2^{-2},\ 2^{-4},\ (-2)^{-3},\ (-2)^{-1}$$

$(-2)^{-1} < (-2)^{-3} < 2^{-4} < 2^{-3} < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^{0}$

2. Calcula el valor de estas potencias:

a) 5^{-1} b) 2^{-3} c) $(-6)^{0}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ f) $\frac{1}{4^{-2}}$

g) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$ h) $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2}\right]^{-1}$ i) $0{,}2^{-4}$

a) $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

b) $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

c) $(-6)^{0} = 1$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2^{-2}} = 2^{2} = 4$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

f) $\frac{1}{4^{-2}} = 4^{2} = 16$

g) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$

h) $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2}\right]^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

i) $0{,}2^{-4} = \left(\frac{1}{0,2}\right)^{4} = \left(\frac{1}{2/10}\right)^{4} = 5^{4} = 625$

3. Expresa como una potencia de base 3.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (3^{-2})^{5} \cdot 3^{7}$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (3^{-2})^{5} \cdot 3^{7} = 3^{1} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{3} \cdot 3^{-10} \cdot 3^{7} = 3^{-1}$

4. Expresa como potencias de base 2.

a) 4^{-2} b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ c) $\frac{4^{-1} \cdot 8^{-1}}{(2^{-3})^{-3}}$

a) $4^{-2} = (2^{2})^{-2} = 2^{-4}$

b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2^{3}}\right)^{-2} = (2^{-3})^{-2} = 2^{6}$

c) $\frac{4^{-1} \cdot 8^{-1}}{(2^{-3})^{-3}} = \frac{1}{2^{2} \cdot 2^{3} \cdot 2^{9}} = 2^{-14}$

5. **Reduce y expresa como una potencia.**

a) $\dfrac{(-7)^4}{7^{-2}}$

b) $\dfrac{1}{5^2 : 5^4}$

c) $\dfrac{6^4 \cdot 2^{-2}}{2^2 \cdot 3^{-1}}$

d) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^2$

e) $\left(\dfrac{1}{5^3}\right)^2 \cdot (5^3)^{-2}$

f) $\dfrac{3^{-4}}{9^{-3}}$

g) $\dfrac{5^2 \cdot 10^{-2}}{2^2}$

h) $\dfrac{12^2 \cdot 5^{-5}}{15^2 \cdot 8^{-1}}$

i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-7} \cdot \left(\dfrac{9}{10^4}\right)^2 \cdot \dfrac{3^{-7} \cdot 2^{-2}}{(5^{-3})^{-3}}$

a) $\dfrac{(-7)^4}{7^{-2}} = 7^4 \cdot 7^2 = 7^6$

b) $\dfrac{1}{5^2 : 5^4} = \dfrac{1}{5^{-2}} = 5^2$

c) $\dfrac{6^4 \cdot 2^{-2}}{2^2 \cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3}{2^2 \cdot 2^2} = 3^5$

d) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^2 = (2^3)^2 \cdot (2^3)^2 = 2^{12}$

e) $\left(\dfrac{1}{5^3}\right)^2 \cdot (5^3)^{-2} = 5^{-6} \cdot 5^{-6} = 5^{-12}$

f) $\dfrac{3^{-4}}{9^{-3}} = \dfrac{3^{-4}}{(3^2)^{-3}} = \dfrac{3^{-4}}{3^{-6}} = 3^{-4} \cdot 3^6 = 3^2$

g) $\dfrac{5^2 \cdot 10^{-2}}{2^2} = \dfrac{5^2 \cdot 2^{-2} \cdot 5^{-2}}{2^2} = 2^{-4}$

h) $\dfrac{12^2 \cdot 5^{-5}}{15^2 \cdot 8^{-1}} = \dfrac{3^2 \cdot 2^4 \cdot 2^3}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 5^5} = \dfrac{3^2 \cdot 2^7}{3^2 \cdot 5^7} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^7$

i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-7} \cdot \left(\dfrac{9}{10^4}\right)^2 \cdot \dfrac{3^{-7} \cdot 2^{-2}}{(5^{-3})^{-3}} = \dfrac{5^7}{3^7} \cdot \dfrac{3^4}{2^8 \cdot 5^8} \cdot \dfrac{1}{5^9 \cdot 3^7 \cdot 2^2} = \dfrac{5^7 \cdot 3^4}{3^{14} \cdot 2^{10} \cdot 5^{17}} =$

