1 Números naturales

Página 13

1. **Un ganadero compra 45 terneras a 475 €/cabeza y, durante el viaje, dos de ellas se accidentan, por lo que debe sacrificarlas. Seis meses después vende las restantes a 1 690 €/cabeza. Calculando que los gastos de mantenimiento y ceba han sido de 34 680 €, ¿qué ganancia ha obtenido por cada una de las terneras que compró?**

En la compra de las terneras se gasta $45 \cdot 475 = 21\,375$ €.

Por la venta obtiene $43 \cdot 1\,690 = 72\,670$ €.

Sus beneficios totales son: $72\,670 - 21\,375 - 34\,680 = 16\,615$ €

Por cada ternera obtuvo una ganancia de $16\,615 : 45 = 369{,}22$ €.

2. **En el obrador de la bollería, sacan del horno 7 bandejas de magdalenas con 65 piezas en cada una. Después las envasan en bolsas de 8 unidades y las venden a 2 € la bolsa.**

¿Qué recaudación se obtiene en caja, teniendo en cuenta que durante el proceso de manipulación se malograron 13 piezas?

Del horno sacan $7 \cdot 65 = 455$ piezas, de las que quedan $455 - 13 = 442$

Las envasan ($442 : 8 = 55{,}25$), obteniendo 55 bolsas.

Por la venta recaudan $55 \cdot 2 = 110$ €.

3. **En la confitería han fabricado una partida de bombones. Si los envasaran en cajas de 12, de 18 o de 20, sobrarían 5. Pero lo hacen en cajas de 25 y así no sobra ninguno.**

¿Cuántos bombones han fabricado, sabiendo que no pasan de 1 000?

$12 = 2^2 \cdot 3$

$18 = 2 \cdot 3^2$

$20 = 2^2 \cdot 5$

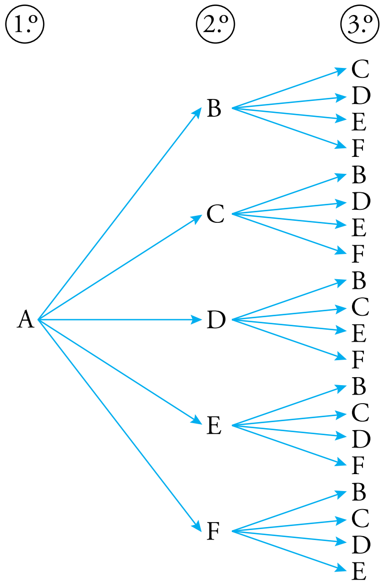
mín.c.m. $(12, 18, 20) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

Como al envasar los bombones en cajas de 12, 18 o 20 sobran 5, su número es múltiplo de $180 + 5 = 185$.

$185 \cdot 5 = 925$ y $185 \cdot 6 = 1\,110$

Han fabricado 925 bombones.

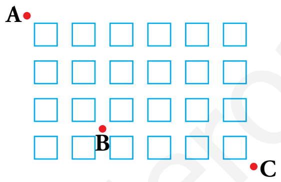
4. **¿De cuántas formas se pueden asignar 3 libros distintos a 6 estudiantes?**

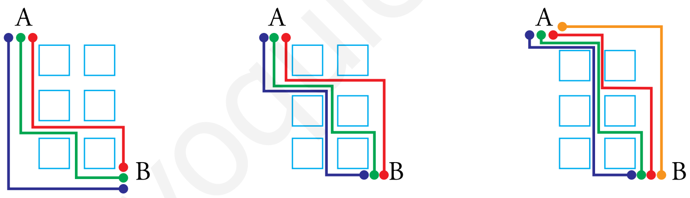


5 · 4 si el 1.º es para A. Lo mismo para los demás jugadores.

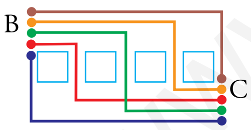
En total: 6 · 5 · 4 = 120 formas

5. **¿De cuántas formas podemos ir de A a B? ¿Y de B a C?**
¿Y de A a C pasando por B?





- Hay 10 formas para ir de A a B.



- Hay 5 formas para ir de B a C.
- Hay 10 · 5 = 50 formas para ir de A a C pasando por B.

6. **¿De cuántas formas podemos repartir 6 entradas entre 7 personas? ¿Y si fueran 8 los candidatos?**

- Es más fácil pensar en quién se queda sin entrada:

  1 2 3 4 5 6 7 → Hay 7 formas.

- Si son 8:

1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	1-8
2-3	2-4	2-5	2-6	2-7	2-8	
3-4	3-5	3-6	3-7	3-8		
4-5	4-6	4-7	4-8			
5-6	5-7	5-8				
6-7	6-8					
7-8						

Hay 28 formas.

7. **Se organiza un torneo de pimpón entre seis jugadores. ¿Cuántas partidas han de disputar? Descríbelas.**

	A	B	C	D	E	F
A	×	○	○	○	○	○
B		×	○	○	○	○
C			×	○	○	○
D				×	○	○
E					×	○
F						×

15 partidas si solo hay de ida:

AB, AC, AD, AE, AF

BC, BD, BE, BF

CD, CE, CF

DE, DF

EF

8. **Cinco amigos organizan un torneo de ajedrez, en el que cada dos jugadores se enfrentan dos veces. ¿Cuántas partidas han de jugar? Descríbelas.**

	A	B	C	D	E
A	×	○	○	○	○
B	○	×	○	○	○
C	○	○	×	○	○
D	○	○	○	×	○
E	○	○	○	○	×

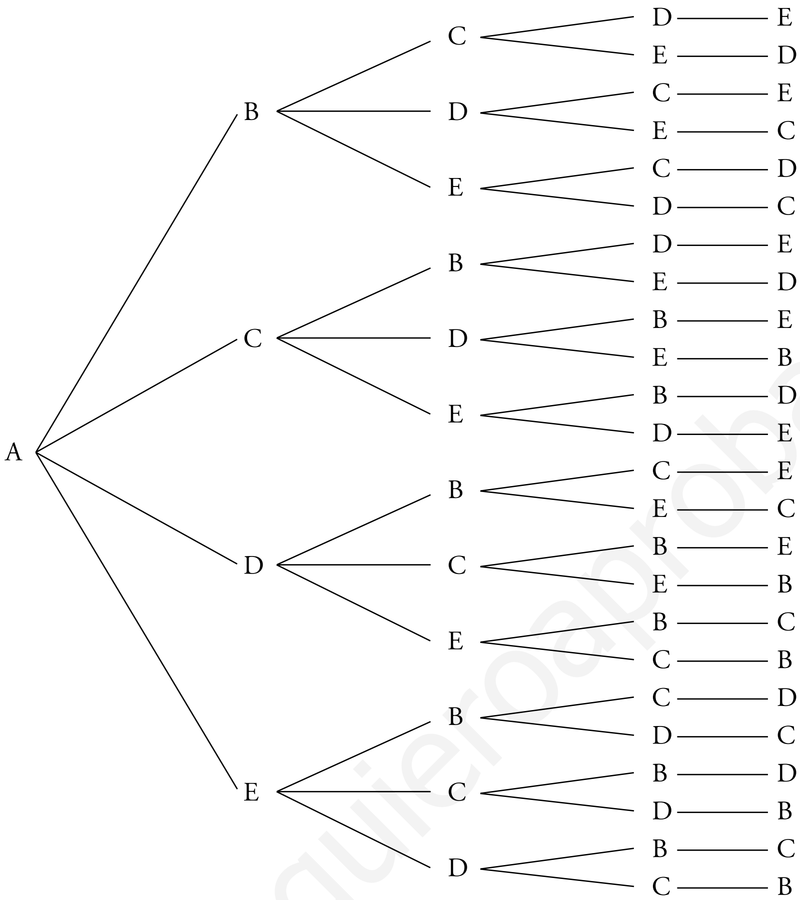
20 partidas:

AB	AC	AD	AE
BA	BC	BD	BE
CA	CB	CD	CE
DA	DB	DC	DE
EA	EB	EC	ED

9. **¿De cuántas formas se pueden sentar cinco amigos en las cinco butacas contiguas de la fila de un cine? Descríbelas.**

Llamamos A, B, C, D y E a cada uno de los cinco amigos.

Si quien se sienta en la primera butaca es A, tenemos estas posibilidades:



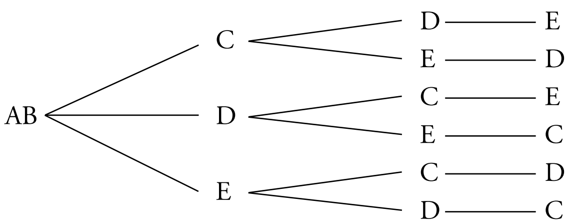
Es decir, $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ formas distintas de sentarse.

Otro tanto ocurriría si quien se sentase en la primera butaca fuese B, C, D o E.

En total hay $24 \cdot 5 = 120$ formas de sentarse.

10. **Repite el problema anterior con el condicionante de que dos de ellos son novios y se sentarán juntos.**

El que dos amigos se tengan que sentar juntos es equivalente a que haya 4 amigos. Por ejemplo, AB, C, D y E.



Si en las dos primeras butacas se sientan AB, hay $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ casos posibles.

En total habrá $6 \cdot 4 = 24$ formas de sentarse.

2 Números enteros

Página 14

1. Calcula:

a) $[(1-4)-(5-3)-(-6)]\cdot[-3+(-7)]$

b) $|3-3\cdot(-7)-|5\cdot(-8)||$

a) $[(1-4)-(5-3)-(-6)]\cdot[-3+(-7)]=[(-3)-(2)+6]\cdot[-3-7]=$

$=[-3-2+6]\cdot[-10]=[1]\cdot[-10]=-10$

b) $|3-3\cdot(-7)-|5\cdot(-8)||=|3+21-|-40||=|24-40|=|-16|=16$

2. Simplifica y calcula.

a) $5^3\cdot 5^2\cdot 2^5$

b) $[(-3)^{11}:(-3^3)^3]\cdot 5^2$

a) $5^3\cdot 5^2\cdot 2^5=5^{3+2}\cdot 2^5=5^5\cdot 2^5=3\,125+32=3\,157$

b) $[(-3)^{11}:(-3^3)^3]\cdot 5^2=[(-3)^{11}:(-3)^9]\cdot 5^2=[(-3)^2]\cdot 5^2=[(-3)\cdot 5]^2=(-15)^2=225$

3. Opera las siguientes expresiones:

a) $[(1-7)-(8-3)-(-2)^5]\cdot(15-11)^2$

b) $(7-3)\cdot 12+(5-1)^2\cdot[6-(-3)^4]$

c) $(-3)^2-(-3^3)+5^2\cdot(-2)^2-[2-(-4)^2\cdot(-7)]$

d) $17-(-4)\cdot(-3+6)-2[4-5(2-3)^7]^2$

e) $|26-(-4)\cdot(-3)^2\cdot(-3+2)^3|-|-2+7|\cdot(-4)^2$

a) $[(1-7)-(8-3)-(-2)^5]\cdot(15-11)^2=[(-6)-(5)-(-32)]\cdot(-4)^2=[-11+32]\cdot 16=$

$=21\cdot 16=336$

b) $(7-3)\cdot 12+(5-1)^2\cdot[6-(-3)^4]=4\cdot 12+4^2\cdot[6-81]=48+16\cdot(-75)=48-1\,200=$

$=-1\,152$

c) $(-3)^2-(-3^3)+5^2\cdot(-2)^2-[2-(-4)^2\cdot(-7)]=9-(-27)+25\cdot 4-[2-16\cdot(-7)]=$

$=36+100-[2+112]=136-114=22$

d) $17-(-4)\cdot(-3+6)-2[4-5(2-3)^7]^2=17-(-12)-2[4-5\cdot(-1)]^2=29-2\cdot 9^2=$

$=-133$

e) $|26-(-4)\cdot(-3)^2\cdot(-3+2)^3|-|-2+7|\cdot(-4)^2=|26-(-4)\cdot 9\cdot(-1)|-5\cdot 16=$

$=|26-36|-80=10-80=-70$

Página 15

4. **Para el problema de arriba, y suponiendo que el izado del batiscafo continúa a la misma velocidad, escribe una expresión con la que calcular el tiempo que tarda en subir, desde el punto donde realizó el trabajo, hasta el nivel de la plataforma.**

$(|-14| + 30) : 2 = 44 : 2 = 22$ min

5. **Di con qué edad murió cada uno de los siguientes personajes, cuyos años de nacimiento y muerte se dan:**

a) Pitágoras (–582, –507)

b) Platón (–428, –347)

c) Al-Jwarizmi (780, 850)

d) Einstein (1879, 1955)

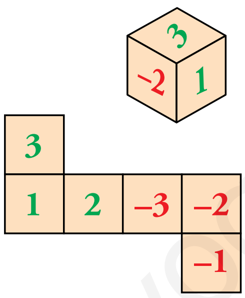
a) Pitágoras $\rightarrow$ $-507 - (-582) = 75$ años

b) Platón $\rightarrow$ $-347 - (-428) = 81$ años

c) Al-Jwarizmi $\rightarrow$ $850 - 780 = 70$ años

d) Einstein $\rightarrow$ $1\,955 - 1\,879 = 76$ años

6. **Varios amigos inventan el siguiente juego con el dado que ves:**



	A	B	C
1	I	I	II
2	III		II
3	I	IIII	
-1	II	I	~~IIII~~
-2	II	I	I
-3	I	III	

— Cada uno tira 10 veces y suma los puntos obtenidos.

— Por cada resultado que se repita tres veces, se duplica el total de puntos.

— Por cada resultado que se repita cuatro o más veces, el total se triplica.

La tabla recoge los resultados de una partida entre tres jugadores.

¿Cuántos puntos ha obtenido cada uno?

A $\rightarrow$ $1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 = 1 + 12 + 3 - 2 - 4 - 3 = 7$ puntos

B $\rightarrow$ $1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) \cdot 2 = 1 + 36 - 1 - 2 - 18 = 16$ puntos

C $\rightarrow$ $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 2 + 4 - 15 - 2 = -11$ puntos

3 Números racionales. Fracciones

Página 16

1. Expresa como suma de un entero y una fracción.

a) $\dfrac{40}{9}$ **b)** $\dfrac{86}{5}$ **c)** $\dfrac{127}{10}$

d) $\dfrac{127}{12}$ **e)** $-\dfrac{43}{8}$

a) $\dfrac{40}{9} = 4 + \dfrac{4}{9}$ b) $\dfrac{86}{5} = 17 + \dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{127}{10} = 12 + \dfrac{7}{10}$

d) $\dfrac{127}{12} = 10 + \dfrac{7}{12}$ e) $-\dfrac{43}{8} = -5 - \dfrac{3}{8}$

2. Obtén la fracción irreducible.

a) $\dfrac{18}{21}$ **b)** $\dfrac{14}{35}$ **c)** $\dfrac{42}{36}$

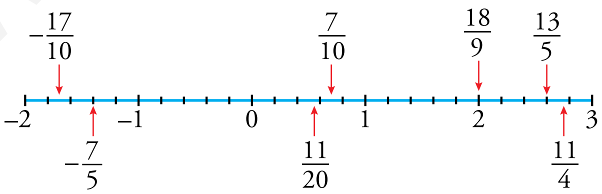
d) $\dfrac{14}{56}$ **e)** $\dfrac{75}{200}$

a) $\dfrac{18}{21} = \dfrac{6}{7}$ b) $\dfrac{14}{35} = \dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{42}{36} = \dfrac{7}{6}$

d) $\dfrac{14}{56} = \dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{75}{200} = \dfrac{3}{8}$

3. Copia la recta en tu cuaderno y representa, aproximadamente, las fracciones.

$$\frac{13}{5},\ \frac{18}{9},\ -\frac{7}{5},\ \frac{11}{4},\ \frac{11}{20},\ \frac{7}{10},\ -\frac{17}{10}$$



$\dfrac{13}{5} = 2 + \dfrac{3}{5}$ $-\dfrac{7}{5} = -1 - \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{11}{4} = 2 + \dfrac{3}{4}$ $-\dfrac{17}{10} = -1 - \dfrac{7}{10}$

Página 17

4. Calcula.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b) $\frac{3}{4}+2-\frac{13}{10}$

c) $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$

d) $\frac{7}{3}-\left(\frac{2}{6}+\frac{5}{9}\right)$

e) $\frac{5}{2}-\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]$

f) $\frac{1}{3}-\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{5}-1\right)-\frac{1}{20}\right]$

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

b) $\frac{3}{4}+2-\frac{13}{10}=\frac{15}{20}+\frac{40}{20}-\frac{26}{20}=\frac{29}{20}$

c) $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1-\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{3}{6}=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{3}-\left(\frac{2}{6}+\frac{5}{9}\right)=\frac{7}{3}-\left(\frac{6}{18}+\frac{10}{18}\right)=\frac{7}{3}-\frac{16}{18}=\frac{42}{18}-\frac{16}{18}=\frac{26}{18}=\frac{13}{9}$

e) $\frac{5}{2}-\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{5}{2}-\left[1-\left(\frac{8}{12}-\frac{3}{12}\right)\right]=\frac{5}{2}-\left[1-\frac{5}{12}\right]=$

$=\frac{5}{2}-\left[\frac{12}{12}-\frac{5}{12}\right]=\frac{5}{2}-\frac{7}{12}=\frac{30}{12}-\frac{7}{12}=\frac{23}{12}$

f) $\frac{1}{3}-\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{5}-1\right)-\frac{1}{20}\right]=\frac{1}{3}-\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{5}\right)-\frac{1}{20}\right]=$

$=\frac{1}{3}-\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}\right]=\frac{1}{3}-\left[\frac{15}{20}-\frac{4}{20}-\frac{1}{20}\right]=$

$=\frac{1}{3}-\frac{10}{20}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{1}{6}$

5. Reduce a una única fracción.

a) $\left(\frac{12}{11}:3\right):\frac{16}{33}$

b) $\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{13}{14}\right)\cdot\frac{21}{26}$

c) $\frac{11}{39}:\left(\frac{3}{13}\cdot\frac{22}{9}\right)$

d) $\left(\frac{7}{10}:\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}$

a) $\left(\frac{12}{11}:3\right):\frac{16}{33}=\frac{12}{33}:\frac{16}{33}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

b) $\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{13}{14}\right)\cdot\frac{21}{26}=\frac{65}{42}\cdot\frac{21}{26}=\frac{65}{2}\cdot\frac{1}{26}=\frac{65}{52}$

c) $\frac{11}{39}:\left(\frac{3}{13}\cdot\frac{22}{9}\right)=\frac{11}{39}:\left(\frac{3\cdot 22}{13\cdot 9}\right)=\frac{11\cdot 13\cdot 9}{39\cdot 3\cdot 22}=\frac{9}{3\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{7}{10}:\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{10}:\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}=\frac{7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 7}=\frac{3}{2\cdot 9}=\frac{1}{6}$