$= \dfrac{1}{3^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}} = \left(\dfrac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5}\right)^{10} = \left(\dfrac{1}{30}\right)^{10}$

Ejercicios y problemas

Página 21

Practica

Números enteros

1. **Calcula.**

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)]$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1)$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)]$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)]$

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)] = 5 - 3 + 2 + 4 - 6 - 3 + 6 - 4 = 17 - 16 = 1$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1) = (-2) \cdot (-7) \cdot (-1) = -14$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)] = 5 \cdot (8 - 5) - (-4) \cdot (6 - 9) = 15 - 12 = 3$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)] = (-7) \cdot [4 \cdot (-5) - 5 \cdot 3] = (-7) \cdot (-35) = 245$

2. **Elimina paréntesis y simplifica.**

a) $\dfrac{[(-5)^3]^2}{(-5)^6}$

b) $\dfrac{9^2}{(-3)^4}$

c) $[(-3)^5 : (-3)^3]^2$

d) $[2^4 \cdot (-2)^2] : (-4)^3$

a) $\dfrac{(-5)^6}{(-5)^6} = 1$

b) $[(-3)^2]^2 = (-3)^4 = 81$

c) $\dfrac{(3^2)^2}{(-3)^4} = \dfrac{3^4}{3^4} = 1$

d) $\dfrac{2^4 \cdot 2^2}{-4^3} = \dfrac{2^6}{-(2^2)^3} = \dfrac{2^6}{-2^6} = -1$

3. **Calcula.**

a) $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt{64}$

c) $\sqrt[5]{100\,000}$

d) $\sqrt[3]{-27\,000}$

e) $\sqrt{484}$

f) $\sqrt[4]{81}$

a) $\sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

c) $\sqrt[5]{10^5} = 10$

d) $\sqrt[3]{(-30)^3} = -30$

e) $\sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 11 = 22$

f) $\sqrt[4]{3^4} = 3$

Fracciones

4. **Calcula mentalmente.**

a) **Los dos quintos de 400.**

b) **El número cuyos dos quintos son 160.**

c) **Los tres séptimos de 140.**

d) **El número cuyos cinco sextos son 25.**

a) $\frac{2}{5}$ de $400 = 2 \cdot 80 = 160$

b) $\frac{2}{5}$ de $\boxed{} = 160 \rightarrow$ el número es 400

c) $\frac{3}{7}$ de $140 = 3 \cdot 20 = 60$

d) $\frac{5}{6}$ de $\boxed{} = 25 \rightarrow$ el número es 30

5. **Reduce a una sola fracción.**

a) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right)$

b) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

c) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right]$

a) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right) = \left(\frac{12}{20} - \frac{5}{20} + \frac{40}{20}\right) - \left(\frac{15}{20} - \frac{8}{20} + \frac{20}{20}\right) = \frac{47}{20} - \frac{27}{20} = 1$

b) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

c) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] = \left(\frac{9}{15} + \frac{5}{15}\right) - \left[1 - \left(\frac{3-2}{4}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] =$

$= \frac{14}{15} - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right) = \frac{14}{15} - 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{20} = \frac{56}{60} - \frac{60}{60} + \frac{15}{60} - \frac{40}{60} + \frac{9}{60} = \frac{-1}{3}$

6. **Calcula.**

a) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{-6}$

b) $\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) : \left(3 + \frac{1}{7}\right)$

c) $\dfrac{\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{3}{14}}$

d) $\dfrac{\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)}{\frac{5}{3} : \frac{7}{6}}$

a) $\frac{3 \cdot 8 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 6} = \frac{5}{9}$

b) $\left(\frac{8}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8}\right) : \left(\frac{21}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{11}{8} : \frac{22}{7} = \frac{11 \cdot 7}{22 \cdot 8} = \frac{7}{16}$

c) $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{14}} = \dfrac{\frac{6}{8} - \frac{4}{8} - \frac{1}{8}}{\frac{7}{14} - \frac{3}{14}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{14}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{16}$

d) $\dfrac{-\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3}}{\frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 3}} = \dfrac{\frac{-5}{2}}{\frac{10}{7}} = \frac{-5 \cdot 7}{2 \cdot 10} = \frac{-7}{4}$