6. Calcula.

a) $\frac{1}{5}$ **de 275** **b)** $\frac{3}{7}$ **de 581** **c)** $\frac{11}{20}$ **de 580**

a) $\frac{1}{5}$ de $275 = \frac{275}{5} = 55$ b) $\frac{3}{7}$ de $581 = \frac{3 \cdot 581}{7} = 249$ c) $\frac{11}{20}$ de $580 = \frac{11 \cdot 580}{20} = 319$

7. Halla la fracción resultante.

a) $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **de** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{5}{9}$ **de** $\frac{3}{5}$

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

8. Calcula.

a) $1 + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)$ **b)** $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{12} \cdot \left[\frac{1}{7} - (-2) \cdot \frac{1}{10}\right]$ **d)** $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) + (-2) \cdot \left[\frac{5}{6} - \left(2 - \frac{5}{7}\right)\right]$

e) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{10}\right) : \left(1 - \frac{7}{15}\right)$ **f)** $\left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} - 1\right)\right] : \left[5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)\right]$

a) $1 + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{4}{20} + \frac{5}{20}\right) = 1 + \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{20} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = 1 - \left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) : \frac{3}{2} = 1 - \left(\frac{7}{12}\right) : \frac{3}{2} =$

$= 1 - \frac{14}{36} = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$

c) $\frac{5}{12} \cdot \left[\frac{1}{7} - (-2) \cdot \frac{1}{10}\right] = \frac{5}{12} \cdot \left[\frac{1}{7} + \frac{2}{10}\right] = \frac{5}{12} \cdot \left[\frac{1}{7} + \frac{1}{5}\right] =$

$= \frac{5}{12} \cdot \left[\frac{5}{35} + \frac{7}{35}\right] = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

d) $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) + (-2) \cdot \left[\frac{5}{6} - \left(2 - \frac{5}{7}\right)\right] = \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{9}\right) + (-2) \cdot \left[\frac{5}{6} - \left(\frac{14}{7} - \frac{5}{7}\right)\right] =$

$= 0 - 2 \cdot \left[\frac{5}{6} - \frac{9}{7}\right] = -2 \cdot \left[\frac{35}{42} - \frac{54}{42}\right] = -2 \cdot \left(\frac{-19}{42}\right) = \frac{19}{21}$

e) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{10}\right) : \left(1 - \frac{7}{15}\right) = \left(\frac{24}{30} - \frac{20}{30} - \frac{3}{30}\right) : \left(\frac{15}{15} - \frac{7}{15}\right) = \frac{1}{30} : \frac{8}{15} =$

$= \frac{15}{30 \cdot 8} = \frac{1}{16}$

f) $\left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} - 1\right)\right] : \left[5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)\right] = \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{7}{7}\right)\right] : \left[5 \cdot \left(\frac{5}{10} - \frac{4}{10}\right)\right] =$

$= \left[\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right)\right] : \left[5 \cdot \frac{1}{10}\right] = -\frac{1}{7} : \frac{1}{2} = -\frac{2}{7}$

Página 19

9. Un terreno se divide en tres partes. Dos de ellas son 2/5 y 1/3 del total. ¿Cuál es la más grande?

1.ª parte $\rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ 2.ª parte $\rightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ 3.ª parte $\rightarrow 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$

La más grande es la primera, $\frac{2}{5}$

10. En el problema anterior, la menor de las partes mide 240 m². ¿Cuál es la superficie total del terreno?

La menor de las partes es $\frac{4}{15}$ de 240 m^2 = $\frac{240 \cdot 4}{15}$ = 64 m^2.

La superficie total es $(240 : 4) \cdot 15 = 900$ m^2.

11. Los 2/5 de los chicos de una clase llevan gafas. En la lista de esa clase hay 36 personas, de las que 7/12 son chicas. ¿Cuántos chicos llevan gafas?

$1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ son chicos.

$36 \cdot \frac{5}{12} = 15$ son chicos.

$15 \cdot \frac{2}{5} = 6$ chicos llevan gafas.

12. Jorge se ha gastado 2/7 de la paga en música y 1/5 en libros. ¿Qué fracción de la paga se ha gastado? ¿Qué fracción le queda?

Ha gastado $\frac{2}{7} + \frac{1}{5} = \frac{10}{35} + \frac{7}{35} = \frac{17}{35}$ en música y libros.

La fracción que le queda es $1 - \frac{17}{35} = \frac{35 - 17}{35} = \frac{18}{35}$.

13. En una frutería se venden, por la mañana, 3/5 de la fruta que había y, por la tarde, la mitad de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción queda por vender?

b) Si al empezar el día había 750 kg, ¿cuántos kilos se vendieron?

a) MAÑANA: Se venden $\frac{3}{5}$ del total. Quedan $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ del total.

TARDE: Se vende $\frac{1}{2}$ de lo que queda $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ del total.

Se han vendido $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ del total. Queda sin vender $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

b) En total se vendieron $\frac{4}{5}$ de 750 kg = $\frac{4 \cdot 750}{5}$ = 600 kg de fruta.

14. De un sueldo de 1 500 €, se gasta en comida la sexta parte, y en el pago de la hipoteca, 350 € más que en comida. ¿Qué fracción del sueldo queda para otros gastos?

En comida se gasta $\frac{1}{6}$ de 1 500 = 250 €.

En el pago de la hipoteca se gasta 250 + 350 = 600 €.

En total, se gasta 250 + 600 = 850 €.

Para otros gastos quedan 1 500 – 850 = 650 €.

La fracción que corresponde a esa cantidad es $\frac{650}{1500} = \frac{13}{50}$.

15. Al cerrar su puesto del mercadillo, el melonero piensa:

"Hoy he vendido bastantes melones. Solo me han quedado once, que son la décima parte de los vendidos".

¿Cuántos melones tenía cuando abrió el puesto?

$\frac{1}{10}$ de $x = 11 \rightarrow x = 110$. Ha vendido 110 melones.

Abrió el puesto con 110 + 11 = 121 melones.

16. El presupuesto anual de una oficina es 297 000 €. Los gastos fijos suponen la quinta parte y los 2/11 del resto se invierten en equipamiento. ¿Cuánto queda para otros gastos?

Fracción de gastos fijos más equipamiento $\rightarrow \frac{1}{5} + \frac{2}{11} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{55} = \frac{11+8}{55} = \frac{19}{55}$

Otros gastos $\rightarrow 1 - \frac{19}{55} = \frac{55-19}{55} = \frac{36}{55}$

Fracción de otros gastos $\rightarrow 1 - \frac{19}{55} = \frac{55-19}{55} = \frac{36}{55}$

Otros gastos $\rightarrow \frac{36}{55}$ de 297 000 = 194 400 €

17. Un club dispone de 1 200 entradas para un partido. Asigna 3/5 partes a su hinchada y 5/8 del resto a la visitante. ¿Cuántas entradas quedan para venta libre?

A su hinchada asigna $\frac{3}{5}$ de 1 200 = 720 entradas.

Quedarán 1 200 – 720 = 480 entradas, y $\frac{5}{8}$ de 480 = 300 entradas asigna a la visitante.

Para la venta libre quedarán 480 – 300 = 180 entradas.

18. Un dentista dedica 1 h y 3/4 a su consulta. Si recibe a 15 pacientes, ¿qué fracción de hora puede dedicar a cada uno? ¿Cuántos minutos son?

$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ h dedica a la consulta.

$\frac{7}{4} : 15 = \frac{7}{60}$ h dedica a cada paciente.

$\frac{7}{60} \cdot 60 = 7 \rightarrow$ Dedica 7 minutos a cada paciente.

19. Reparto entre cuatro: A y B se llevan, respectivamente, 2/7 y 13/21 del total. C recibe 7/10 del resto. Y D, finalmente, 390 €. ¿Cuánto dinero se repartió?

Entre A y B: $\frac{2}{7} + \frac{13}{21} = \frac{19}{21}$. Quedan $\frac{2}{21}$.

C $\rightarrow$ $\frac{7}{10}$ de $\frac{2}{21} = \frac{1}{15}$. Quedan $\frac{2}{21} - \frac{1}{15} = \frac{1}{35}$.

D se lleva $\frac{1}{35}$ del total, que son 390 €. En total se repartieron $35 \cdot 390 = 13\,650$ €.

20. Un corredor ciclista abandona la carrera cuando lleva cubiertos los 2/3 del recorrido. Si hubiera aguantado 10 kilómetros más, habría cubierto las tres cuartas partes. ¿Cuántos kilómetros hicieron los que llegaron a la meta?

Los 10 km suponen $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$ del recorrido total.

Por tanto, $\frac{1}{12}$ de $x = 10 \rightarrow x = 120$ km hicieron los corredores que llegaron a la meta.

Este problema también se puede hacer de forma muy sencilla planteando la siguiente ecuación:

$$\frac{2x}{3} + 10 = \frac{3x}{4} \rightarrow x = 120 \text{ km}$$

21. Seis amigos compran solidariamente un regalo para el séptimo miembro de la pandilla. A la hora de pagar, uno no tiene dinero y, así, cada uno de los demás debe poner 1,50 euros más. ¿Cuánto costaba el regalo?

Llamamos x a lo que cada uno tenía que poner al principio.

$6x = 5 \cdot (x + 1{,}50) \rightarrow 6x = 5x + 7{,}50 \rightarrow x = 7{,}50$

El regalo costaba $6 \cdot 7{,}50 = 45$ €.

4 Potencias de exponente entero

Página 20

1. Ordena de menor a mayor.

$$2^{-3},\ 2^{-1},\ 2^{0},\ 2^{-2},\ 2^{-4},\ (-2)^{-3},\ (-2)^{-1}$$

$(-2)^{-1} < (-2)^{-3} < 2^{-4} < 2^{-3} < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^{0}$

2. Calcula el valor de estas potencias:

a) 5^{-1} **b)** 2^{-3} **c)** $(-6)^{0}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ **f)** $\frac{1}{4^{-2}}$

g) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$ **h)** $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2}\right]^{-1}$ **i)** $0{,}2^{-4}$

a) $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

b) $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

c) $(-6)^{0} = 1$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2^{-2}} = 2^{2} = 4$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

f) $\frac{1}{4^{-2}} = 4^{2} = 16$

g) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$

h) $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2}\right]^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

i) $0{,}2^{-4} = \left(\frac{1}{0,2}\right)^{4} = \left(\frac{1}{2/10}\right)^{4} = 5^{4} = 625$

3. Expresa como una potencia de base 3.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (3^{-2})^{5} \cdot 3^{7}$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (3^{-2})^{5} \cdot 3^{7} = 3^{1} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{3} \cdot 3^{-10} \cdot 3^{7} = 3^{-1}$

4. Expresa como potencias de base 2.

a) 4^{-2} **b)** $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ **c)** $\frac{4^{-1} \cdot 8^{-1}}{(2^{-3})^{-3}}$

a) $4^{-2} = (2^{2})^{-2} = 2^{-4}$

b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2^{3}}\right)^{-2} = (2^{-3})^{-2} = 2^{6}$

c) $\frac{4^{-1} \cdot 8^{-1}}{(2^{-3})^{-3}} = \frac{1}{2^{2} \cdot 2^{3} \cdot 2^{9}} = 2^{-14}$

5. **Reduce y expresa como una potencia.**

a) $\dfrac{(-7)^4}{7^{-2}}$

b) $\dfrac{1}{5^2 : 5^4}$

c) $\dfrac{6^4 \cdot 2^{-2}}{2^2 \cdot 3^{-1}}$

d) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^2$

e) $\left(\dfrac{1}{5^3}\right)^2 \cdot (5^3)^{-2}$

f) $\dfrac{3^{-4}}{9^{-3}}$

g) $\dfrac{5^2 \cdot 10^{-2}}{2^2}$

h) $\dfrac{12^2 \cdot 5^{-5}}{15^2 \cdot 8^{-1}}$

i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-7} \cdot \left(\dfrac{9}{10^4}\right)^2 \cdot \dfrac{3^{-7} \cdot 2^{-2}}{(5^{-3})^{-3}}$

a) $\dfrac{(-7)^4}{7^{-2}} = 7^4 \cdot 7^2 = 7^6$

b) $\dfrac{1}{5^2 : 5^4} = \dfrac{1}{5^{-2}} = 5^2$

c) $\dfrac{6^4 \cdot 2^{-2}}{2^2 \cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3}{2^2 \cdot 2^2} = 3^5$

d) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^2 = (2^3)^2 \cdot (2^3)^2 = 2^{12}$

e) $\left(\dfrac{1}{5^3}\right)^2 \cdot (5^3)^{-2} = 5^{-6} \cdot 5^{-6} = 5^{-12}$

f) $\dfrac{3^{-4}}{9^{-3}} = \dfrac{3^{-4}}{(3^2)^{-3}} = \dfrac{3^{-4}}{3^{-6}} = 3^{-4} \cdot 3^6 = 3^2$

g) $\dfrac{5^2 \cdot 10^{-2}}{2^2} = \dfrac{5^2 \cdot 2^{-2} \cdot 5^{-2}}{2^2} = 2^{-4}$

h) $\dfrac{12^2 \cdot 5^{-5}}{15^2 \cdot 8^{-1}} = \dfrac{3^2 \cdot 2^4 \cdot 2^3}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 5^5} = \dfrac{3^2 \cdot 2^7}{3^2 \cdot 5^7} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^7$

i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-7} \cdot \left(\dfrac{9}{10^4}\right)^2 \cdot \dfrac{3^{-7} \cdot 2^{-2}}{(5^{-3})^{-3}} = \dfrac{5^7}{3^7} \cdot \dfrac{3^4}{2^8 \cdot 5^8} \cdot \dfrac{1}{5^9 \cdot 3^7 \cdot 2^2} = \dfrac{5^7 \cdot 3^4}{3^{14} \cdot 2^{10} \cdot 5^{17}} =$

$$= \dfrac{1}{3^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}} = \left(\dfrac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5}\right)^{10} = \left(\dfrac{1}{30}\right)^{10}$$

Ejercicios y problemas

Página 21

Practica

Números enteros

1. **Calcula.**

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)]$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1)$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)]$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)]$

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)] = 5 - 3 + 2 + 4 - 6 - 3 + 6 - 4 = 17 - 16 = 1$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1) = (-2) \cdot (-7) \cdot (-1) = -14$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)] = 5 \cdot (8 - 5) - (-4) \cdot (6 - 9) = 15 - 12 = 3$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)] = (-7) \cdot [4 \cdot (-5) - 5 \cdot 3] = (-7) \cdot (-35) = 245$

2. **Elimina paréntesis y simplifica.**

a) $\dfrac{[(-5)^3]^2}{(-5)^6}$

b) $\dfrac{9^2}{(-3)^4}$

c) $[(-3)^5 : (-3)^3]^2$

d) $[2^4 \cdot (-2)^2] : (-4)^3$

a) $\dfrac{(-5)^6}{(-5)^6} = 1$

b) $[(-3)^2]^2 = (-3)^4 = 81$

c) $\dfrac{(3^2)^2}{(-3)^4} = \dfrac{3^4}{3^4} = 1$

d) $\dfrac{2^4 \cdot 2^2}{-4^3} = \dfrac{2^6}{-(2^2)^3} = \dfrac{2^6}{-2^6} = -1$

3. **Calcula.**

a) $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt{64}$

c) $\sqrt[5]{100\,000}$

d) $\sqrt[3]{-27\,000}$

e) $\sqrt{484}$

f) $\sqrt[4]{81}$

a) $\sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

c) $\sqrt[5]{10^5} = 10$

d) $\sqrt[3]{(-30)^3} = -30$

e) $\sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 11 = 22$

f) $\sqrt[4]{3^4} = 3$

Fracciones

4. **Calcula mentalmente.**

a) **Los dos quintos de 400.**

b) **El número cuyos dos quintos son 160.**

c) **Los tres séptimos de 140.**

d) **El número cuyos cinco sextos son 25.**

a) $\frac{2}{5}$ de 400 = 2 · 80 = 160

b) $\frac{2}{5}$ de $\boxed{}$ = 160 $\rightarrow$ el número es 400

c) $\frac{3}{7}$ de 140 = 3 · 20 = 60

d) $\frac{5}{6}$ de $\boxed{}$ = 25 $\rightarrow$ el número es 30

5. **Reduce a una sola fracción.**

a) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+1\right)$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]$

a) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+1\right)=\left(\frac{12}{20}-\frac{5}{20}+\frac{40}{20}\right)-\left(\frac{15}{20}-\frac{8}{20}+\frac{20}{20}\right)=\frac{47}{20}-\frac{27}{20}=1$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]=\left(\frac{9}{15}+\frac{5}{15}\right)-\left[1-\left(\frac{3-2}{4}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]=$

$=\frac{14}{15}-\left(1-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right)=\frac{14}{15}-1+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{20}=\frac{56}{60}-\frac{60}{60}+\frac{15}{60}-\frac{40}{60}+\frac{9}{60}=\frac{-1}{3}$

6. **Calcula.**

a) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{-6}$

b) $\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right):\left(3+\frac{1}{7}\right)$

c) $\dfrac{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{3}{14}}$

d) $\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{\frac{5}{3}:\frac{7}{6}}$

a) $\frac{3\cdot 8\cdot 5}{4\cdot 9\cdot 6}=\frac{5}{9}$

b) $\left(\frac{8}{8}+\frac{4}{8}-\frac{1}{8}\right):\left(\frac{21}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{11}{8}:\frac{22}{7}=\frac{11\cdot 7}{22\cdot 8}=\frac{7}{16}$

c) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{6}{8}-\frac{4}{8}-\frac{1}{8}}{\frac{7}{14}-\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{14}}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{7}}=\frac{7}{16}$

d) $\dfrac{-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 3}}{\frac{5\cdot 6}{7\cdot 3}}=\dfrac{\frac{-5}{2}}{\frac{10}{7}}=\frac{-5\cdot 7}{2\cdot 10}=\frac{-7}{4}$

Potencias de exponente entero

7. **Calcula.**

a) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ **b)** $-\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$ **c)** $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **e)** $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ **f)** $-\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

a) $\frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

b) $-\frac{7}{3}$

c) $(-6)^2 = 36$

d) $2^3 = 8$

e) $\frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$

f) $-(4)^3 = -64$

8. **Expresa como potencias de base 10.**

a) Cien millones.

b) Diez billones.

c) Una milésima.

d) Cien mil millones.

e) Una millonésima.

f) Cien milésimas.

g) Diez mil billones.

h) Mil centésimas.

a) $100 \cdot 1\,000\,000 = 10^2 \cdot 10^6 = 10^8$

b) $10 \cdot 10^{12} = 10^{13}$

c) $0{,}001 = 10^{-3}$

d) $100\,000 \cdot 1\,000\,000 = 10^5 \cdot 10^6 = 10^{11}$

e) $0{,}000001 = 10^{-6}$

f) $100 \cdot 0{,}001 = 10^2 \cdot 10^{-3} = 10^{-1}$

g) $10\,000 \cdot 10^{12} = 10^4 \cdot 10^{12} = 10^{16}$

h) $1\,000 \cdot 0{,}01 = 10^3 \cdot 10^{-2} = 10$

9. **Calcula.**

a) $-3 \cdot (4-2)^{-2} + 10 \cdot (5)^{-1}$

b) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (2-5)$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^2$

e) $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

f) $\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1}$

a) $-3 \cdot (4-2)^{-2} + 10 \cdot (5)^{-1} = -3 \cdot (2)^{-2} + 10 \cdot (5)^{-1} = \frac{-3}{2^2} + \frac{10}{5} = \frac{-15}{20} + \frac{40}{20} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$

b) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (2-5) = \frac{2}{5} \cdot 5 + \frac{2^2}{3^2} \cdot (-3) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{2^2}{5^2} \cdot \frac{3^3}{2^3} = -\frac{3^2}{5 \cdot 2} = -\frac{9}{10}$

d) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{6}{4}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9-10}{8}\right)^2 = \left(\frac{-1}{4}\right)^3 : \left(\frac{-1}{8}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^6 = -1$

e) $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{6}{4}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{9}-\frac{7}{9}\right)^{-1} + 4 =$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 = \frac{-4^2 \cdot 9}{3 \cdot 4} + 4 = -12 + 4 = -8$

f) $\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1} = \left(\frac{3}{12}-\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4}-\frac{10}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}-\frac{16}{4}\right)^{-1} =$

$= \frac{-4}{12} + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{15}{4}\right)^{-1} = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{-4}{15}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

10. **Reduce como en el ejemplo.**

- $\frac{64^2 \cdot 4^3 \cdot 2}{16 \cdot (-8)^2} = \frac{(2^6)^2 \cdot (2)^3 \cdot 2}{2^4 \cdot [(-2)^3]^2} = \frac{2^{12} \cdot 2^6 \cdot 2}{2^4 \cdot 2^6} = \frac{2^{19}}{2^{15}} = 2^9$

a) $\frac{(-2)^3 \cdot 4^2}{32}$ **b)** $\frac{125}{25^2 \cdot (-5)^2}$ **c)** $\frac{3^2 \cdot 9^4}{(3^5)^2}$

a) $\frac{-2^3 \cdot (2^2)^2}{2^5} = \frac{-2^3 \cdot 2^4}{2^5} = \frac{-2^7}{2^5} = -2^2 = -4$

b) $\frac{5^3}{(5^2)^2 \cdot (-5)^2} = \frac{5^3}{5^4 \cdot 5^2} = \frac{5^3}{5^6} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

c) $\frac{3^2 \cdot (3^2)^4}{3^{10}} = \frac{3^2 \cdot 3^8}{3^{10}} = \frac{3^{10}}{3^{10}} = 1$

Aplica lo aprendido

11. **La temperatura de un congelador baja 2 °C cada 3 minutos hasta llegar a –18 °C. ¿Cuánto tardará en llegar a –12 °C si cuando lo encendemos la temperatura es de 16 °C?**

La diferencia de temperatura entre 16 °C y –12 °C es de 16 + 12 = 28 °C.

Cada 3 minutos, la temperatura baja 2 °C. En bajar 28 °C tardará:

$\frac{28}{2} \cdot 3$ minutos $= 14 \cdot 3 = 42$ minutos

12. **Aristóteles murió en el año 322 a. C. y vivió 62 años. ¿En qué año nació?**

(Año en que murió) – (Año en que nació) = N.º de años vividos

(322 a.C.) – (Año en que nació) = 62 → (–322) – (Año en que nació) = 62

–322 – 62 = Año en que nació → –384 = Año en que nació

Aristóteles nació en el año 384 a.C.

Página 22

13. Con una barrica que contiene 510 litros de vino, ¿cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar? ¿Cuántas de litro y medio?

$510 : \frac{3}{4} = \frac{510 \cdot 4}{3} = 680 \rightarrow$ Se pueden llenar 680 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro.

1 litro y medio $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$510 : \frac{3}{2} = \frac{510 \cdot 2}{3} = 340 \rightarrow$ Se pueden llenar 340 botellas de litro y medio.

Este último caso también se puede resolver observando que 1 botella de litro y medio equivale a 2 botellas de 3/4 de litro. Por tanto, el número de botellas de litro y medio que se pueden llenar será la mitad del número de botellas de 3/4 de litro: $\frac{680}{2} = 340$.

14. Ana se gasta 2/3 del dinero en ropa y 1/4 del total en comida.

a) ¿Cuál es la fracción gastada?

b) ¿Qué fracción le queda por gastar?

c) Si salió de casa con 180 €, ¿qué cantidad no se ha gastado?

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$

b) $1 - \frac{11}{12} = \frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{12}$ de 180 € $= \frac{180}{12} = 15$ € es la cantidad que no se ha gastado.

15. En cierta parcela se cultivan 4/5 partes de trigo y el resto, 100 m², de maíz. ¿Cuál es la superficie de la parcela?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trigo} \rightarrow \frac{4}{5} \text{ partes} \rightarrow \text{sobra } \frac{1}{5} \\ \text{Maíz} \rightarrow \frac{1}{5} \text{ parte que equivale a } 100 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \text{Superficie de la parcela} = 100 \cdot 5 = 500 \text{ m}^2$$

16. Con una garrafa de 5/2 de litro se llenan 25 vasos. ¿Qué fracción de litro entra en un vaso?

$\frac{5}{2}$ de litro : 25 vasos $= \frac{5}{2} : 25 = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

En 1 vaso entra $\frac{1}{10}$ de litro.

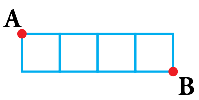
17. De una botella de 3/4 de litro se ha consumido la quinta parte. ¿Qué fracción de litro queda?

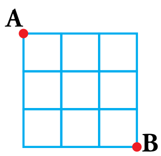
Si se ha consumido la quinta parte, quedan sin consumir $\frac{4}{5}$ de la botella:

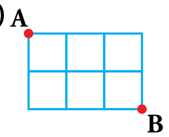
$\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de litro $= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ de litro quedan sin consumir.

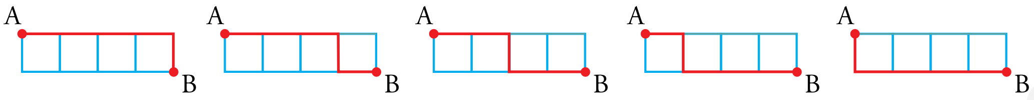
Técnicas de conteo

18. **En cada caso, ¿cuántos caminos distintos hay para llegar de A a B, sin retroceder nunca?**

a)


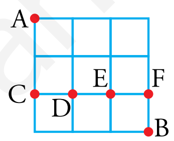
b)


c)


a)


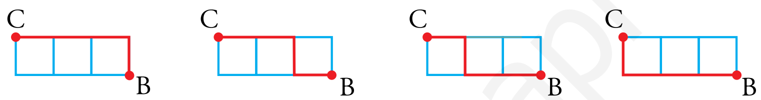
Hay 5 formas de ir de A a B.

b) Para calcular las diferentes posibilidades, organizamos el problema de la siguiente manera:



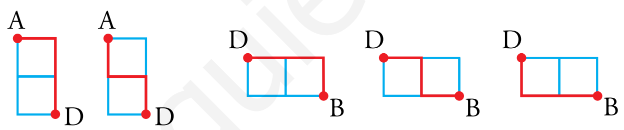
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por C:

  De A a C hay 1 camino y de C a B, 4 caminos → $1 \cdot 4 = 4$ formas.



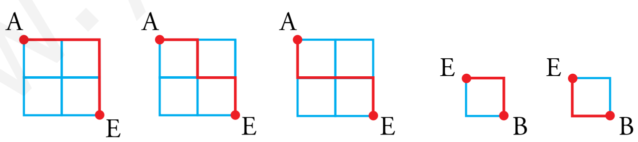
- Calculamos los caminos que hay de A a B, pasando por D y sin pasar por C:

  De A a D hay 2 caminos, y de D a B, otros 3 → $2 \cdot 3 = 6$ formas.



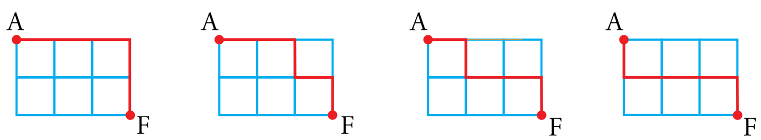
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por E pero no por C ni D:

  De A a E hay 3 caminos, y de E a B, otros 2 → $3 \cdot 2 = 6$ formas.



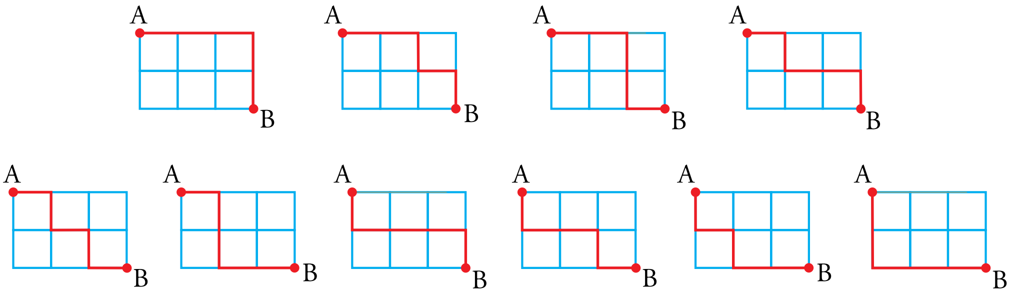
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por F y sin pasar por C, D y E:

  De A a F hay 4 caminos, y de F a B, uno → $4 \cdot 1 = 4$ formas.



- Por tanto, el número total de caminos de A a B es: $4 + 6 + 6 + 4 = 20$

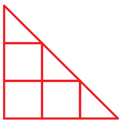
c)



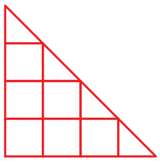
Hay 10 caminos distintos.

19. **¿Cuántos triángulos rectángulos ves en cada una de estas figuras?**

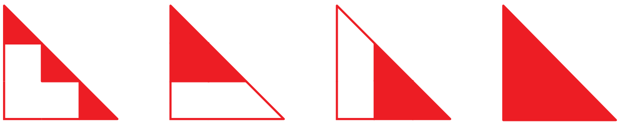
a)



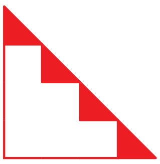
b)



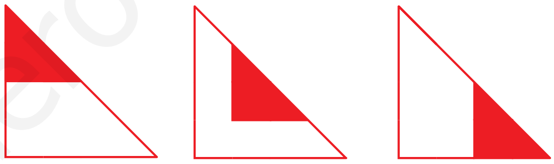
a) 3 pequeños, 2 medianos y 1 grande. En total, 6 triángulos rectángulos.



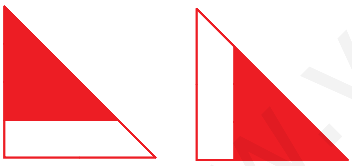
b) 4 triángulos pequeños:



3triángulos cuyos catetos miden 2:



2 triángulos cuyos catetos miden 3:



1 triángulo grande:

En total, 4 + 3 + 2 + 1 = 10 triángulos rectángulos.

20. **Una manifestación ocupa una superficie de 3 600 m^2. Si en un metro cuadrado caben 3 personas, ¿cuántas personas han acudido a la manifestación?**

Si en 1 m^2 caben 3 personas, en 3 600 m^2 cabrán 3 600 · 3 = 10 800 personas.

21. **Marta tiene 4 pantalones y 5 camisas. ¿De cuántas formas se puede vestir? ¿Y si además tiene 3 pares de zapatos?**

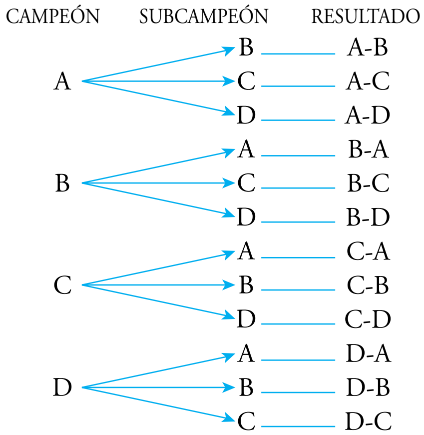
Por cada pantalón que elija, tiene 5 camisas para ponerse; como tiene 4 pantalones, en total tiene 4 · 5 = 20 formas diferentes de vestirse.

Por cada una de las 20 formas anteriores, puede elegir 3 pares de zapatos. En total tendrá 20 · 3 = 60 formas diferentes de vestirse.

22. **A la fase final de un campeonato de tenis llegan 4 jugadores. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón. ¿De cuántas formas se pueden repartir los premios? Descríbelas.**

Llamamos a los jugadores A, B, C y D.

Hacemos un diagrama en árbol:



En total hay $3 \cdot 4 = 12$ formas de repartir los premios.

23. **Seis amigos organizan un campeonato de pádel, jugando todos contra todos.**

a) ¿Cuántos partidos han de jugar?

b) ¿Cuántos partidos jugarían si el campeonato fuera a doble vuelta?

En cada caso, descríbelos usando una tabla.

a) Llamamos a los jugadores A, B, C, D, E y F.

Usamos la siguiente tabla para contar el número de partidos y describirlos:

	A	B	C	D	E	F
A	×	A · B	A · C	A · D	A · E	A · F
B	×	×	B · C	B · D	B · E	B · F
C	×	×	×	C · D	C · E	C · F
D	×	×	×	×	D · E	D · F
E	×	×	×	×	×	E · F
F	×	×	×	×	×	×

En la tabla se refleja que el campeonato no es a doble vuelta y que un jugador no juega contra sí mismo. Hay, por tanto, 15 partidos.

b) Jugarán el doble de partidos que en el apartado anterior, es decir:

$15 \cdot 2 = 30$ partidos.

Los describimos usando la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F
A	×	A · B	A · C	A · D	A · E	A · F
B	B · A	×	B · C	B · D	B · E	B · F
C	C · A	C · B	×	C · D	C · E	C · F
D	D · A	D · B	D · C	×	D · E	D · F
E	E · A	E · B	E · C	E · D	×	E · F
F	F · A	F · B	F · C	F · D	F · E	×

Resuelve problemas

24. **Una pelota cae al suelo y se eleva cada vez a los 2/3 de la altura anterior. Tras botar tres veces, se ha elevado a 2 m. ¿Desde qué altura cayó?**

La pelota se encuentra a x metros de altura. Tras el primer bote, se eleva $\frac{2}{3}x$, tras el segundo, $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x$, y tras el tercero, $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x$.

Es decir, $\frac{8}{27}x = 2 \rightarrow x = \frac{27 \cdot 2}{8} = 6{,}75$

La pelota cayó desde 6,75 metros de altura.

25. **Un jardinero riega en un día 2/5 partes del jardín. ¿Cuántos días tardará en regar todo el jardín? ¿Cuánto ganará si cobra 50 € por día?**

Si en 1 día riega 2/5 partes, en medio día riega 1/5 del jardín.

Todo el jardín lo regará en 5 medios días, es decir, en 2 días y medio.

En 1 día cobra 50 €, en 2 días y medio cobra: 50 · 2,5 = 125 €.

26. **En un puesto de frutas y verduras, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden a frutas. De lo recaudado por fruta, los 3/8 corresponden a las naranjas. Si la venta de naranjas asciende a 89 €, ¿qué caja ha hecho el establecimiento?**

Naranjas: $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{6} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$

$\frac{5}{16}$ equivale a 89 € $\rightarrow$ $\frac{1}{16}$ equivale a 17,80 €

Total recaudado: 17,80 · 16 = 284,80 €

27. **A Pablo le descuentan al mes, del sueldo bruto, la octava parte de IRPF y la décima parte para la Seguridad Social. Si el sueldo neto es 1 302 €, ¿cuál es su sueldo bruto mensual?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{IRPF} \rightarrow \frac{1}{8} \\ \text{S. Social} \rightarrow \frac{1}{10} \end{array}\right\} \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{5}{40} + \frac{4}{40} = \frac{9}{40} \rightarrow \text{Cobra } 1 - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}.$$

$\frac{31}{40}$ del sueldo bruto = 1 302 $\rightarrow$ Sueldo bruto = $\frac{1302 \cdot 40}{31}$ = 1 680 €

28. **De una clase, 3/7 del total de los estudiantes han ido al museo de ciencias y 2/5 a un concierto.**

a) ¿Adónde han ido más estudiantes?

b) Si 6 estudiantes no han ido a ninguna actividad, ¿cuántos estudiantes hay en la clase?

a) Comparamos las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} = \frac{15}{35} \\ \frac{2}{5} = \frac{14}{35} \end{array}\right\} \frac{15}{35} > \frac{14}{35} \rightarrow \frac{3}{7} > \frac{2}{5}.$$ Han ido más estudiantes al museo de Ciencias.

b) Fracción de estudiantes que han ido a alguna actividad: $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}=\frac{15}{35}+\frac{14}{35}=\frac{29}{35}$

Fracción de estudiantes que no han ido a ninguna actividad: $1-\frac{29}{35}=\frac{35}{35}-\frac{29}{35}=\frac{6}{35}$

$\frac{6}{35}$ equivale a 6 estudiantes $\rightarrow$ $\frac{35}{35}$ equivaldrá a 35 estudiantes.

En la clase hay 35 estudiantes.

29. De un solar se venden los 2/3 de su superficie y después los 2/3 de lo que quedaba. El ayuntamiento expropia los 3 200 m^2 restantes para un parque público. ¿Cuál era la superficie del solar?

1.ª venta $\rightarrow$ $\frac{2}{3}$, queda por vender $\frac{1}{3}$ 2.ª venta $\rightarrow$ $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

Fracción que representa el solar vendido $=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$

Fracción que representa el solar sin vender, $\frac{9}{9}-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$, que equivale a 3 200 m^2.

La superficie del solar será $3\,200 \cdot 9 = 28\,800$ m^2.

30. Un obrero ha tardado 1 hora y tres cuartos en acuchillar 3/5 partes de un piso. Si ha empezado a las 10 de la mañana, ¿a qué hora acabará?

1 hora y tres cuartos $=1+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ de hora

$\frac{3}{5}$ partes del piso tarda $\frac{7}{4}$ de hora $\rightarrow$ $\frac{1}{5}$ tardará $\frac{7}{4}:3=\frac{7}{12}$ de hora =

$=\frac{7}{12}$ de 60 minutos $=\frac{7\cdot 60}{12}=35$ minutos

En acuchillar todo el piso tardará $35 \cdot 5 = 175$ minutos; es decir, 2 horas y 55 minutos.

Si ha empezado a las 10 de la mañana, acabará a la una menos cinco de la tarde (12 h 55 min) de acuchillar todo el piso.