Potencias de exponente entero

7. **Calcula.**

a) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ **b)** $-\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$ **c)** $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **e)** $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ **f)** $-\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

a) $\frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

b) $-\frac{7}{3}$

c) $(-6)^2 = 36$

d) $2^3 = 8$

e) $\frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$

f) $-(4)^3 = -64$

8. **Expresa como potencias de base 10.**

a) **Cien millones.**

b) **Diez billones.**

c) **Una milésima.**

d) **Cien mil millones.**

e) **Una millonésima.**

f) **Cien milésimas.**

g) **Diez mil billones.**

h) **Mil centésimas.**

a) $100 \cdot 1\,000\,000 = 10^2 \cdot 10^6 = 10^8$

b) $10 \cdot 10^{12} = 10^{13}$

c) $0{,}001 = 10^{-3}$

d) $100\,000 \cdot 1\,000\,000 = 10^5 \cdot 10^6 = 10^{11}$

e) $0{,}000001 = 10^{-6}$

f) $100 \cdot 0{,}001 = 10^2 \cdot 10^{-3} = 10^{-1}$

g) $10\,000 \cdot 10^{12} = 10^4 \cdot 10^{12} = 10^{16}$

h) $1\,000 \cdot 0{,}01 = 10^3 \cdot 10^{-2} = 10$

9. **Calcula.**

a) $-3 \cdot (4-2)^{-2} + 10 \cdot (5)^{-1}$

b) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (2-5)$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{4}\right)^2$

e) $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

f) $\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - 4\right)^{-1}$

a) $-3 \cdot (4-2)^{-2} + 10 \cdot (5)^{-1} = -3 \cdot (2)^{-2} + 10 \cdot (5)^{-1} = \frac{-3}{2^2} + \frac{10}{5} = \frac{-15}{20} + \frac{40}{20} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$

b) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (2-5) = \frac{2}{5} \cdot 5 + \frac{2^2}{3^2} \cdot (-3) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{2^2}{5^2} \cdot \frac{3^3}{2^3} = -\frac{3^2}{5 \cdot 2} = -\frac{9}{10}$

d) $\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{6}{4} - \frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9-10}{8}\right)^2 = \left(\frac{-1}{4}\right)^3 : \left(\frac{-1}{8}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^6 = -1$

e) $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{6}{4} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{9} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4 =$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 = \frac{-4^2 \cdot 9}{3 \cdot 4} + 4 = -12 + 4 = -8$

f) $\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - 4\right)^{-1} = \left(\frac{3}{12} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{10}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{4}\right)^{-1} =$

$= \frac{-4}{12} + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{15}{4}\right)^{-1} = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{-4}{15}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

10. **Reduce como en el ejemplo.**

- $\dfrac{64^2 \cdot 4^3 \cdot 2}{16 \cdot (-8)^2} = \dfrac{(2^6)^2 \cdot (2)^3 \cdot 2}{2^4 \cdot [(-2)^3]^2} = \dfrac{2^{12} \cdot 2^6 \cdot 2}{2^4 \cdot 2^6} = \dfrac{2^{19}}{2^{15}} = 2^9$

a) $\dfrac{(-2)^3 \cdot 4^2}{32}$ **b)** $\dfrac{125}{25^2 \cdot (-5)^2}$ **c)** $\dfrac{3^2 \cdot 9^4}{(3^5)^2}$

a) $\dfrac{-2^3 \cdot (2^2)^2}{2^5} = \dfrac{-2^3 \cdot 2^4}{2^5} = \dfrac{-2^7}{2^5} = -2^2 = -4$

b) $\dfrac{5^3}{(5^2)^2 \cdot (-5)^2} = \dfrac{5^3}{5^4 \cdot 5^2} = \dfrac{5^3}{5^6} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

c) $\dfrac{3^2 \cdot (3^2)^4}{3^{10}} = \dfrac{3^2 \cdot 3^8}{3^{10}} = \dfrac{3^{10}}{3^{10}} = 1$

Aplica lo aprendido

11. **La temperatura de un congelador baja 2 °C cada 3 minutos hasta llegar a –18 °C. ¿Cuánto tardará en llegar a –12 °C si cuando lo encendemos la temperatura es de 16 °C?**

La diferencia de temperatura entre 16 °C y –12 °C es de 16 + 12 = 28 °C.