31. Un tren tarda 3 horas y cuarto en recorrer 5/9 de un trayecto de 918 km.

a) Calcula el tiempo que tarda en realizar el trayecto si sigue a la misma velocidad.

b) ¿Cuál ha sido su velocidad media?

a) 3 horas y cuarto $=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$ de hora

En recorrer $\frac{5}{9}$ del trayecto tarda $\frac{13}{4}$ de hora $\rightarrow$ En recorrer $\frac{1}{9}$ tardará:

$\frac{13}{4}:5=\frac{13}{20}$ de hora $=\frac{13}{20}$ de 60 minutos $=\frac{13\cdot 60}{20}=39$ minutos

En realizar todo el trayecto tardará $9 \cdot 39 = 351$ minutos; esto es, 5 horas y 51 minutos.

b) velocidad $=\frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$ 5 h y 51 minutos $=5\text{ h}+\frac{51}{60}\text{ h}=\frac{351}{60}\text{ h}$

velocidad $\frac{918\text{ km}}{351/60\text{ h}}=\frac{918\cdot 60}{351}\approx 156{,}92$ km/h

Página 23

32. Una tela para tapizar encoge, al lavarla, 3/20 a lo largo y 7/25 a lo ancho. ¿Cuántos metros se han de comprar de una pieza de 125 cm de ancho para cubrir una superficie de 39,9 m^2?

$$\left.\begin{array}{l} \text{A lo largo encoge } \frac{3}{20} \ \to \ \text{quedan } \frac{17}{20} \\ \text{A lo ancho encoge } \frac{7}{25} \ \to \ \text{quedan } \frac{18}{25} \end{array}\right\} \text{ En total, queda } \frac{17}{20} \cdot \frac{18}{25} = \frac{306}{500} = 0{,}612$$

Después de lavarla, queda 0,612 de la superficie inicial.

Hay que comprar 39,9 : 0,612 = 65,196 m^2 de superficie de tela.

Como el ancho es de 125 cm = 1,25 m, entonces:

Hay que comprar 65,196 : 1,25 = 52,16 m de largo de tela.

33. Ejercicio resuelto.

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

34. En una bolsa hay bolas rojas y negras, en total casi 250. Sabemos que dos terceras partes de las rojas equivalen a tres quintas partes de las negras. ¿Cuántas hay de cada color?

Llamamos R al número de bolas rojas, y N al de bolas negras.

$$\frac{2}{3}R = \frac{3}{5}N \ \to \ 10R = 9N \ \to \ \frac{N}{R} = \frac{10}{9}$$

Busquemos una fracción equivalente a $\frac{10}{9}$ de forma que la suma del numerador y del denominador es próxima a 250 y menor que 250 (10 + 9 = 19, y 250 : 19 = 13, …).

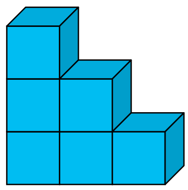
$$\frac{N}{R} = \frac{10}{9} = \frac{130}{117}$$

En la bolsa hay 130 bolas negras y 117 bolas rojas.

Comprobamos que se cumplen las condiciones del enunciado:

$130 + 117 = 247 \qquad \frac{2}{3} \cdot 117 = 78 \qquad \frac{3}{5} \cdot 130 = 78$

35. Para construir esta escalera de 3 peldaños se han necesitado 6 bloques.



a) ¿Cuántos bloques se necesitarían para montar una de 4 peldaños? ¿Y una de 5 peldaños?

b) ¿Cuántos bloques son necesarios para formar una de 15 peldaños?

c) Generaliza para una escalera de n peldaños.

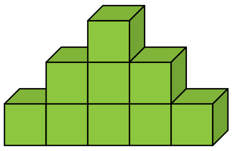
a) 3 peldaños $\to$ 6 bloques   4 peldaños $\to$ 6 + 4 = 10 bloques

5 peldaños $\to$ 10 + 5 = 15 bloques

b) 15 peldaños $\to$ 15 + 6 + 7 + … + 15 = 120 bloques

c) n peldaños $\to$ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$ bloques

36. **Esta escalera de 3 peldaños tiene 9 bloques. Calcula:**



a) El número de bloques que se habrían necesitado para una de 4 peldaños.

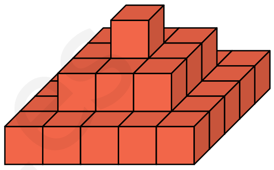
b) Los peldaños que tendría una con 64 bloques.

a) 3 peldaños $\rightarrow$ 9 bloques $(9 = 3^2)$ 4 peldaños $\rightarrow$ $9 + 7 = 16$ bloques $(16 = 4^2)$

b) Para consumir 64 bloques se necesitan 8 peldaños:

Comprobación: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \dfrac{(15+1)\cdot 8}{2} = 64$

37. **Esta escalera de 3 peldaños está construida con 35 bloques. Calcula:**



a) Los bloques necesarios para una de 4 peldaños.

b) Los peldaños que tendría una con 286 bloques.

a) 3 peldaños $\rightarrow$ 35 bloques 4 peldaños $\rightarrow$ $35 + 7^2 = 84$ bloques

b) 5 peldaños $\rightarrow$ $84 + 9^2 = 165$ bloques 6 peldaños $\rightarrow$ $165 + 11^2 = 286$ bloques

Tendría 6 peldaños.

Curiosidades matemáticas

Relaciona

Reproduce esta espiral en un papel cuadriculado y anímate a hacerla un poco más grande.

¿Sabrías explicar qué relación tiene con la *sucesión de Fibonacci*?

Los radios de los sucesivos arcos que componen la espiral miden:

1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8…

Es decir, componen la sucesión de Fibonacci.

Cuenta larga

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & \dots & + & 997 & + & 999 & \\ & - & 2 & - & 4 & - & 6 & - & \dots & - & 996 & - & 998 & \\ \hline 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 & + & 1 & = \dfrac{999+1}{2} = 500 \end{array}$$

1 Importancia del sistema de numeración decimal

Página 25

Ejemplo

- **La tabla recoge la población estimada al 01/01/2016 de los tres países del mundo con mayor número de habitantes:**

PAÍS	N.° DE HABITANTES
China	1 374 198 000
India	1 310 214 000
EE.UU.	322 439 000

a) Escribe cómo se lee: ¿Cuántos habitantes tiene EE.UU.?

b) ¿Qué país tiene más habitantes, India o China? ¿Cuántos más?

c) Redondea a la centena de millón las poblaciones de China, India y EE.UU.

- **Variación mensual del índice de paro en cierta comunidad autónoma:**

Marzo → 1,089 % Abril → –1,11 %

d) ¿En cuál de esos meses el paro sufrió mayor variación?

e) ¿En qué mes subió más el paro?

f) ¿Cuál es la diferencia entre la variación de marzo y la de abril?

- **Estas dos cantidades corresponden a la masa de la Tierra (T) y de un átomo de hidrógeno (H). Ambas están expresadas con todas sus cifras y en notación abreviada:**

T → 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kg = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg

H → 0,000 000 000 000 000 000 000 001 660 kg = $1,66 \cdot 10^{-24}$ kg

g) ¿Cuál de las dos notaciones te parece más adecuada para esta clase de números? Explica por qué.

- a) Trescientos veintidós millones cuatrocientos treinta y nueve mil habitantes.

  b) Tiene más habitantes China. 63 984 000 habitantes más.

  c) China → 1 400 000 000

  India → 1 300 000 000

  E.E.U.U. → 300 000 000

- d) Sufrió más variación en abril.

  e) Subió más el paro en marzo.

  f) La diferencia de variación es del 2,199 %

- g) La notación abreviada, puesto que es la más adecuada para números muy grandes y números muy pequeños por ser más práctica y manejable.

2 Tipos de números decimales

Página 26

1. Pasa a forma decimal.

a) $\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{3}{16}$ **c)** $\sqrt{2}$

d) $\frac{7}{22}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

a) $0,8\overset{\frown}{3}$ b) 0,1875 c) 1,142135…

d) $0,3\overset{\frown}{18}$ e) 0,8755…

2. ¿Qué puedes decir de cada correspondiente decimal?

a) $\frac{5}{9}$ **b)** $\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{9} - \frac{4}{9}$ **d)** $\frac{5}{9} + \frac{4}{9}$

a) $0,\overset{\frown}{5} \to$ Periódico puro b) $0,\overset{\frown}{4} \to$ Periódico puro

c) $0,\overset{\frown}{1} \to$ Periódico puro d) $1 \to$ Exacto

3. En el problema que se propone a continuación, sustituye m y p por números enteros para obtener, en cada caso, un decimal exacto, otro periódico puro y otro periódico mixto:

Un caminante avanza m metros en p pasos.

¿Cuántos metros avanza en cada paso?

Decimal exacto: $m = 18$ metros; $p = 4$ pasos

En cada paso avanza $\frac{18}{4} = 4,5$ metros.

Periódico puro: $m = 10$ metros; $p = 3$ pasos

En cada paso avanza $\frac{10}{3} = 3,\overset{\frown}{3}$ metros.

Periódico mixto: $m = 13$ metros; $p = 15$ pasos

En cada paso avanza $\frac{13}{15} = 0,8\overset{\frown}{6}$ metros.

3 De decimal a fracción

Página 27

1. Completa el proceso para expresar como fracción el número A.

$$A = 0{,}48\overset{\frown}{5}\left\{\begin{array}{l} 1\,000 \cdot A = 485{,}555\ldots \\ \underline{-100 \cdot A = -48{,}555\ldots} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} 1\,000 \cdot A &=& 485{,}555\ldots \\ -100 \cdot A &=& -48{,}555\ldots \\ \hline 900 \cdot A &=& 437 \end{array} \qquad \text{Luego } A = \frac{437}{900}$$

2. Identifica cuáles de los números siguientes son racionales y halla la fracción que les corresponde:

a) $6{,}78$

b) $6{,}\overset{\frown}{78}$

c) $6{,}7\overset{\frown}{8}$

d) $3{,}101001000100001\ldots$

e) $0{,}00\overset{\frown}{4}$

f) $\pi = 3{,}14159265359\ldots$

g) $0{,}\overset{\frown}{004}$

Son racionales a), b), c), e) y g).

a) $6{,}78 = \dfrac{678}{100} = \dfrac{339}{50}$

b) $N = 6{,}\overset{\frown}{78} \;\to\; \begin{array}{rcl} 100N &=& 678{,}\overset{\frown}{78} \\ -N &=& -6{,}\overset{\frown}{78} \\ \hline 99N &=& 672 \end{array} \qquad \text{Luego } N = \dfrac{672}{99} = \dfrac{224}{33}$

c) $N = 6{,}7\overset{\frown}{8} \;\to\; \begin{array}{rcl} 100N &=& 678{,}\overset{\frown}{8} \\ -10N &=& -67{,}\overset{\frown}{8} \\ \hline 90N &=& 611 \end{array} \qquad \text{Luego } N = \dfrac{611}{90}$

d) No es racional.

e) $N = 0{,}00\overset{\frown}{4} \;\to\; \begin{array}{rcl} 1\,000N &=& 4{,}\overset{\frown}{4} \\ -100N &=& -0{,}\overset{\frown}{4} \\ \hline 900N &=& 4 \end{array} \qquad \text{Luego } N = \dfrac{4}{900} = \dfrac{1}{225}$

f) No es racional.

g) $N = 0{,}\overset{\frown}{004} \;\to\; \begin{array}{rcl} 1\,000N &=& 4{,}\overset{\frown}{004} \\ -N &=& -0{,}\overset{\frown}{004} \\ \hline 999N &=& 4 \end{array} \qquad \text{Luego } N = \dfrac{4}{999}$

3. En la información nutricional de las mermeladas de cierta marca, figuran los siguientes contenidos en azúcar por kilo de producto:

CIRUELA: 0,240 kg **FRESA: $0,\widehat{4}$ kg**

MELOCOTÓN: $0,\widehat{36}$ kg **NARANJA: $0,3\widehat{6}$ kg**

Indica, con una fracción, el contenido en azúcar de cada clase de mermelada.

CIRUELA: $0{,}240 \text{ kg} = \dfrac{240}{1000} = \dfrac{6}{25}$ kg

FRESA: $0,\widehat{4} \text{ kg} = \dfrac{4}{9}$

$$N = 0,\widehat{4} \rightarrow \begin{array}{r@{\;=\;}l} 10N & 4,\widehat{4} \\ -N & -0,\widehat{4} \\ \hline 9N & 4 \end{array}$$

MELOCOTÓN: $0,\widehat{36} \text{ kg} = \dfrac{36}{99} = \dfrac{4}{11}$

$$N = 0,\widehat{36} \rightarrow \begin{array}{r@{\;=\;}l} 100N & 36,\widehat{36} \\ -N & -0,\widehat{36} \\ \hline 99N & 36 \end{array}$$

NARANJA: $0,3\widehat{6} \text{ kg} = \dfrac{33}{90} = \dfrac{11}{30}$

$$N = 0,3\widehat{6} \rightarrow \begin{array}{r@{\;=\;}l} 100N & 36,\widehat{6} \\ -10N & -3,\widehat{6} \\ \hline 90N & 33 \end{array}$$

4 Utilización de cantidades aproximadas

Página 28

1. Aproxima, con un número adecuado de cifras significativas, las siguientes cantidades:

a) Superficie de la Península Ibérica: 583 254 km^2.

b) Media de visitas semanales a la página web de una empresa de venta de casas: 13 585.

c) Número de granos en un kilo de arroz: 11 892 583.

d) Número de turistas llegados a cierta localidad costera en el mes de agosto: 87 721.

e) Cantidad de leche en cada uno de los 6 vasos entre los que se ha distribuido una botella de litro.

f) Peso de cada una de las 12 cadenetas fabricadas con un kilo de oro.

a) La cantidad se puede dar con todas sus cifras: 583 254 km^2

Para simplificar se puede decir que la superficie es de 580 000 km^2.

b) 14 000 visitas semanales de media.

c) 12 000 000 granos de arroz.

d) 90 000 turistas.

e) Cada vaso contiene, aproximadamente, 0,17 litros.

f) Aproximadamente 83 gramos.

Página 29

2. **¿Qué cota darías para el error absoluto, tomando las siguientes aproximaciones en el ejercicio resuelto?**

Trozo de cinta → 266,7 cm

Visitantes de un museo → 184 000

Manifestantes → 230 000

Trozo de cinta → ERROR ABSOLUTO < 0,05 cm

Visitantes de un museo → ERROR ABSOLUTO < 500

Manifestantes → ERROR ABSOLUTO < 5 000

3. **Da una cota del error absoluto en estos redondeos:**

23 483 215 → 23 000 000

0,0034826 → 0,0035

ERROR ABSOLUTO < 500 000

ERROR ABSOLUTO < 0,00005

4. **Da una cota del error absoluto en cada valoración de la actividad 1 de la página anterior.**

a) E.A. < 5 000

b) E.A. < 500

c) E.A. < 500 000

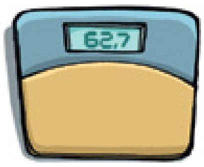
d) E.A. < 500

e) 0,005 *l*

f) 0,5 g

Página 30

5. Berta compra una báscula de baño. En las explicaciones de funcionamiento trae el siguiente ejemplo:

62,7 kg ≤ 

< 62,8 kg

a) ¿Con qué error absoluto trabaja la báscula?

b) La báscula marca para Berta 52,3 kg, y para su marido, 85,4 kg. Da una cota del error relativo para cada pesada.

a) E.A. < 0,05 kg

b) Berta: E.R. $< \frac{0,05}{52,3} = 9,56 \cdot 10^{-4}$

Marido: E.R. $< \frac{0,05}{85,4} = 5,84 \cdot 10^{-4}$

6. Da una cota del error relativo en las valoraciones del ejercicio 4 de la página anterior.

a) E.R. $< \frac{5\,000}{585\,000} = 8,54 \cdot 10^{-3}$

b) E.R. $< \frac{500}{13\,500} = 0,037$

c) E.R. $< \frac{500\,000}{11\,000\,000} = 0,045$

d) E.R. $< \frac{500}{85\,500} = 5,85 \cdot 10^{-3}$

e) E.R. $< \frac{0,005}{0,17} = 0,029$

f) E.R. $< \frac{0,5}{83} = 6,02 \cdot 10^{-3}$

7. ¿Verdadero o falso?

a) El error relativo es siempre menor que uno.

b) Cuanto más pequeño sea el error absoluto, más fina es la medición.

c) Cuanto mayor sea el error relativo mayor es también la finura de la medición.

d) El error absoluto nunca es menor que el relativo.

a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Falso.

d) Falso.

5 La notación científica

Página 31

1. Expresa con todas sus cifras.

a) $2,63 \cdot 10^8$ **b)** $5,8 \cdot 10^{-7}$

a) $2,63 \cdot 10^8 = 263\,000\,000$ b) $5,8 \cdot 10^{-7} = 0,00000058$

2. Pon en notación científica, con tres cifras significativas.

a) $262\,930\,080\,080\,000$ **b)** $2\,361 \cdot 10^9$

c) $0,000000001586$ **d)** $0,256 \cdot 10^{-10}$

a) $262\,930\,080\,080\,000 \approx 2,63 \cdot 10^{14}$ b) $2\,361 \cdot 10^9 \approx 2,36 \cdot 10^{12}$

c) $0,000000001586 \approx 1,59 \cdot 10^{-9}$ d) $0,256 \cdot 10^{-10} = 2,56 \cdot 10^{-11}$

3. Expresa en gramos, utilizando la notación científica.

a) La masa de la Tierra: 5 974 trillones de toneladas.

b) La masa de un electrón: $9,10 \cdot 10^{-31}$ kilos.

a) $5,974 \cdot 10^{27}$ g (trillones, 10^{18}; mover la coma, 10^3; toneladas $\rightarrow$ g, 10^6)

b) $9,10 \cdot 10^{-28}$ g (kg $\rightarrow$ g, 10^3)

4. Considera el dato del ejemplo de arriba:

Población de China: 1 330 140 000 habitantes

Toma una aproximación con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo.

Aproximación: 1 330 000 000 habitantes.

ERROR ABSOLUTO < 5 000 000

ERROR RELATIVO $< \dfrac{5\,000\,000}{1\,330\,000\,000} = 3,76 \cdot 10^{-3}$

5. El volumen de la Tierra, aproximadamente, es:

$$1\,083\,210\,000\,000 \text{ km}^3$$

Exprésalo en metros cúbicos, con tres cifras significativas, y da una cota del error absoluto y otra del error relativo.

$1,08 \cdot 10^{21}$

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^{18}$

ERROR RELATIVO $< \dfrac{5 \cdot 10^{18}}{1,08 \cdot 10^{21}} = 4,63 \cdot 10^{-3}$

Página 32

6. Calcula.

a) $2,25 \cdot 10^{15} - 3,44 \cdot 10^{14}$ **b)** $1,05 \cdot 10^{-9} + 1,8 \cdot 10^{-9}$

c) $1,8 \cdot 10^{11} \cdot 1,4 \cdot 10^{-4}$ **d)** $4,25 \cdot 10^{6} : 1,7 \cdot 10^{-9}$

e) $\dfrac{6,21 \cdot 10^{-7}}{4,60 \cdot 10^{6}}$ **f)** $\dfrac{9,5 \cdot 10^{7} - 3,4 \cdot 10^{8}}{4,1 \cdot 10^{11}}$

a) $2,25 \cdot 10^{15} - 0,344 \cdot 10^{15} = (2,25 - 0,344) \cdot 10^{15} = 1,906 \cdot 10^{15}$

b) $(1,05 + 1,8) \cdot 10^{-9} = 2,85 \cdot 10^{-9}$

c) $(1,8 \cdot 1,4) \cdot 10^{11-4} = 2,52 \cdot 10^{7}$

d) $(4,25 : 1,7) \cdot 10^{6-(-9)} = 2,5 \cdot 10^{15}$

e) $\dfrac{6,21}{4,60} \cdot 10^{-7-6} = 1,35 \cdot 10^{-13}$

f) $\dfrac{(0,95 - 3,4) \cdot 10^{8}}{4,1 \cdot 10^{11}} = \dfrac{-2,45 \cdot 10^{8}}{4,1 \cdot 10^{11}} = \dfrac{-2,45}{4,1} \cdot 10^{8-11} = -0,59 \cdot 10^{-3} = -5,9 \cdot 10^{-4}$

7. Busca los datos necesarios y calcula.

a) ¿Cuántas veces cabría la Luna dentro de la Tierra?

b) ¿Cuántas Lunas habría que juntar para conseguir la masa de la Tierra?

a) Volúmenes: Tierra = $1,0833 \cdot 10^{12}$ km³ Luna = $2,199 \cdot 10^{10}$ km³

$\dfrac{1,0833 \cdot 10^{12}}{2,199 \cdot 10^{10}} = 0,49 \cdot 10^{2} = 49$ veces cabría la Luna dentro de la Tierra.

b) Masas: Tierra = $5,972 \cdot 10^{24}$ kg Luna = $7,349 \cdot 10^{22}$ kg

$\dfrac{5,972 \cdot 10^{24}}{7,349 \cdot 10^{22}} = 0,81 \cdot 10^{2} = 81$ Lunas habría que juntar

8. Busca los datos necesarios y calcula.

Si explotara una estrella en Alfa Centauri, ¿cuánto tiempo tardaríamos en saberlo en la Tierra?

La estrella Alfa Centauri se encuentra a 4,5 años luz de la Tierra. La luz tardará entonces 4,5 años en llegar a la Tierra.

4,5 años = $4,5 \cdot 365,25$ días = $4,5 \cdot 365,25 \cdot 24$ h = $3,9 \cdot 10^{4}$ horas.

9. Calcula la masa, en gramos, de una molécula de agua con los datos siguientes:

— Masa molar del agua: 18 g/mol

— N.° de Avogadro: $6,022 \cdot 10^{23}$

(Busca información sobre el significado del número de Avogadro).

El número de Avogadro es el número de moléculas en un mol de una sustancia cualquiera.

Por tanto, en un mol de agua que pesa 18 g, hay $6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas, por lo que cada una pesará:

$$\frac{18}{6,022 \cdot 10^{23}} = 2,99 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

Página 33

10. Halla con calculadora.

a) $\mathbf{1/300^5}$

b) $\mathbf{(3{,}145 \cdot 10^{-7}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{18})}$

c) $\mathbf{5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10}}$

a) $\dfrac{1}{300^5} = \dfrac{1}{3^5 \cdot 100^5} = \dfrac{1}{243 \cdot 10^{10}} = \dfrac{1}{243} \cdot 10^{-10} \approx 0{,}00412 \cdot 10^{-10} = 4{,}12 \cdot 10^{-13}$

b) $(3{,}145 \cdot 10^{-7}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{18}) = (3{,}145 \cdot 2{,}5) \cdot 10^{11} = 7{,}863 \cdot 10^{11}$

c) $5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10} = 0{,}00583 \cdot 10^{12} + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 0{,}075 \cdot 10^{12} =$

$= (0{,}00583 + 6{,}932 - 0{,}075) \cdot 10^{12} = 6{,}863 \cdot 10^{12}$

Ejercicios y problemas

Página 34

Practica

Relación entre número decimal y fracción

1. **Calcula mentalmente el número decimal equivalente a cada fracción.**

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{8}{5}$ **d)** $\frac{17}{10}$

e) $\frac{15}{100}$ **f)** $\frac{45}{2}$ **g)** $\frac{7}{20}$ **h)** $\frac{31}{25}$

a) 0,75 b) 0,2 c) 1,6 d) 1,7

e) 0,15 f) 22,5 g) 0,35 h) 1,24

2. **Transforma en número decimal las siguientes fracciones:**

a) $\frac{121}{9}$ **b)** $\frac{753}{4}$ **c)** $\frac{1}{18}$ **d)** $\frac{2}{11}$ **e)** $\frac{49}{8}$

a) $13,\widehat{4}$ b) 188,25 c) $0,0\widehat{5}$ d) $0,\widehat{18}$ e) 6,125

3. **Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos y decimales periódicos:**

a) $\frac{13}{8}$ **b)** $\frac{139}{27}$ **c)** $\frac{25}{11}$

d) $\frac{9}{250}$ **e)** $\frac{131}{66}$ **f)** $\frac{223}{18}$

a) 1,625 b) $5,\widehat{148}$ c) $2,\widehat{27}$

d) 0,036 e) $1,9\widehat{84}$ f) $12,3\widehat{8}$

Son decimales exactos a) y d), y decimales periódicos, b), c), e) y f).

4. **Expresa en forma de fracción irreducible.**

a) 1,321 **b)** $2,\widehat{4}$ **c) 0,008** **d)** $5,\widehat{54}$

e) $2,\widehat{35}$ **f)** $0,0\widehat{36}$ **g)** $0,\widehat{945}$ **h)** $0,11\widehat{6}$

a) $1,321 = \frac{1321}{1000}$

b) $\left.\begin{array}{r} 10N = 24,444\ldots \\ N = \ \ 2,444\ldots \end{array}\right\}$ Restando: $10N - N = 22 \to 9N = 22 \to N = \frac{22}{9} \to 2,\widehat{4} = \frac{22}{9}$

c) $0,008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$

d) $\left.\begin{array}{r} 100N = 554,545454\ldots \\ N = \ \ 5,545454\ldots \end{array}\right\}$ Restando: $100N - N = 549 \to N = \frac{549}{99} = \frac{61}{11} \to 5,\widehat{54} = \frac{61}{11}$

e) $\left.\begin{array}{r} 100N = 235,3535\ldots \\ N = \quad 2,3535\ldots \end{array}\right\}$ Restando: $100N - N = 233 \to N = \dfrac{233}{99} \to 2,\widehat{35} = \dfrac{233}{99}$

f) $\left.\begin{array}{r} 1\,000N = 36,3636\ldots \\ 10N = \quad 0,3636\ldots \end{array}\right\}$ Restando: $1\,000N - 10N = 36 \to N = \dfrac{36}{990} = \dfrac{2}{55}$

Por tanto: $0,0\widehat{36} = \dfrac{2}{55}$

g) $\left.\begin{array}{r} 1\,000N = 945,945945\ldots \\ N = \quad 0,945945\ldots \end{array}\right\}$ Restando: $1\,000N - N = 945 \to N = \dfrac{945}{999} = \dfrac{35}{37}$

Por tanto: $0,\widehat{945} = \dfrac{35}{37}$

h) $\left.\begin{array}{r} 1\,000N = 116,6666\ldots \\ 100N = \quad 11,6666\ldots \end{array}\right\}$ Restando: $1\,000N - 100N = 105 \to N = \dfrac{105}{900} = \dfrac{7}{60}$

Por tanto: $0,11\widehat{6} = \dfrac{7}{60}$

5. **Comprueba, pasando a fracción, que los siguientes números decimales corresponden a números enteros:**

$$\mathbf{1,\widehat{9};\ \ 2,\widehat{9};\ \ 7,\widehat{9};\ \ 11,\widehat{9}}$$

Observando el resultado obtenido, ¿qué número entero le corresponde a $126,\widehat{9}$?

- Llamamos: $N = 1{,}999\ldots \to 10N = 19{,}999\ldots$
  $10N - N = 19 - 1 \to 9N = 18 \to N = 2$
  Luego: $1,\widehat{9} = 2$
- Llamamos: $N = 2{,}99\ldots \to 10N = 29{,}99\ldots$
  $10N - N = 29 - 2 \to 9N = 27 \to N = 3$
  Luego: $2,\widehat{9} = 3$
- Llamamos: $N = 7{,}99\ldots \to 10N = 79{,}99\ldots$
  $10N - N = 79 - 7 \to 9N = 72 \to N = 8$
  Por tanto: $7,\widehat{9} = 8$
- Llamamos: $N = 11{,}99\ldots \to 10N = 119{,}99\ldots$
  $10N - N = 119 - 11 \to 9N = 108 \to N = 12$
  Luego: $11,\widehat{9} = 12$

A $126,\widehat{9}$, le corresponde el número entero 127.

6. **Ordena de menor a mayor.**

$$\mathbf{5,53;\ \ 5,\widehat{53};\ \ 5,5\widehat{3};\ \ 5,5;\ \ 5,56;\ \ 5,\widehat{5}}$$

$5,5 < 5,53 < 5,5\widehat{3} < 5,\widehat{53} < 5,\widehat{5} < 5,56$

7. **¿Cuáles de los siguientes números pueden expresarse como fracción?:**

$$3{,}45;\ 1{,}00\widehat{3};\ \sqrt{2};\ 2+\sqrt{5};\ \pi;\ 1{,}\widehat{117}$$

Escribe la fracción que representa a cada uno en los casos en que sea posible.

Se pueden expresar como fracción: $3{,}45$; $1{,}00\widehat{3}$ y $1{,}\widehat{142857}$

- $3{,}45 = \dfrac{345}{100} = \dfrac{69}{20}$
- $1{,}00\widehat{3}$

$$\left.\begin{array}{r} 1000N = 1003{,}333\ldots \\ 100N = \ \ 100{,}333\ldots \end{array}\right\}\ 1\,000N - 100N = 903 \ \to\ N = \frac{903}{900} = \frac{301}{300} \ \to\ 1{,}00\widehat{3} = \frac{301}{300}$$

- $1{,}\widehat{142857}$

$$\left.\begin{array}{r} 1\,000\,000N = 1\,142\,857{,}142857\ldots \\ N = \qquad\quad 1{,}142857\ldots \end{array}\right\}\ 1\,000\,000N - N = 1\,142\,856 \ \to\ N = \frac{1\,142\,856}{999\,999} = \frac{8}{7}$$

$$1{,}\widehat{142857} = \frac{8}{7}$$

8. **Escribe, en cada caso, un decimal exacto y un decimal periódico comprendidos entre los números dados:**

a) $3{,}5$ **y** $3{,}6$ **b)** $3{,}\widehat{4}$ **y** $3{,}\widehat{5}$ **c)** $3{,}2\widehat{5}$ **y** $3{,}2\widehat{56}$

a) Exacto $\to$ 3,55 Periódico $\to$ $3{,}5\widehat{1}$

b) Exacto $\to$ 3,47 Periódico $\to$ $3{,}4\widehat{52}$

c) Exacto $\to$ 3,26 Periódico $\to$ $3{,}25\widehat{8}$

Números aproximados. Errores

9. **Aproxima a las centésimas.**

a) **0,318** **b)** **3,2414** **c)** **18,073**

d) $\dfrac{100}{71}$ **e)** $\dfrac{25}{13}$ **f)** $\dfrac{65}{7}$

a) 0,32

b) 3,24

c) 18,07

d) $\dfrac{100}{71} = 1{,}4084507 \ \to$ la aproximación a las centésimas es 1,41

e) $\dfrac{25}{13} = 1{,}9230769 \ \to$ la aproximación a las centésimas es 1,92

f) $\dfrac{65}{7} = 9{,}2857142 \ \to$ la aproximación a las centésimas es 9,29

10. **Calcula:**

a) El error absoluto cometido en cada una de las aproximaciones realizadas en el ejercicio anterior.

b) Una cota del error relativo cometido en cada caso.

a) a) E. absoluto = |0,318 – 0,32| = 0,002

b) E. absoluto = |3,2414 – 3,24| = 0,0014

c) E. absoluto = |18,073 – 18,07| = 0,003

d) E. absoluto = $\left|\frac{100}{71} - 1,41\right| \approx$ 0,0015

e) E. absoluto = $\left|\frac{25}{13} - 1,92\right| \approx$ 0,003

f) E. absoluto = $\left|\frac{65}{7} - 9,29\right| \approx$ 0,004

b) En todos los casos, al haber redondeado a las centésimas, el error absoluto es menor que 0,005.

a) Error relativo < $\frac{0,005}{0,318}$ < 0,016

b) Error relativo < $\frac{0,005}{3,2414}$ < 0,002

c) Error relativo < $\frac{0,005}{18,073}$ < 0,0003

d) Error relativo < $\frac{0,005}{100/71}$ < 0,004

e) Error relativo < $\frac{0,005}{25/13}$ < 0,003

f) Error relativo < $\frac{0,005}{65/7}$ < 0,00054

11. **Expresa con un número adecuado de cifras significativas.**

a) Audiencia de cierto programa de televisión: 3 017 849 espectadores.

b) Tamaño de un virus: 0,008375 mm.

c) Resultado de 15^7.

d) Precio de un coche: 18 753 €.

e) Presupuesto de un ayuntamiento: 987 245 €.

f) Porcentaje de votos de un candidato a delegado: 37,285 %.

g) Capacidad de un pantano: 3 733 827 000 *l*.

a) 3 000 000 espectadores.

b) 0,008 mm

c) 15^7 = 170 859 375 → 170 000 000

d) 19 000 €

e) 1 000 000 €

f) 37 %

g) 3 750 000 000 *l*

12. **Calcula, en cada uno de los apartados del ejercicio anterior, el error absoluto y el error relativo de las cantidades dadas como aproximaciones.**

a) Error absoluto = 17 849; Error relativo = $\frac{17\,849}{3\,017\,849} \approx$ 0,006

b) Error absoluto = 0,000375; Error relativo = $\frac{0,000375}{0,008375} \approx$ 0,04

c) Error absoluto = 859 375; Error relativo = $\frac{859\,375}{170\,859\,375} \approx$ 0,005

d) Error absoluto = 247; Error relativo = $\frac{247}{18\,753} \approx$ 0,013

e) Error absoluto = 12 755; Error relativo = $\dfrac{12\,755}{987\,245} \approx 0{,}013$

f) Error absoluto = 0,285; Error relativo = $\dfrac{0{,}285}{37{,}285} \approx 0{,}008$

g) Error absoluto = 16 173 000; Error relativo = $\dfrac{16\,173\,000}{3\,733\,827\,000} \approx 0{,}004$

13. Indica, en cada caso, en cuál de las aproximaciones se comete menor error absoluto:

a) $1{,}\widehat{37} \approx \begin{cases} 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{cases}$ **b)** $\dfrac{17}{6} \approx \begin{cases} 2{,}8 \\ 2{,}9 \end{cases}$

a) Si tomamos 1,3 como aproximación de 1,37 → Error absoluto = $|1{,}37 - 1{,}3| = 0{,}07$.

Si tomamos 1,4 → Error absoluto = $|1{,}37 - 1{,}4| = 0{,}03$.

Se comete menor error absoluto tomando 1,4 como valor aproximado.

b) Tomando 2,8 como aproximación → Error absoluto = $\left|\dfrac{17}{6} - 2{,}8\right| = 0{,}0\widehat{3}$.

Tomando 2,9 → Error absoluto = $\left|\dfrac{17}{6} - 2{,}9\right| = 0{,}0\widehat{6}$.

Hay menor error absoluto tomando 2,8 como aproximación.

Notación científica

14. Expresa con una potencia de base 10.

a) 1 000 **b) 1 000 000** **c) 1 000 000 000**

d) 0,001 **e) 0,000001** **f) 0,000000001**

a) 10^3 b) 10^6 c) 10^9

d) 10^{-3} e) 10^{-6} f) 10^{-9}

15. Expresa con todas las cifras.

a) $6{,}25 \cdot 10^8$ **b)** $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ **c)** $3 \cdot 10^{-6}$

d) $5{,}18 \cdot 10^{14}$ **e)** $3{,}215 \cdot 10^{-9}$ **f)** $-4 \cdot 10^{-7}$

a) 625 000 000 b) 0,00027 c) 0,000003

d) 518 000 000 000 000 e) 0,000000003215 f) –0,0000004

16. Escribe en notación científica.

a) 4 230 000 000 **b) 0,00000004**

c) 84 300 **d) 0,000572**

a) $4{,}23 \cdot 10^9$ b) $4 \cdot 10^{-8}$

c) $8{,}43 \cdot 10^4$ d) $5{,}72 \cdot 10^{-4}$

Página 35

17. Relaciona cada uno de estos números con la medida de una de las magnitudes indicadas debajo:

Números: $5,97 \cdot 10^{21}$; $1,5 \cdot 10^{-1}$; $9,1 \cdot 10^{-31}$

Magnitudes:

Paso de un tornillo en milímetros.

Masa del electrón en kilogramos.

Masa de la Tierra en toneladas.

$5,97 \cdot 10^{21} \rightarrow$ Masa de la Tierra en toneladas.

$1,5 \cdot 10^{-1} \rightarrow$ Paso de un tornillo en milímetros.

$9,1 \cdot 10^{-31} \rightarrow$ Masa del electrón en kilogramos.