Cada 3 minutos, la temperatura baja 2 °C. En bajar 28 °C tardará:

$\dfrac{28}{2} \cdot 3$ minutos $= 14 \cdot 3 = 42$ minutos

12. **Aristóteles murió en el año 322 a. C. y vivió 62 años. ¿En qué año nació?**

(Año en que murió) – (Año en que nació) = N.º de años vividos

(322 a.C.) – (Año en que nació) = 62 → (–322) – (Año en que nació) = 62

–322 – 62 = Año en que nació → –384 = Año en que nació

Aristóteles nació en el año 384 a.C.

Página 22

13. Con una barrica que contiene 510 litros de vino, ¿cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar? ¿Cuántas de litro y medio?

$510 : \frac{3}{4} = \frac{510 \cdot 4}{3} = 680 \rightarrow$ Se pueden llenar 680 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro.

1 litro y medio $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$510 : \frac{3}{2} = \frac{510 \cdot 2}{3} = 340 \rightarrow$ Se pueden llenar 340 botellas de litro y medio.

Este último caso también se puede resolver observando que 1 botella de litro y medio equivale a 2 botellas de 3/4 de litro. Por tanto, el número de botellas de litro y medio que se pueden llenar será la mitad del número de botellas de 3/4 de litro: $\frac{680}{2} = 340$.

14. Ana se gasta 2/3 del dinero en ropa y 1/4 del total en comida.

a) ¿Cuál es la fracción gastada?

b) ¿Qué fracción le queda por gastar?

c) Si salió de casa con 180 €, ¿qué cantidad no se ha gastado?

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$

b) $1 - \frac{11}{12} = \frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{12}$ de 180 € $= \frac{180}{12} = 15$ € es la cantidad que no se ha gastado.

15. En cierta parcela se cultivan 4/5 partes de trigo y el resto, 100 m², de maíz. ¿Cuál es la superficie de la parcela?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trigo} \rightarrow \frac{4}{5} \text{ partes} \rightarrow \text{sobra } \frac{1}{5} \\ \text{Maíz} \rightarrow \frac{1}{5} \text{ parte que equivale a } 100 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \text{Superficie de la parcela} = 100 \cdot 5 = 500 \text{ m}^2$$

16. Con una garrafa de 5/2 de litro se llenan 25 vasos. ¿Qué fracción de litro entra en un vaso?

$\frac{5}{2}$ de litro : 25 vasos $= \frac{5}{2} : 25 = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

En 1 vaso entra $\frac{1}{10}$ de litro.

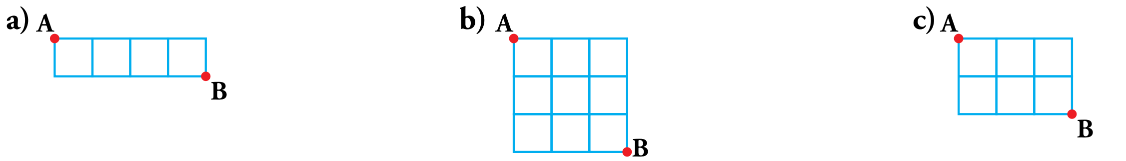
17. De una botella de 3/4 de litro se ha consumido la quinta parte. ¿Qué fracción de litro queda?

Si se ha consumido la quinta parte, quedan sin consumir $\frac{4}{5}$ de la botella:

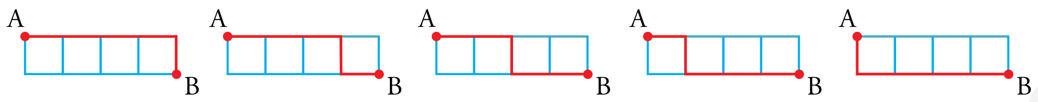
$\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de litro $= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ de litro quedan sin consumir.

Técnicas de conteo

18. **En cada caso, ¿cuántos caminos distintos hay para llegar de A a B, sin retroceder nunca?**

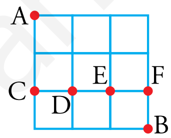


a)



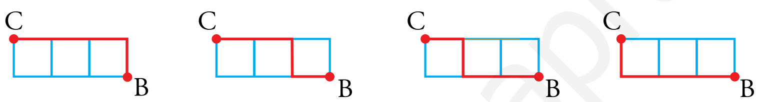
Hay 5 formas de ir de A a B.

b) Para calcular las diferentes posibilidades, organizamos el problema de la siguiente manera:



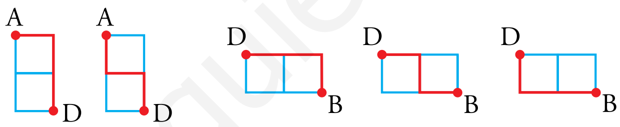
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por C:

  De A a C hay 1 camino y de C a B, 4 caminos $\rightarrow$ $1 \cdot 4 = 4$ formas.



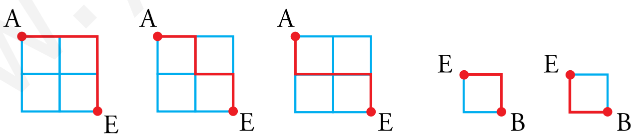
- Calculamos los caminos que hay de A a B, pasando por D y sin pasar por C:

  De A a D hay 2 caminos, y de D a B, otros 3 $\rightarrow$ $2 \cdot 3 = 6$ formas.



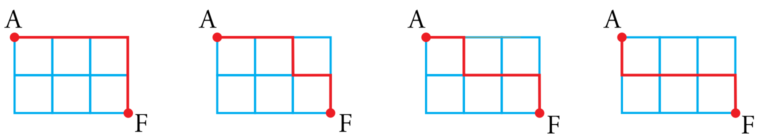
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por E pero no por C ni D:

  De A a E hay 3 caminos, y de E a B, otros 2 $\rightarrow$ $3 \cdot 2 = 6$ formas.



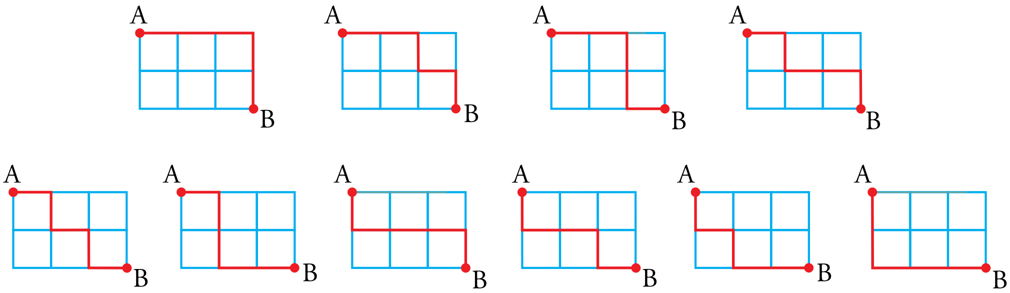
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por F y sin pasar por C, D y E:

  De A a F hay 4 caminos, y de F a B, uno $\rightarrow$ $4 \cdot 1 = 4$ formas.



- Por tanto, el número total de caminos de A a B es: $4 + 6 + 6 + 4 = 20$

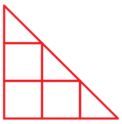
c)



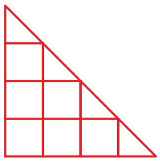
Hay 10 caminos distintos.

19. **¿Cuántos triángulos rectángulos ves en cada una de estas figuras?**

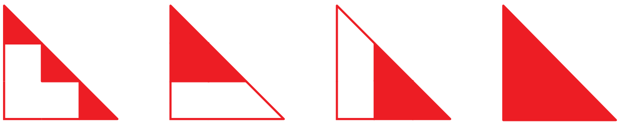
a)



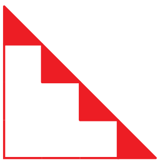
b)



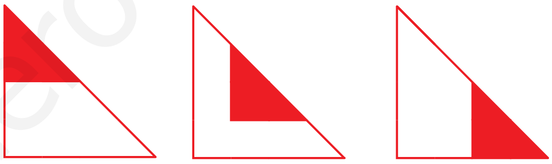
a) 3 pequeños, 2 medianos y 1 grande. En total, 6 triángulos rectángulos.



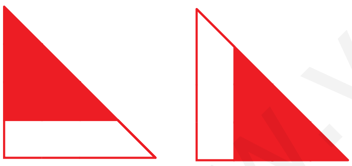
b) 4 triángulos pequeños:



3triángulos cuyos catetos miden 2:



2 triángulos cuyos catetos miden 3:



1 triángulo grande:

En total, 4 + 3 + 2 + 1 = 10 triángulos rectángulos.

20. **Una manifestación ocupa una superficie de 3 600 m^2. Si en un metro cuadrado caben 3 personas, ¿cuántas personas han acudido a la manifestación?**

Si en 1 m^2 caben 3 personas, en 3 600 m^2 cabrán 3 600 · 3 = 10 800 personas.