18. Expresa en notación científica.

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Diámetro, en metros, de una punta de alfiler: 0,1 mm.

c) Presupuesto destinado a Sanidad: 525 miles de millones.

d) Diámetro de las células sanguíneas: 0,00075 mm.

a) $1,628 \cdot 10^6$ €

b) 10^{-1} mm $= 10^{-4}$ m

c) $525 \underbrace{\text{miles}}_{10^3} \text{ de } \underbrace{\text{millones}}_{10^6} = 525 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 525 \cdot 10^9 = 5,25 \cdot 10^{11}$ €

d) $7,5 \cdot 10^{-4}$ mm

19. Reduce.

a) $\dfrac{10^5 \cdot 10^2}{10^6}$ **b)** $\dfrac{10^2 \cdot 10^4}{10^8}$ **c)** $\dfrac{10^5 \cdot 10^7}{10^4 \cdot 10^8}$ **d)** $\dfrac{10^0 \cdot 10^1}{10^2 \cdot 10^3}$

a) $\dfrac{10^{5+2}}{10^6} = \dfrac{10^7}{10^6} = 10^{7-6} = 10$

b) $\dfrac{10^{2+4}}{10^8} = \dfrac{10^6}{10^8} = 10^{6-8} = 10^{-2}$

c) $\dfrac{10^{5+7}}{10^{4+8}} = \dfrac{10^{12}}{10^{12}} = 10^0 = 1$

d) $\dfrac{10^1}{10^5} = 10^{-4}$

20. Calcula mentalmente:

a) $(1,5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$

b) $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{-3})$

c) $(4 \cdot 10^{-12}) : (2 \cdot 10^{-4})$

d) $\sqrt{9 \cdot 10^4}$

e) $(2 \cdot 10^{-3})^3$

f) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}}$

a) $(1,5 \cdot 2) \cdot 10^{7+5} = 3 \cdot 10^{12}$

b) $(3 : 2) \cdot 10^{6-(-3)} = 1,5 \cdot 10^9$

c) $(4 : 2) \cdot 10^{-12-(-4)} = 2 \cdot 10^{-8}$

d) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{10^4} = 3 \cdot 10^{4/2} = 3 \cdot 10^2$

e) $2^3 \cdot (10^{-3})^3 = 8 \cdot 10^{-9}$

f) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-6/3} = 2 \cdot 10^{-2}$

21. **Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.**

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5)$ **c)** $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$

d) $(6 \cdot 10^{-7})^2$ **e)** $\sqrt{121 \cdot 10^{-6}}$ **f)** $(5 \cdot 10^4)^3$

a) $(3{,}5 \cdot 4) \cdot 10^{7+8} = 14 \cdot 10^{15} = 1{,}4 \cdot 10^{16}$

b) $(5 \cdot 2{,}5) \cdot 10^{-8+5} = 12{,}5 \cdot 10^{-3} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$

c) $(1{,}2 : 5) \cdot 10^{7-(-6)} = 0{,}24 \cdot 10^{13} = 2{,}4 \cdot 10^{12}$

d) $36 \cdot 10^{-14} = 3{,}6 \cdot 10^{-13}$

e) $11 \cdot 10^{-6/2} = 11 \cdot 10^{-3} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$

f) $125 \cdot 10^{12} = 1{,}25 \cdot 10^{14}$

22. **Calcula utilizando la notación científica y comprueba, después, con la calculadora.**

a) $5{,}3 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^{10}$ **b)** $3 \cdot 10^{-5} + 8{,}2 \cdot 10^{-6}$

c) $3{,}1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ **d)** $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$

a) $5{,}3 \cdot 10^8 - 300 \cdot 10^8 = (5{,}3 - 300) \cdot 10^8 = -294{,}7 \cdot 10^8 = -2{,}947 \cdot 10^{10}$

b) $3 \cdot 10^{-5} + 0{,}82 \cdot 10^{-5} = (3 + 0{,}82) \cdot 10^{-5} = 3{,}82 \cdot 10^{-5}$

c) $310 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{10} = (310 + 2) \cdot 10^{10} = 312 \cdot 10^{10} = 3{,}12 \cdot 10^{12}$

d) $0{,}6 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-8} = (0{,}6 - 5) \cdot 10^{-8} = -4{,}4 \cdot 10^{-8}$

23. **Expresa en notación científica y calcula.**

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$ **b)** $\dfrac{0{,}000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0{,}00302}$ **c)** $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0{,}00003 - 0{,}00015}$

a) $(7{,}58 \cdot 10^4)^4 : (1{,}2 \cdot 10^4)^2 = [(7{,}58)^4 \cdot 10^{16}] : [(1{,}2)^2 \cdot 10^8] = \dfrac{(7{,}58)^4}{(1{,}2)^2} \cdot 10^{16-8} =$

$= 2\,292{,}52 \cdot 10^8 = 2{,}29252 \cdot 10^{11} \approx 2{,}29 \cdot 10^{11}$

b) $\dfrac{5{,}41 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}0318 \cdot 10^7}{1{,}52 \cdot 10^6 \cdot 3{,}02 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{(5{,}41 \cdot 1{,}0318) \cdot 10^3}{(1{,}52 \cdot 3{,}02) \cdot 10^3} = \dfrac{5{,}582038}{4{,}5904} \approx 1{,}216$

c) $\dfrac{2{,}7 \cdot 10^6 - 13 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-5} - 15 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{(2{,}7 - 13) \cdot 10^6}{(3 - 15) \cdot 10^{-5}} = \dfrac{-10{,}3 \cdot 10^6}{-12 \cdot 10^{-5}} = 0{,}858\overset{\frown}{3} \cdot 10^{11}$

24. **Utiliza la calculadora para efectuar las siguientes operaciones y expresa el resultado con dos y con tres cifras significativas.**

a) $(4{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (8{,}37 \cdot 10^{-4})$ **b)** $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3{,}25 \cdot 10^{-9})$

c) $(8{,}4 \cdot 10^{11}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3$

a) $(4{,}5 \cdot 8{,}37) \cdot 10^{12-4} = 37{,}665 \cdot 10^8 \approx 3{,}7665 \cdot 10^9$

Con 3 cifras significativas $\rightarrow$ $3{,}77 \cdot 10^9$

Con 2 cifras significativas $\rightarrow$ $3{,}8 \cdot 10^9$

b) $(5{,}2 \cdot 3{,}25) \cdot 10^{-4-9} = 16{,}9 \cdot 10^{-13} = 1{,}69 \cdot 10^{-12} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-12}$

c) $(8{,}4 : 3{,}2) \cdot 10^{11-(-6)} = 2{,}625 \cdot 10^{17} \approx 2{,}63 \cdot 10^{17} \approx 2{,}6 \cdot 10^{17}$

d) $(7{,}8)^3 \cdot 10^{-7 \cdot 3} = 474{,}552 \cdot 10^{-21} = 4{,}74552 \cdot 10^{-19} \approx 4{,}75 \cdot 10^{-19} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-19}$

25. **Calcula utilizando la notación científica. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto cometido en cada caso:**

a) $(7{,}5 \cdot 10^6) : (0{,}000086)$

b) $\dfrac{13\,000\,000 - 2\,700\,000}{0{,}00015 \cdot 0{,}00003}$

c) $328\,000\,000 \cdot (0{,}0006)^2$

d) $(45\,000)^2 - 85\,400\,000$

a) $(7{,}5 \cdot 10^6) : (8{,}6 \cdot 10^{-5}) = (7{,}5 : 8{,}6) \cdot 10^{6-(-5)} = 0{,}872093023 \cdot 10^{11} = 8{,}72093023 \cdot 10^{10}$

El resultado con tres cifras significativas es $8{,}72 \cdot 10^{10}$.

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^7$

b) $\dfrac{1{,}3 \cdot 10^7 - 0{,}27 \cdot 10^7}{15 \cdot 10^{-5} - 3 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{1{,}03 \cdot 10^7}{12 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{1{,}03 \cdot 10^7}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} = 0{,}858\overset{\frown}{3} \cdot 10^{11} = 8{,}58\overset{\frown}{3} \cdot 10^{10}$

Tomando tres cifras significativas, obtenemos $8{,}58 \cdot 10^{10}$.

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^7$

c) $3{,}28 \cdot 10^8 \cdot (6 \cdot 10^{-4})^2 = 3{,}28 \cdot 10^8 \cdot 36 \cdot 10^{-8} = 3{,}28 \cdot 36 = 118{,}08 = 1{,}1808 \cdot 10^2$

El resultado, con tres cifras significativas, es $1{,}18 \cdot 10^2$.

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^{-1}$

d) $(4{,}5 \cdot 10^4)^2 - 8{,}54 \cdot 10^7 = 20{,}25 \cdot 10^8 - 8{,}54 \cdot 10^7 = 193{,}96 \cdot 10^7 = 1{,}9396 \cdot 10^9$

Tomando tres cifras significativas, obtenemos $1{,}94 \cdot 10^9$.

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^6$

Aplica lo aprendido

26. **Comprueba, pasando a fracción, que el resultado de estas operaciones es un número entero.**

a) $6{,}\overset{\frown}{17} + 3{,}\overset{\frown}{82}$

b) $4{,}\overset{\frown}{36} : 0{,}\overset{\frown}{16}$

c) $2{,}6\overset{\frown}{9} + 9{,}3$

d) $1{,}4 : 1{,}\overset{\frown}{5} + 0{,}1$

a) • Pasamos $6{,}\overset{\frown}{17}$ a fracción:

$N = 6{,}1717\ldots \qquad 100N = 617{,}1717\ldots$

$100N - N = 617 - 6 \rightarrow 99N = 611 \rightarrow N = \dfrac{611}{99} \rightarrow 6{,}\overset{\frown}{17} = \dfrac{611}{99}$

• Pasamos $3{,}\overset{\frown}{82}$ a fracción:

$N = 3{,}8282\ldots \qquad 100N = 382{,}8282\ldots$

$100N - N = 382 - 3 \rightarrow 99N = 379 \rightarrow N = \dfrac{379}{99} \rightarrow 3{,}\overset{\frown}{82} = \dfrac{379}{99}$

Por tanto: $6{,}\overset{\frown}{17} + 3{,}\overset{\frown}{82} = \dfrac{611}{99} + \dfrac{379}{99} = \dfrac{990}{99} = 10$

b) • Pasamos $4,\overset{\frown}{36}$ a fracción:

$N = 4{,}3636...$ $\quad\quad 100N = 436{,}3636...$

$100N - N = 436 - 4 \rightarrow 99N = 432 \rightarrow N = \dfrac{432}{99} \rightarrow 4,\overset{\frown}{36} = \dfrac{432}{99}$

• Pasamos $0,\overset{\frown}{16}$ a fracción:

$N = 0{,}1616...$ $\quad\quad 100N = 16{,}1616...$

$100N - N = 16 - 0 \rightarrow 99N = 16 \rightarrow N = \dfrac{16}{99} \rightarrow 0,\overset{\frown}{16} = \dfrac{16}{99}$

Por tanto: $4,\overset{\frown}{36} : 30,\overset{\frown}{16} = \dfrac{432}{99} : \dfrac{16}{99} = \dfrac{432}{16} = 27$

c) • Pasamos a fracción el número $2,6\overset{\frown}{9}$:

$N = 2{,}6999...$ $\quad\quad 10N = 26{,}9999...$ $\quad\quad 100N = 269{,}9999...$

$100N - 10N = 269 - 26 \rightarrow 90N = 243 \rightarrow N = \dfrac{243}{90} \rightarrow 2,6\overset{\frown}{9} = \dfrac{243}{90}$

• Pasamos a fracción el número 9,3: $\quad 9{,}3 = \dfrac{93}{10}$

Por tanto: $2,6\overset{\frown}{9} + 9,3 = \dfrac{243}{90} + \dfrac{93}{10} = \dfrac{243}{90} + \dfrac{837}{90} = \dfrac{1\,080}{90} = 12$

d) • Pasamos a fracción los números decimales exactos:

$1{,}4 = \dfrac{14}{10}$ $\quad\quad 0{,}1 = \dfrac{1}{10}$

• Pasamos a fracción el número $1,\overset{\frown}{5}$:

$N = 1{,}555...$ $\quad\quad 10N = 15{,}555...$

$10N - N = 15 - 1 \rightarrow 9N = 14 \rightarrow N = \dfrac{14}{9} \rightarrow 1,\overset{\frown}{5} = \dfrac{14}{9}$

Por tanto: $1,4 : 1,\overset{\frown}{5} + 0,1 = \dfrac{14}{10} : \dfrac{14}{9} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$

27. **Utiliza la calculadora para expresar en forma decimal las siguientes fracciones:**

$$\frac{179}{5}, \frac{23}{6}, \frac{59}{8}, \frac{129}{20}, \frac{425}{9}, \frac{45}{7}$$

Observa los denominadores y razona sobre qué condición ha de cumplir una fracción para que pueda transformarse en un decimal exacto o periódico.

$\dfrac{79}{5} = 15{,}8$ $\quad\quad \dfrac{23}{6} = 3,8\overset{\frown}{3}$ $\quad\quad \dfrac{59}{8} = 7{,}375$

$\dfrac{129}{20} = 6{,}45$ $\quad\quad \dfrac{425}{9} = 47,\overset{\frown}{2}$ $\quad\quad \dfrac{45}{7} = 6,\overset{\frown}{428571}$

Una fracción se transforma en un número decimal exacto si el denominador de la fracción solo tiene como factores primos el 2 y el 5. Eso le ocurre a las fracciones $\dfrac{79}{5}, \dfrac{59}{8}$ y $\dfrac{129}{20}$.

Sin embargo, si el denominador tiene factores distintos de 2 o 5, la expresión decimal correspondiente es periódica. Eso le ocurre a las fracciones $\dfrac{23}{6}, \dfrac{425}{9}$ y $\dfrac{45}{7}$.

28. **Di cuál es la vigésima cifra decimal de estos números cuando los expresamos como decimales.**

a) $\dfrac{47}{111}$ **b)** $\dfrac{123}{990}$ **c)** $\dfrac{45}{13}$

a) $\dfrac{47}{111} = 0,\widehat{423}$ → La vigésima cifra decimal $(20 = 6 \cdot 3 + 2)$ coincidirá con la que ocupa la segunda posición; en este caso, el 2.

b) $\dfrac{123}{990} = 0,1\widehat{24}$ → La vigésima cifra decimal coincidirá con la primera cifra del periodo $(20 - 1 = 19$ y $19 = 9 \cdot 2 + 1)$; en este caso, el 2.

c) $\dfrac{45}{13} = 3,\widehat{461538}$ → La vigésima cifra decimal coincidirá con la que ocupa el segundo lugar $(20 = 6 \cdot 3 + 2)$; en este caso, el 6.

29. **Los números 2,5 y 2,6 son dos aproximaciones del valor $n = 18/7$.**

a) Calcula el error absoluto en cada caso. ¿Cuál de los dos es más próximo a n?

b) Calcula en cada caso una cota del error relativo.

a) $\dfrac{18}{7} \approx 2,571$

La aproximación 2,6 está más próxima a $\dfrac{18}{7}$.

Aproximando a 2,5 → Error absoluto = 2,571 – 2,5 = 0,071

Aproximando a 2,6 → Error absoluto = 2,6 – 2,571 = 0,029

b) Tomando como aproximación 2,5 → Error relativo = $\dfrac{0,071}{18/7} < 0,028$.

Tomando como aproximación 2,6 → Error relativo = $\dfrac{0,029}{18/7} < 0,0113$.

Página 36

30. Escribe una aproximación de los siguientes números con un error menor que cinco milésimas:

a) 5,7468 **b) 12,5271** **c) 8,0018**

a) Tomando 5,75 como aproximación, el error absoluto que se comete es:

$$5{,}75 - 5{,}7468 = 3{,}2 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$$

b) Aproximando a 12,53 el error absoluto será: $2{,}53 - 12{,}5271 = 2{,}9 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$

c) Tomando 8 como aproximación, el error absoluto será: $8{,}0018 - 8 = 1{,}8 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$

31. Indica cuánto ha de valer *n* para que se verifique cada igualdad:

a) $0{,}0000000023 = 2{,}3 \cdot 10^n$

b) $87{,}1 \cdot 10^{-6} = 8{,}71 \cdot 10^n$

c) $1\,250\,000 = 1{,}25 \cdot 10^n$

d) $254{,}2 \cdot 10^4 = 2{,}542 \cdot 10^n$

e) $0{,}000015 \cdot 10^{-2} = 1{,}5 \cdot 10^n$

a) $0{,}0000000023 = 2{,}3 \cdot 10^{-9} \rightarrow n = -9$

b) $87{,}1 \cdot 10^{-6} = \frac{87{,}1}{10} \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 8{,}71 \cdot 10^{-5} \rightarrow n = -5$

c) $1\,250\,000 = 1{,}25 \cdot 10^6 \rightarrow n = 6$

d) $254{,}2 \cdot 10^4 = \frac{254{,}2}{100} \cdot 10^4 \cdot 10^2 = 2{,}542 \cdot 10^6 \rightarrow n = 6$

e) $0{,}000015 \cdot 10^{-2} = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2} = 1{,}5 \cdot 10^{-7} \rightarrow n = -7$

32. Un coche comprado hace 7 años por 17 500 €, se vende hoy por 5 800 €. ¿Cuál ha sido el coste por día? Da una cota del error absoluto y otra del error relativo de tu respuesta.

El valor que ha perdido el coche es 17 500 – 5 800 = 11 700 €.

7 años = 7 · 365 días = 2 555 días

El coste por día será $\frac{11\,700}{2\,555} = 4{,}58$ €.

ERROR ABSOLUTO < 0,005

ERROR RELATIVO $< \frac{0{,}005}{4{,}58} < 1{,}09 \cdot 10^{-3}$

33. **Un caminante se entretiene contando sus pasos en un circuito de senderismo, señalizado con banderolas cada 100 metros.**

En 100 metros → 123 pasos

En 500 metros → 622 pasos

En un kilómetro → 1 214 pasos

¿Cuánto avanza por término medio en cada paso?

¿Qué dato has utilizado? Explica por qué.

Eln los 100 primeros metros avanza, en cada paso, $\frac{100}{123} = 0,81$ metros.

En los 500 primeros metros avanza, en cada paso, $\frac{500}{622} = 0,8$ metros.

En los 1 000 primeros metros avanza, en cada paso, $\frac{1000}{1214} = 0,82$ metros.

Por término medio, en cada paso avanza 0,82 metros. Se ha utilizado el último dato, los pasos que ha dado en los últimos 1 000 metros, ya que en este dato están incluidos los anteriores.

34. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

35. **El presupuesto destinado a infraestructuras para cierta región es de 3 430 millones de euros.**

a) Expresa la cantidad en notación científica.

b) Da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido al tomar dos cifras significativas.

a) 3 430 millones $= 3\,430 \cdot 10^6 = 3,43 \cdot 10^9$ €.

b) Con dos cifras significativas, la cantidad es $3,4 \cdot 10^9$; es decir, 34 cientos de millones de euros.

ERROR ABSOLUTO $< 0,5$ cientos de millones $= 0,5 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^7$

ERROR RELATIVO $< \frac{0,5 \text{ cientos de millones}}{3\,430 \text{ millones}} = \frac{50}{3\,430} < 0,02$

36. **El consumo de agua en España es, aproximadamente, de 142 litros por habitante y día.**

¿Cuál es el consumo anual, en metros cúbicos, de toda la población? Da el resultado en notación científica con una cota del error absoluto y otra del error relativo.

142 *l* por habitante y día, luego serán $142 \cdot 365 = 51\,830 = 5,183 \cdot 10^4$ *l* al año.

En España, al finalizar 2015, había una población de aproximadamente 46,5 millones de personas, es decir, $4,65 \cdot 10^7$ personas.

Luego: $(5,183 \cdot 10^4) \cdot (4,65 \cdot 10^7) = 24,1 \cdot 10^{11} = 2,41 \cdot 10^{12}$ *l* será el consumo de toda la población en un año.

Pasamos el resultado a m^3: $2,41 \cdot 10^{12}$ *l* $= 2,41 \cdot 10^{12}$ dm$^3 = 2,41 \cdot 10^9$ m^3

ERROR ABSOLUTO $< 0,005 \cdot 10^9$

ERROR RELATIVO $< \frac{0,005 \cdot 10^9}{2,41 \cdot 10^9} = 2,07 \cdot 10^{-3}$

37. **La masa del Sol es unas 330 000 veces la de la Tierra, y esta es $5,97 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol en kilogramos.**

$M_{Sol} = 330\,000 \cdot 5,97 \cdot 10^{21} = 33 \cdot 5,97 \cdot 10^{25} = 1,9701 \cdot 10^{27}$ t

$M_{Sol} = 1,9701 \cdot 10^{30}$ kg

Resuelve problemas

38. **Dos problemas inversos.**

a) Un ciclista avanza a la velocidad de 22,7 km/h. ¿Cuál es su velocidad en metros por segundo?

b) Un peatón camina a razón de dos pasos por segundo, avanzando 0,85 m en cada paso. ¿Cuál es su velocidad en kilómetros por hora?

a) $\dfrac{22,7 \cdot 1000}{3\,600} = 6,3$ m/s

b) $v = \dfrac{e}{t} = \dfrac{1,7 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1,7$ m/s $\rightarrow \dfrac{1,7 : 1000}{1/3\,600} = \dfrac{1,7 \cdot 3\,600}{1000} = 6,12$ km/h

39. **Un conductor se detiene a repostar en una gasolinera cuando se enciende la luz de reserva. Pone 54,8 litros de gasoil, a 1,047 €/*l* y no vuelve a repostar hasta que se vuelve a encender el piloto de reserva, 912 km después.**

a) ¿Cuánto abona en la gasolinera?

b) ¿Cuál es el gasto en combustible de su vehículo? (en litros/100 km)

c) ¿Cuál es el gasto, en euros, por cada 100 km?

a) $54,8 \cdot 1,047 = 57,38$ €

b) Ha gastado, en 912 km, 54,8 *l*. Por tanto en 100 km habrá gastado:

$\dfrac{54,8}{912} \cdot 100 = 6,01\ l$

c) Por cada 100 km, gastará $6,01 \cdot 1,047 = 6,29$ €

40. **Una máquina embotelladora llena 5 botellas de refresco cada 1,55 segundos. ¿Cuánto tardará en llenar una tanda de 20 000 botellas?**

Botellas de refresco	Tiempo
5	1,55
20 000	x

Luego $x = \dfrac{1,55 \cdot 20\,000}{5} = 6\,200$ segundos

Tardará 6 200 segundos en llenar una tanda de 20 000 botellas

41. **Un hostelero compra una partida de 100 botellas de vino, de 75 *cl*, a 6,80 €/botella, y lo ofrece en el restaurante a 11,90 € la botella y 3,50 € la copa de 15 *cl*.**

¿Cuál es finalmente la ganancia si ha colocado 73 botellas enteras y el resto por copas?

- La compra le supone 100 · 6,80 = 680 €
- Las 73 botellas enteras las vende por: 73 · 11,90 = 868,70 €
- Con 100 – 73 = 27 botellas restantes puede servir 135 copas

  27 · 75 = 2 025 *cl* en las 27 botellas

  $\frac{2\,025}{15} = 135$ copas

  Luego con las copas gana: 135 · 3,50 = 472,50 €
- En total gana 868,70 + 472,50 = 1 341,20 €
- Las ganancias son 1 341,20 – 680 = 661,20 €

Página 37

42. Una fábrica de alimentos para ganado prepara cierto tipo de pienso con los siguientes componentes, cantidades y precios:

	CANTIDAD	PRECIO
MAÍZ	1,75 t	178 €/t
CEBADA	2,150 t	164 €/t
COLZA	0,5 t	327 €/t
SALVADO	0,85 t	275 €/t
HARINA DE PESCADO	250 kg	1,58 €/kg
OTROS		375 €

Después comercializa el pienso envasado en sacos de 20 kilos. ¿A cuánto sale cada saco?

Maíz $\rightarrow$ 1,75 · 178 = 311,50 €

Cebada $\rightarrow$ 2,150 · 164 = 352,60 €

Colza $\rightarrow$ 0,5 · 327 = 163,50 €

Salvado $\rightarrow$ 0,85 · 275 = 233,75 €

Harina de pescado $\rightarrow$ 250 · 1,58 = 395 €

Otros $\rightarrow$ 375 €

En total: 1 831,35 €

El total de pienso asciende a:
$$\left.\begin{array}{l}\text{Maíz} = 1\,750 \text{ kg}\\ \text{Cebada} = 2\,150 \text{ kg}\\ \text{Colza} = 500 \text{ kg}\\ \text{Salvado} = 850 \text{ kg}\\ \text{Harina de pescado} = 250 \text{ kg}\end{array}\right\} 5\,500 \text{ kg}$$

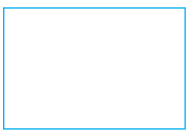
Podemos envasar $\dfrac{5\,500}{20} = 275$ sacos

Cada saco costará: $\dfrac{1831,35}{275} = 6,66$ €

43. Vamos a comprar un tablero de aglomerado de 1,20 m × 0,80 m.

a) ¿Cuánto nos costará si se vende a 13,85 €/m²?

b) ¿Cuánto pesará si el catálogo anuncia 6,99 kg/m²?

a) 

0,80 m $\longrightarrow$ Superficie = 0,96 m²

1,20 m

Costará 0,96 · 13,85 = 13,30 €

b) Pesará 0,96 · 6,99 = 6,71 Kg

44. **El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g, y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Con cuántos virus igualaríamos el peso de una ballena?**

1 t tiene 10^6 g; por tanto, 138 t tendrán $1,38 \cdot 10^8$ g.

Como un virus pesa 10^{-18} g, entonces la ballena azul necesita:

$\dfrac{1,38 \cdot 10^8}{10^{-18}} = 1,38 \cdot 10^{26}$ virus para conseguir su peso.

45. **Si en 50 kg de arena hay unos $3 \cdot 10^6$ granos, ¿cuántos granos habrá en una tonelada?**

1 tonelada = 1 000 kg = $20 \cdot 50$ kg

En 50 kg hay $3 \cdot 10^6$ granos. En 1 tonelada habrá $20 \cdot 3 \cdot 10^6 = 60 \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^7$ granos.

46. **La dosis de una vacuna es 0,05 cm³. Si tiene 100 000 000 bacterias por cm³, ¿cuántas bacterias hay en una dosis? Exprésalo en notación científica.**

En 1 cm³ hay 10^8 bacterias $\rightarrow$ en una dosis habrá:

$0,05 \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^6$ bacterias

47. **Si la velocidad de crecimiento del cabello humano es $1,6 \cdot 10^{-8}$ km/h, ¿cuántos centímetros crece el pelo en un mes? ¿Y en un año?**

Calculamos el número de horas que hay en un mes: $30 \cdot 24 = 720$ h

Crecimiento del pelo en 1 mes:

$1,6 \cdot 10^{-8} \cdot 720 \text{ km} = 1\,152 \cdot 10^{-8} \text{ km} = 1,152 \cdot 10^{-5} \text{ km} \approx 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ km} = 1,15 \text{ cm}$

Calculamos el número de horas que hay en un año:

$365 \cdot 24 = 8\,760$ h

El crecimiento será:

$8\,760 \cdot 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ km} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ km} = 14 \text{ cm}$

48. **El coeficiente de dilatación del cobre es $16 \cdot 10^{-6}$ (alargamiento de una unidad de longitud al elevar la temperatura un grado).**

¿Cuánto se alargará un cable de cobre de 100 metros, al subir la temperatura de 8 °C a 22 °C?

Longitud final = longitud inicial $\cdot (1 + 16 \cdot 10^{-6} \cdot 14)$

$L = 100 \cdot (1 + 224 \cdot 10^{-6})$

$L = 100 \cdot (1 + 2,24 \cdot 10^{-4}) = 100 \cdot (1 + 0,000224) = 100 \cdot (1,000224) = 100,0224$ m

49. **Consigue los datos necesarios y responde.**

La población mundial actual ronda los $7{,}4 \cdot 10^9$ habitantes.

a) ¿Cuánto ha tardado en doblarse?

b) ¿Cuánto tardó la vez anterior? ¿Y la anterior? Y …

c) Compara los tiempos invertidos en las cuatro últimas duplicaciones.

El dato de la población mundial corresponde al año 2016, que es el que se usará para el primer apartado.

a) La población mundial alcanzó los 3 700 millones, la mitad de la actual, en 1970.

Por tanto, ha tardado en doblarse 46 años.

b) La población mundial era de 1 850 millones en 1915, aproximadamente.

Por tanto, tardó en doblarse 55 años.

Era de 925 millones en 1775, es decir, tardó 140 años.

Era de 462,5 millones en 1375, luego esta vez tardó 400 años.

c) Se aprecia que la población mundial ha tardado muchísimo menos en duplicarse cuanto más nos acercamos a la época actual.

NOTA: la información de la población mundial se ha tomado de la página www.apuntesdedemografia.com

50. **Consigue los datos necesarios y resuelve:**

Piensa en una nave imaginaria que fuera capaz de cubrir en un segundo una distancia equivalente a la que separa la Tierra del Sol.

Estima el tiempo que esa nave tardaría en llegar desde la Tierra al centro de nuestra galaxia.

La distancia que separa la Tierra y el Sol es de 150 millones de kilómetros, es decir, $1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Si la nave imaginaria cubre esta distancia en 1 segundo, llevaría una velocidad de $1{,}5 \cdot 10^8$ km/s.

Aunque las informaciones que aparecen en Internet son muy dispares, vamos a considerar que la distancia de la Tierra al centro de nuestra galaxia es aproximadamente 25 000 años luz. Un año luz equivale aproximadamente a $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km, luego la distancia de la Tierra al centro de nuestra galaxia es:

$(2{,}5 \cdot 10^4) \cdot (9{,}46 \cdot 10^{12}) = 23{,}65 \cdot 10^{16} = 2{,}365 \cdot 10^{17}$ km

$$v = \frac{e}{t} \to t = \frac{e}{v} = \frac{2{,}365 \cdot 10^{17} \text{ km}}{1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km/s}} = 1{,}577 \cdot 10^9 \text{ segundos}$$

Curiosidades matemáticas

Opina: ¿decimal o entero?

Calcula la fracción generatriz del decimal periódico puro:

0,999999…

Reflexiona sobre el resultado.

¿Te parece coherente?

Razona tu respuesta.

Al calcular la fracción generatriz del decimal periódico $N = 0{,}999\ldots$, obtenemos la unidad:

$10N = 9{,}999\ldots \rightarrow 10N - N = 9 \rightarrow 9N = 9 \rightarrow N = 1$

¡Y no hay ningún error! Observa que 0,999… tiene infinitas cifras decimales, todas nueves. Y si te propones imaginar un decimal exacto muy, muy, muy pequeño, tan pequeño como quieras, resulta que la diferencia $1 - N$ es aún menor que tu número imaginado.

Es decir, que N está "pegado" al 1, tan cerca del uno, que no hay nada en medio (aquí tocamos el concepto de "límite", que se estudia en cursos superiores). Podemos decir tranquilamente que el valor de 0,999… es 1.

Peso medio

Un arriero lleva en su carro veinte sacos de trigo que pesan, por término medio, 35,5 kg.

Tras pernoctar en una venta, paga al posadero en especie, para lo cual quita 1 kg de trigo del primer saco, 2 kg del segundo, 3 kg del tercero y así, sucesivamente, hasta el último. ¿Cuál es ahora el peso medio de los sacos?

Ha retirado, por término medio $\dfrac{1+20}{2} = 10{,}5$ kilos por saco.

O bien: $\dfrac{1+2+3+\ldots+20}{20} = \dfrac{210}{20} = 10{,}5$ kg por saco.

Por tanto, ahora el peso medio será $35{,}5 - 10{,}5 = 25$ kg.

Una larga cuenta

$S = 0{,}001 - 0{,}002 + 0{,}003 - 0{,}004 + \ldots + 0{,}997 - 0{,}998 + 0{,}999$

$S = (0{,}001 - 0{,}002) + (0{,}003 - 0{,}004) + \ldots + (0{,}997 - 0{,}998) + 0{,}999$

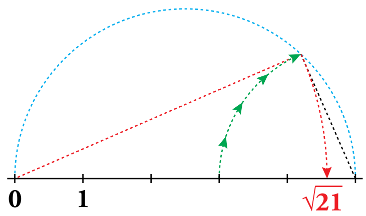
Observa que la expresión aritmética se ha propuesto como una suma de 500 sumandos, los 499 primeros entre paréntesis y 0,999 al final. El valor de cada paréntesis es de una milésima negativa (–0,001). Por tanto:

$S = 499 \cdot (-0{,}001) + 0{,}999 = 0{,}999 - 0{,}499 = 0{,}5$

2 Números reales: la recta real

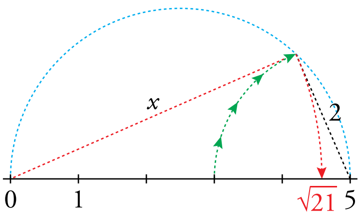
Página 41

1. **a) Justifica que el punto representado es $\sqrt{21}$.**



b) Representa $\sqrt{27}$ $(27 = 36 - 9)$ y $\sqrt{40}$ $(40 = 36 + 4)$.

a)

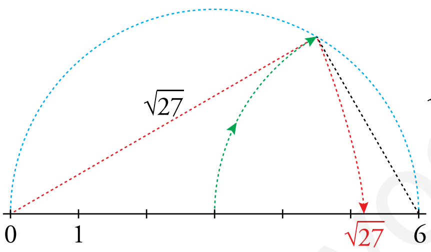


Aplicando Pitágoras:

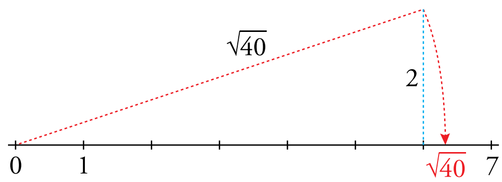
$5^2 = x^2 + 2^2$

$25 = x^2 + 4 \rightarrow x^2 = 25 - 4 = 21 \rightarrow x = \sqrt{21}$

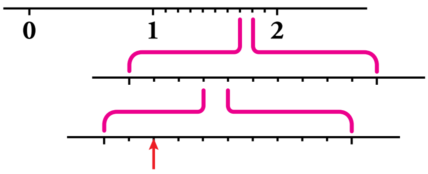
b)



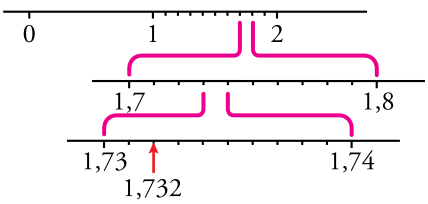
$\sqrt{27} = \sqrt{6^2 - 3^2}$

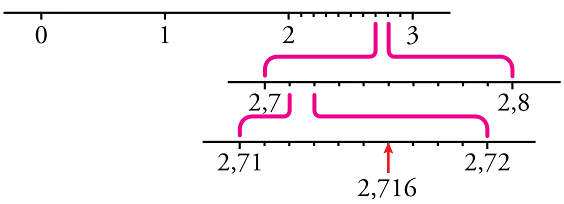


2. **¿Qué número es el que hemos señalado con una flecha?**



Representa, del mismo modo, el 2,716.





3 Tramos en la recta real: intervalos y semirrectas

Página 43

1. Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.

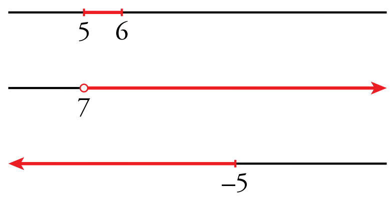
b) Mayores que 7.

c) Menores o iguales que –5.

a) $[5, 6]$

b) $(7, +\infty)$

c) $(-\infty, -5]$



2. Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x \,/\, 3 \le x < 5\}$

b) $\{x \,/\, x \ge 0\}$

c) $\{x \,/\, -3 < x < 1\}$

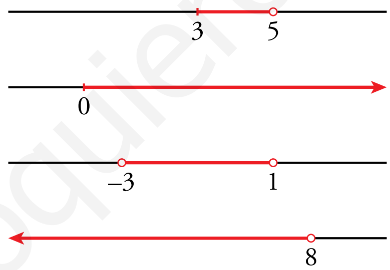
d) $\{x \,/\, x < 8\}$

a) $[3, 5)$

b) $[0, +\infty)$

c) $(-3, 1)$

d) $(-\infty, 8)$



3. Escribe en forma de desigualdad y representa:

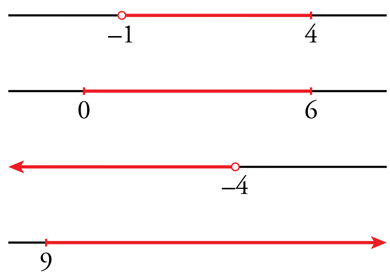
a) $(-1, 4]$ **b)** $[0, 6]$ **c)** $(-\infty, -4)$ **d)** $[9, +\infty)$

a) $\{x \,/\, -1 < x \le 4\}$

b) $\{x \,/\, 0 \le x \le 6\}$

c) $\{x \,/\, x < -4\}$

d) $\{x \,/\, x \ge 9\}$



4 Raíces y radicales

Página 44

Cálculo mental

1. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ **b)** $\sqrt[k]{-243} = -3$ **c)** $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ **d)** $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

a) $\sqrt[3]{k} = 2 \rightarrow k = 2^3 = 8$

b) $\sqrt[k]{-243} = -3 \rightarrow -243 = (-3)^k \rightarrow (-3)^5 = (-3)^k \rightarrow k = 5$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3} \rightarrow k = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

d) $\sqrt[k]{1\,024} = 2 \rightarrow 1\,024 = 2^k \rightarrow 2^{10} = 2^k \rightarrow k = 10$

2. Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ **b)** $\sqrt[5]{32}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt[8]{0}$ **e)** $\sqrt[4]{81}$ **f)** $\sqrt[3]{125}$

a) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

b) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

c) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

d) $\sqrt[8]{0} = 0$

e) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

f) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

1. Expresa en forma exponencial cada una de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{x}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5$ **c)** $\sqrt[15]{a^6}$

d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ **f)** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

a) $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$

b) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5 = (x^{2/3})^5 = x^{10/3}$

c) $\sqrt[15]{a^6} = a^{6/15} = a^{2/5}$

d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}} = (a^7)^{1/2} = a^{7/2}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = (x^{1/2})^{1/3} = x^{1/6}$

f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}} = a^{k/(n \cdot m)}$

2. Calcula.

a) $4^{1/2}$ **b)** $125^{1/3}$ **c)** $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ **e)** $64^{5/6}$ **f)** $36^{3/2}$

a) $4^{1/2} = (2^2)^{1/2} = 2$

b) $125^{1/3} = (5^3)^{1/3} = 5$

c) $625^{1/4} = (5^4)^{1/4} = 5$

d) $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$

e) $64^{5/6} = (2^6)^{5/6} = 2^5 = 32$

f) $36^{3/2} = (6^2)^{3/2} = 6^3 = 216$

3. Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$

b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$

d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

e) $[(x^{1/2})^5]^{1/3}$

f) $(y^3 \cdot z^2)^{2/3}$

a) $x^{7/9} = \sqrt[9]{x^7}$

b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3} = \sqrt[3]{(m \cdot n)^5}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5} = x^{2 \cdot 1/3 \cdot 1/5} = x^{2/15} = \sqrt[15]{x^2}$

e) $[(x^{1/2})^5]^{1/3} = x^{1/2 \cdot 5 \cdot 1/3} = x^{5/6} = \sqrt[6]{x^5}$

f) $(y^3 \cdot z^2)^{2/3} = \sqrt[3]{(y^3 \cdot z^2)^2} = \sqrt[3]{y^6 \cdot z^4}$