21. **Marta tiene 4 pantalones y 5 camisas. ¿De cuántas formas se puede vestir? ¿Y si además tiene 3 pares de zapatos?**

Por cada pantalón que elija, tiene 5 camisas para ponerse; como tiene 4 pantalones, en total tiene 4 · 5 = 20 formas diferentes de vestirse.

Por cada una de las 20 formas anteriores, puede elegir 3 pares de zapatos. En total tendrá 20 · 3 = 60 formas diferentes de vestirse.

22. **A la fase final de un campeonato de tenis llegan 4 jugadores. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón. ¿De cuántas formas se pueden repartir los premios? Descríbelas.**

Llamamos a los jugadores A, B, C y D.

Hacemos un diagrama en árbol:

CAMPEÓN	SUBCAMPEÓN	RESULTADO
A	B	A-B
	C	A-C
	D	A-D
B	A	B-A
	C	B-C
	D	B-D
C	A	C-A
	B	C-B
	D	C-D
D	A	D-A
	B	D-B
	C	D-C

En total hay $3 \cdot 4 = 12$ formas de repartir los premios.

23. **Seis amigos organizan un campeonato de pádel, jugando todos contra todos.**

a) ¿Cuántos partidos han de jugar?

b) ¿Cuántos partidos jugarían si el campeonato fuera a doble vuelta?

En cada caso, descríbelos usando una tabla.

a) Llamamos a los jugadores A, B, C, D, E y F.

Usamos la siguiente tabla para contar el número de partidos y describirlos:

	A	B	C	D	E	F
A	×	A · B	A · C	A · D	A · E	A · F
B	×	×	B · C	B · D	B · E	B · F
C	×	×	×	C · D	C · E	C · F
D	×	×	×	×	D · E	D · F
E	×	×	×	×	×	E · F
F	×	×	×	×	×	×

En la tabla se refleja que el campeonato no es a doble vuelta y que un jugador no juega contra sí mismo. Hay, por tanto, 15 partidos.

b) Jugarán el doble de partidos que en el apartado anterior, es decir:

$15 \cdot 2 = 30$ partidos.

Los describimos usando la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F
A	×	A · B	A · C	A · D	A · E	A · F
B	B · A	×	B · C	B · D	B · E	B · F
C	C · A	C · B	×	C · D	C · E	C · F
D	D · A	D · B	D · C	×	D · E	D · F
E	E · A	E · B	E · C	E · D	×	E · F
F	F · A	F · B	F · C	F · D	F · E	×

Resuelve problemas

24. Una pelota cae al suelo y se eleva cada vez a los 2/3 de la altura anterior. Tras botar tres veces, se ha elevado a 2 m. ¿Desde qué altura cayó?

La pelota se encuentra a x metros de altura. Tras el primer bote, se eleva $\frac{2}{3}x$, tras el segundo, $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x$, y tras el tercero, $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x$.

Es decir, $\frac{8}{27}x = 2 \rightarrow x = \frac{27 \cdot 2}{8} = 6{,}75$

La pelota cayó desde 6,75 metros de altura.

25. Un jardinero riega en un día 2/5 partes del jardín. ¿Cuántos días tardará en regar todo el jardín? ¿Cuánto ganará si cobra 50 € por día?

Si en 1 día riega 2/5 partes, en medio día riega 1/5 del jardín.

Todo el jardín lo regará en 5 medios días, es decir, en 2 días y medio.

En 1 día cobra 50 €, en 2 días y medio cobra: 50 · 2,5 = 125 €.

26. En un puesto de frutas y verduras, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden a frutas. De lo recaudado por fruta, los 3/8 corresponden a las naranjas. Si la venta de naranjas asciende a 89 €, ¿qué caja ha hecho el establecimiento?

Naranjas: $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{6} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$

$\frac{5}{16}$ equivale a 89 € $\rightarrow$ $\frac{1}{16}$ equivale a 17,80 €

Total recaudado: 17,80 · 16 = 284,80 €

27. A Pablo le descuentan al mes, del sueldo bruto, la octava parte de IRPF y la décima parte para la Seguridad Social. Si el sueldo neto es 1 302 €, ¿cuál es su sueldo bruto mensual?

$$\left.\begin{array}{l} \text{IRPF} \rightarrow \frac{1}{8} \\ \text{S. Social} \rightarrow \frac{1}{10} \end{array}\right\} \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{5}{40} + \frac{4}{40} = \frac{9}{40} \rightarrow \text{Cobra } 1 - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}.$$

$\frac{31}{40}$ del sueldo bruto = 1 302 $\rightarrow$ Sueldo bruto = $\frac{1302 \cdot 40}{31} = 1\,680$ €

28. De una clase, 3/7 del total de los estudiantes han ido al museo de ciencias y 2/5 a un concierto.

a) ¿Adónde han ido más estudiantes?

b) Si 6 estudiantes no han ido a ninguna actividad, ¿cuántos estudiantes hay en la clase?

a) Comparamos las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} = \frac{15}{35} \\ \frac{2}{5} = \frac{14}{35} \end{array}\right\} \frac{15}{35} > \frac{14}{35} \rightarrow \frac{3}{7} > \frac{2}{5}.$$ Han ido más estudiantes al museo de Ciencias.

b) Fracción de estudiantes que han ido a alguna actividad: $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}=\frac{15}{35}+\frac{14}{35}=\frac{29}{35}$

Fracción de estudiantes que no han ido a ninguna actividad: $1-\frac{29}{35}=\frac{35}{35}-\frac{29}{35}=\frac{6}{35}$

$\frac{6}{35}$ equivale a 6 estudiantes $\rightarrow$ $\frac{35}{35}$ equivaldrá a 35 estudiantes.

En la clase hay 35 estudiantes.

29. De un solar se venden los 2/3 de su superficie y después los 2/3 de lo que quedaba. El ayuntamiento expropia los 3 200 m^2 restantes para un parque público. ¿Cuál era la superficie del solar?

1.ª venta $\rightarrow$ $\frac{2}{3}$, queda por vender $\frac{1}{3}$ 2.ª venta $\rightarrow$ $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

Fracción que representa el solar vendido $=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$

Fracción que representa el solar sin vender, $\frac{9}{9}-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$, que equivale a 3 200 m^2.

La superficie del solar será $3\,200\cdot 9=28\,800$ m^2.

30. Un obrero ha tardado 1 hora y tres cuartos en acuchillar 3/5 partes de un piso. Si ha empezado a las 10 de la mañana, ¿a qué hora acabará?

1 hora y tres cuartos $=1+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ de hora

$\frac{3}{5}$ partes del piso tarda $\frac{7}{4}$ de hora $\rightarrow$ $\frac{1}{5}$ tardará $\frac{7}{4}:3=\frac{7}{12}$ de hora =

$=\frac{7}{12}$ de 60 minutos $=\frac{7\cdot 60}{12}=35$ minutos

En acuchillar todo el piso tardará $35\cdot 5=175$ minutos; es decir, 2 horas y 55 minutos.

Si ha empezado a las 10 de la mañana, acabará a la una menos cinco de la tarde (12 h 55 min) de acuchillar todo el piso.

31. Un tren tarda 3 horas y cuarto en recorrer 5/9 de un trayecto de 918 km.

a) Calcula el tiempo que tarda en realizar el trayecto si sigue a la misma velocidad.

b) ¿Cuál ha sido su velocidad media?

a) 3 horas y cuarto $=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$ de hora

En recorrer $\frac{5}{9}$ del trayecto tarda $\frac{13}{4}$ de hora $\rightarrow$ En recorrer $\frac{1}{9}$ tardará:

$\frac{13}{4}:5=\frac{13}{20}$ de hora $=\frac{13}{20}$ de 60 minutos $=\frac{13\cdot 60}{20}=39$ minutos

En realizar todo el trayecto tardará $9\cdot 39=351$ minutos; esto es, 5 horas y 51 minutos.

b) velocidad $=\frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$ 5 h y 51 minutos $=5\text{ h}+\frac{51}{60}\text{ h}=\frac{351}{60}\text{ h}$

velocidad $\frac{918\text{ km}}{351/60\text{ h}}=\frac{918\cdot 60}{351}\approx 156{,}92$ km/h

Página 23

32. Una tela para tapizar encoge, al lavarla, 3/20 a lo largo y 7/25 a lo ancho. ¿Cuántos metros se han de comprar de una pieza de 125 cm de ancho para cubrir una superficie de 39,9 m²?

$$\left.\begin{array}{l} \text{A lo largo encoge } \frac{3}{20} \to \text{ quedan } \frac{17}{20} \\ \text{A lo ancho encoge } \frac{7}{25} \to \text{ quedan } \frac{18}{25} \end{array}\right\} \text{En total, queda } \frac{17}{20} \cdot \frac{18}{25} = \frac{306}{500} = 0{,}612$$

Después de lavarla, queda 0,612 de la superficie inicial.

Hay que comprar 39,9 : 0,612 = 65,196 m² de superficie de tela.

Como el ancho es de 125 cm = 1,25 m, entonces:

Hay que comprar 65,196 : 1,25 = 52,16 m de largo de tela.

33. Ejercicio resuelto.

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

34. En una bolsa hay bolas rojas y negras, en total casi 250. Sabemos que dos terceras partes de las rojas equivalen a tres quintas partes de las negras. ¿Cuántas hay de cada color?

Llamamos R al número de bolas rojas, y N al de bolas negras.

$$\frac{2}{3}R = \frac{3}{5}N \to 10R = 9N \to \frac{N}{R} = \frac{10}{9}$$

Busquemos una fracción equivalente a $\frac{10}{9}$ de forma que la suma del numerador y del denominador es próxima a 250 y menor que 250 (10 + 9 = 19, y 250 : 19 = 13, …).

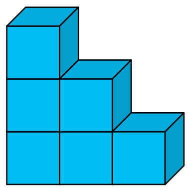
$$\frac{N}{R} = \frac{10}{9} = \frac{130}{117}$$

En la bolsa hay 130 bolas negras y 117 bolas rojas.

Comprobamos que se cumplen las condiciones del enunciado:

$130 + 117 = 247$ $\qquad \frac{2}{3} \cdot 117 = 78$ $\qquad \frac{3}{5} \cdot 130 = 78$

35. Para construir esta escalera de 3 peldaños se han necesitado 6 bloques.



a) ¿Cuántos bloques se necesitarían para montar una de 4 peldaños? ¿Y una de 5 peldaños?

b) ¿Cuántos bloques son necesarios para formar una de 15 peldaños?

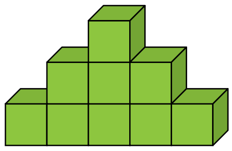
c) Generaliza para una escalera de *n* peldaños.

a) 3 peldaños → 6 bloques $\qquad$ 4 peldaños → 6 + 4 = 10 bloques

5 peldaños → 10 + 5 = 15 bloques

b) 15 peldaños → 15 + 6 + 7 + … + 15 = 120 bloques

c) n peldaños → $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$ bloques



36. **Esta escalera de 3 peldaños tiene 9 bloques. Calcula:**

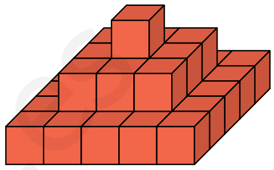
a) El número de bloques que se habrían necesitado para una de 4 peldaños.

b) Los peldaños que tendría una con 64 bloques.

a) 3 peldaños $\rightarrow$ 9 bloques $(9 = 3^2)$ 4 peldaños $\rightarrow$ $9 + 7 = 16$ bloques $(16 = 4^2)$

b) Para consumir 64 bloques se necesitan 8 peldaños:

Comprobación: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \dfrac{(15+1)\cdot 8}{2} = 64$



37. **Esta escalera de 3 peldaños está construida con 35 bloques. Calcula:**

a) Los bloques necesarios para una de 4 peldaños.

b) Los peldaños que tendría una con 286 bloques.

a) 3 peldaños $\rightarrow$ 35 bloques 4 peldaños $\rightarrow$ $35 + 7^2 = 84$ bloques

b) 5 peldaños $\rightarrow$ $84 + 9^2 = 165$ bloques 6 peldaños $\rightarrow$ $165 + 11^2 = 286$ bloques

Tendría 6 peldaños.

Curiosidades matemáticas

Relaciona

Reproduce esta espiral en un papel cuadriculado y anímate a hacerla un poco más grande.

¿Sabrías explicar qué relación tiene con la *sucesión de Fibonacci*?

Los radios de los sucesivos arcos que componen la espiral miden:

1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8…

Es decir, componen la sucesión de Fibonacci.

Cuenta larga

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & \dots & + & 997 & + & 999 & & \\ & - & 2 & - & 4 & - & 6 & - & \dots & - & 996 & - & 998 & & \\ \hline 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 & + & 1 & = & \dfrac{999+1}{2} = 500 \end{array}$$