5 Operaciones con radicales

Página 46

1. Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[4]{x^3}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) y^2

d) $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ e) $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2. Simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 b^5 c}}{\sqrt{ab^3 c^3}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$ **e)** $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)$ **f)** $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{9^3}{3^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{\dfrac{(2^4)^2}{2^5}} = \sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{3^2}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{ab^3 \cdot c^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{a^3 \cdot b^5 \cdot c}{a^2 \cdot b^6 \cdot c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{b \cdot c^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{b \cdot c}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = \sqrt[3]{a^{12}} = a^4$

e) $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right) = \sqrt[6]{x^9} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{x^{11}} = x\sqrt[6]{x^5}$

f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 = \left(\sqrt[8]{2}\right)^8 = 2$

3. Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt[10]{a^4 b^6}$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{6^2} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{6^2 \cdot 3} = \sqrt[6]{108}$

c) $\sqrt[10]{a^4 \cdot b^6} = \sqrt[5]{a^2 \cdot b^3}$

4. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ **b)** $\sqrt[3]{81a^3 b^5 c}$ **c)** $\sqrt[3]{64}$

a) $2x\sqrt[3]{2^2 \cdot x} = 2x\sqrt[3]{4x}$ b) $3ab\sqrt[3]{3b^2 \cdot c}$ c) 4

5. Efectúa.

a) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}$

a) $\sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}$

6. Suprime el radical del denominador.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$

d) $\frac{8}{\sqrt[3]{5^2}}$ **e)** $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$ **f)** $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{25}}{5}$

d) $\frac{8}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{8 \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5}} = \frac{8 \cdot \sqrt[3]{5}}{5}$

e) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{27}}{3}$

f) $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

Ejercicios y problemas

Página 47

Practica

Números racionales e irracionales

1. **a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos enteros?**

$$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

a) No pueden expresarse como cociente: $\sqrt{3}$; 3π y $-2\sqrt{5}$.

b) $-2 = \dfrac{-4}{2};\ 1{,}7 = \dfrac{17}{10};\ 4{,}\widehat{2} = \dfrac{42-4}{9} = \dfrac{38}{9};\ -3{,}7\widehat{5} = -\dfrac{375-37}{90} = -\dfrac{338}{90} = -\dfrac{169}{45}$

c) Son irracionales: $\sqrt{3}$, $-2\sqrt{5}$ y 3π.

2. **a) Clasifica en racionales o irracionales.**

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

c) ¿Cuáles son números reales?

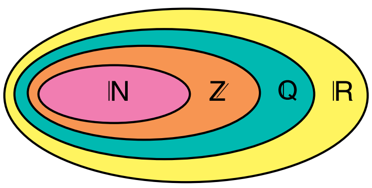
a) Racionales: $0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\dfrac{7}{3}$ Irracionales: $\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$

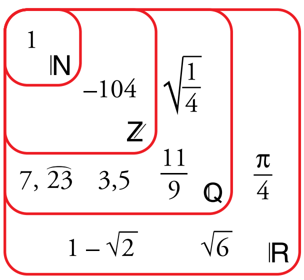
b) $-\dfrac{7}{3} < -\sqrt{4} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}8\widehat{7} < 2\pi$

c) Todos son números reales.

3. **Sitúa los siguientes números en un diagrama como el adjunto:**

$$1;\ 7{,}\widehat{23};\ 1-\sqrt{2};\ 3{,}5;\ \frac{11}{9};\ \sqrt{\frac{1}{4}};\ \sqrt{6};\ \frac{\pi}{4};\ -104$$





Intervalos y semirrectas

4. **Escribe los siguientes conjuntos de números en forma de intervalo o semirrecta:**

a) Mayores que 2 y menores que 7.

b) Comprendidos entre –1 y 3, ambos incluidos.

c) Mayores o iguales que 5.

d) Menores que 10.

a) $(2, 7)$

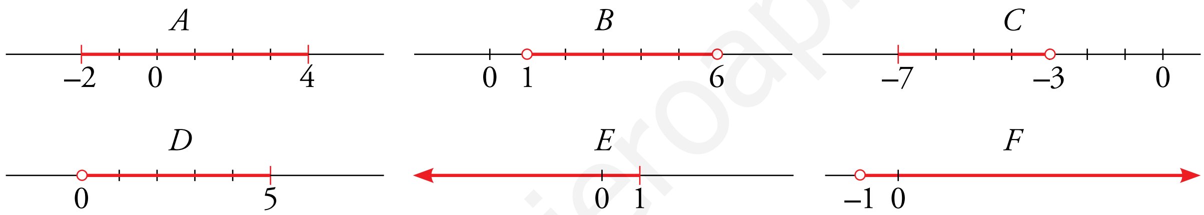
b) $[-1, 3]$

c) $[5, +\infty)$

d) $(-\infty, 10)$

5. **Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:**

$$A = [-2, 4] \quad B = (1, 6) \quad C = [-7, -3]$$
$$D = (0, 5] \quad E = (-\infty, 1] \quad F = (-1, +\infty)$$

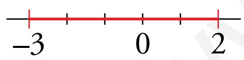


6. **Representa gráficamente y expresa como intervalo o semirrecta estas desigualdades:**

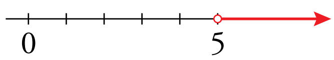
a) $-3 \le x \le 2$ **b)** $5 < x$ **c)** $x \ge -2$

d) $-2 \le x < 3/2$ **e)** $4 < x < 4{,}1$ **f)** $-3 \le x$

a) $-3 \le x \le 2$ $[-3, 2]$

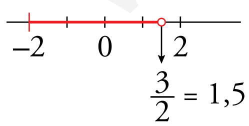


b) $5 < x$ $(5, +\infty)$

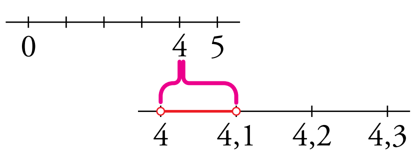


c) $x \ge -2$ $[-2, +\infty)$

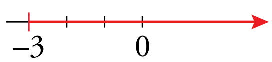
d) $-2 \le x < \dfrac{3}{2}$ $\left[-2, \dfrac{3}{2}\right)$



e) $4 < x < 4{,}1$ $(4; 4{,}1)$



f) $-3 \le x$ $[-3, +\infty)$

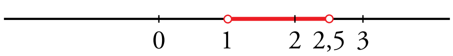


7. **Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:**

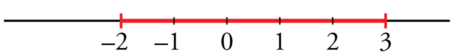
a) $(1; 2{,}5)$ **b)** $[-2, 3]$ **c)** $[-7, 0)$

d) $[-3, +\infty)$ **e)** $(2, +\infty)$ **f)** $(-5, 2]$

a) $\{x \,/\, 1 < x < 2{,}5\}$

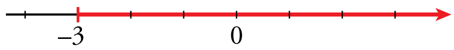


b) $\{x \,/\, -2 \le x \le 3\}$

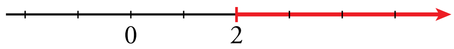


c) $\{x \,/\, -7 \le x < 0\}$

d) $\{x \,/\, -3 \le x\}$



e) $\{x \,/\, x > 2\}$



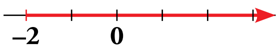
f) $\{x \,/\, -5 < x \le 2\}$

8. **Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados:**

a)

b)

c)



d)

a) $[-1, 3]$; $-1 \le x \le 3$

b) $(1, 5]$; $1 < x \le 5$

c) $[-2, +\infty)$; $x \ge -2$

d) $(-\infty, 4)$; $x < 4$

9. **a) Indica cuáles de los números siguientes están incluidos en $A = [-3, 7)$ o en $B = (5, +\infty)$:**

$$-3;\ 10;\ 0{,}5;\ 7;\ -4;\ \sqrt{5};\ 6{,}\widehat{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$$

b) ¿Cuál de estos intervalos representa a los números incluidos en A y en B?

$$(-3, 5) \qquad [2, 7) \qquad [5, 7] \qquad (5, 7)$$

a) $A = [-3, 7)$ $\qquad B = (5, +\infty)$ $\qquad A \cup B = [-3, +\infty)$

Los números incluidos en A o en B son: $-3;\ 10;\ 0{,}5;\ 7;\ \sqrt{5};\ 6{,}\widehat{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$

Es decir, todos excepto -4.

b) $A \cap B = (5, 7)$

Potencias y raíces

10. **Expresa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[5]{x^2}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt[3]{10^6}$ **d)** $\sqrt[4]{20^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ **f)** $\sqrt[4]{a}$ **g)** $\left(\sqrt[5]{x^{-2}}\right)^3$ **h)** $\sqrt[15]{a^5}$

a) $x^{2/5}$ b) $2^{1/2}$ c) 10^2 d) $20^{1/2}$

e) $(-3)^{3/5}$ f) $a^{1/4}$ g) $x^{-6/5}$ h) $a^{1/3}$

11. **Pon en forma de raíz.**

a) $5^{1/2}$ **b)** $(-3)^{2/3}$ **c)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$

d) $(a^3)^{1/4}$ **e)** $(a^{1/2})^{1/3}$ **f)** $(a^{-1})^{3/5}$

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{(-3)^2}$ c) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ f) $\sqrt[5]{a^{-3}}$

12. **Resuelve, sin utilizar la calculadora:**

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

b) $\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

c) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{0,25} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

e) $\sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(2^3)^4} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$

f) $\sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{10^{-3}} = 10^{-1} = 0,1$

13. **Obtén con la calculadora.**

a) $\sqrt[3]{-127}$ **b)** $\sqrt[5]{0,2^{-3}}$ **c)** $\sqrt[4]{1,5^3}$

d) $12^{-2/3}$ **e)** $\sqrt[6]{3^{-5}}$ **f)** $\sqrt[5]{(-3)^{-2}}$

a) $\sqrt[3]{-127} \approx -5,03$

b) $\sqrt[5]{0,2^{-3}} \approx 2,63$

c) $\sqrt[4]{1,5^3} \approx 1,36$

d) $12^{-2/3} = \sqrt[3]{12^{-2}} \approx 0,19$

e) $\sqrt[6]{3^{-5}} \approx 0,40$

f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}} \approx 0,64$

14. **Calcula.**

a) $25^{1/2}$ **b)** $27^{1/3}$ **c)** $125^{2/3}$ **d)** $81^{3/4}$

e) $9^{5/2}$ **f)** $16^{5/4}$ **g)** $49^{3/2}$ **h)** $8^{5/3}$

a) $\sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt[3]{27} = 3$

c) $(\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25$

d) $(\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$

e) $(\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243$

f) $(\sqrt[4]{16})^5 = 2^5 = 32$

g) $(\sqrt{49})^3 = 7^3 = 343$

h) $(\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$

15. **Expresa los radicales como potencias de exponente fraccionario y efectúa como en el ejemplo resuelto:**

- $\sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{2} = 2^{3/4} : 2^{1/3} = 2^{3/4-1/3} = 2^{5/12}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{9}$ **c)** $3\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{5} : \sqrt[4]{5}$ **e)** $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{4}$ **f)** $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^{1/2} \cdot 2^{2/3} = 2^{7/6}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 3^{1/2} \cdot 3^{2/4} = 3$

c) $3 \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3 \cdot 3^{2/3} = 3^{5/3}$

d) $5^{1/2} : 5^{1/4} = 5^{1/4}$

e) $\sqrt[3]{2^4} : \sqrt[3]{2^2} = 2^{4/3} : 2^{2/3} = 2^{2/3}$

f) $\sqrt[3]{5^2} : \sqrt{5} = 5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{1/6}$

Página 48

Radicales

16. **Simplifica.**

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ e) $\sqrt[6]{125}$ f) $\sqrt[5]{3^{15}}$

a) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = 3^{2/6} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$

c) $\sqrt[15]{2^{12}} = 2^{12/15} = 2^{4/5} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

d) $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = 7^{2/4} = 7^{1/2} = \sqrt{7}$

e) $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = 5^{3/6} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$

f) $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^{15/5} = 3^3 = 27$

17. **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[10]{a^8}$ b) $\sqrt[4]{a^{12}}$ c) $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2 b^2}$ e) $\sqrt[3]{a^6 b^6}$ f) $\sqrt[6]{a^2 b^4}$

a) $a^{8/10} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}$

b) $a^{12/4} = a^3$

c) $a^{3/12} = a^{1/4} = \sqrt[4]{a}$

d) $(ab)^{2/8} = (ab)^{1/4} = \sqrt[4]{ab}$

e) $(ab)^{6/3} = (ab)^2 = a^2b^2$

f) $a^{2/6} \cdot b^{4/6} = a^{1/3} \cdot b^{2/3} = \sqrt[3]{ab^2}$

18. **Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{200}$ f) $\sqrt{300}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 2^2} = 2\sqrt{7}$

c) $\sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^2} = 4\sqrt[4]{4}$

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{200} = \sqrt{5^2 \cdot 2^3} = 5 \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

f) $\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$

19. **Multiplica y simplifica el resultado.**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 8} = \sqrt{400} = 20$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} = \sqrt{a \cdot a^3} = \sqrt{a^4} = a^2$

20. **Divide y simplifica.**

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{4}}$

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}} = \sqrt{7 : \frac{21}{5}} = \sqrt{\frac{35}{21}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5} : \frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2 \cdot 3} : \frac{3^2 \cdot 5}{2^2}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 2^2}{2 \cdot 3^3 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$

21. **Reduce a un solo radical.**

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ **e)** $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ **f)** $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

a) $\sqrt[4]{13}$ b) $\sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[15]{15}$

d) $\sqrt[12]{2^5}$ e) $\sqrt[4]{3^3}$ f) $\sqrt[10]{11}$

22. **Calcula y simplifica si es posible.**

a) $(\sqrt{2})^{10}$ **b)** $(\sqrt[3]{2})^4$ **c)** $(\sqrt[4]{3^2})^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ **e)** $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ **f)** $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6$

a) $2^5 = 32$ b) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[4]{3^{16}} = 3^4 = 81$

d) $\sqrt[8]{8}$ e) $\sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt{2^5}$ f) $\sqrt[6]{2^6} = 2$

23. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

24. **Efectúa.**

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$

b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8}$

d) $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$

a) $2\sqrt{2^3} + 4\sqrt{3^2 \cdot 2^3} - 7\sqrt{3^2 \cdot 2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} - 7 \cdot 3\sqrt{2} =$

$= 4\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 21\sqrt{2} = (4 + 24 - 21)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} - \sqrt{3^3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (2 + 5 - 3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2^5} + 3\sqrt{2 \cdot 5^2} - 2\sqrt{2^3} = 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - 3\sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (3 + 3 - 6)\sqrt{2} = 0$

25. **Efectúa.**

a) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

c) $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63}$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2}$

a) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3} = \sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3} = 2^2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = (4 - 2 + 1)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = (3 - 2)\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63} = \sqrt{2^2 \cdot 7} - \sqrt{7} + \sqrt{3^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 3\sqrt{7} = (2 - 1 + 3)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = (3 + 1)\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

26. **Racionaliza y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$ **e)** $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ **f)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{15} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \dfrac{4\sqrt{12}}{\sqrt{12^2}} = \dfrac{4\sqrt{12}}{12} = \dfrac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

e) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{6^2}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \dfrac{3\sqrt{6}}{12} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

27. **Suprime el radical del denominador y simplifica.**

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{4}{\sqrt{6}}$ **c)** $\frac{6}{\sqrt{12}}$ **d)** $\frac{3}{\sqrt{15}}$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

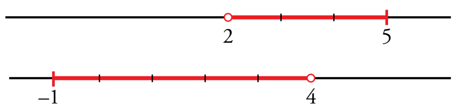
d) $\frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Aplica lo aprendido

28. **Representa los intervalos $A = (2, 5]$ y $B = [-1, 4)$ y di si tienen puntos en común. Si es un intervalo, di cuál es.**

$A = (2\ ,5]$

$B = [-1\ ,4)$



Los puntos comunes a A y B están entre 2 y 4 $\rightarrow$ (2, 4)

29. **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

$$-4;\ \frac{13}{6};\ \sqrt{5};\ 2,\widehat{7};\ 152;\ \pi;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

- REALES ($\mathbb{R}$)
  - RACIONALES ($\mathbb{Q}$)
    - ENTEROS ($\mathbb{Z}$)
      - NATURALES ($\mathbb{N}$) $\rightarrow$ 152
      - ENTEROS NEGATIVOS $\rightarrow$ -4
    - FRACCIONARIOS $\rightarrow$ $\frac{13}{6}$; $2,\widehat{7}$
  - IRRACIONALES $\rightarrow$ $\sqrt{5}$; π; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

30. **Extrae del radical los factores que sea posible.**

a) $\sqrt[3]{16a^3}$ **b)** $\sqrt[4]{81a^5b^3}$ **c)** $\sqrt{8a^5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{24}{a^4}}$ **e)** $\sqrt{\frac{162}{75}}$ **f)** $\sqrt[5]{\frac{9}{32}}$

a) $2a\sqrt[3]{2}$ b) $3a\sqrt[4]{ab^3}$ c) $2a^2\sqrt{2a}$

d) $\frac{2}{a}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}$ e) $\frac{9}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{9}$

31. **Efectúa.**

a) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ **b)** $(3\sqrt{2}+2)^2$

c) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+2\sqrt{3})$ **d)** $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

a) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = (2)^2-(\sqrt{3})^2 = 4-3 = 1$

b) $(3\sqrt{2}+2)^2 = (3\sqrt{2})^2+2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2+(2)^2 = 9\cdot 2+12\sqrt{2}+4 = 22+12\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+2\sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2-(2\sqrt{3})^2 = 5-4\cdot 3 = 5-12 = -7$

d) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{5})^2-2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 = 4\cdot 5-4\sqrt{15}+3 = 20-4\sqrt{15}+3 = 23-4\sqrt{15}$

32. **Di el valor de k en cada caso:**

a) $\sqrt[k]{243}=3$ **b)** $\sqrt[3]{k}=-2$ **c)** $\sqrt[4]{k}=\frac{3}{2}$

d) $\sqrt[k]{-125}=-5$ **e)** $\sqrt[3]{k}=-1$ **f)** $\sqrt[k]{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$

a) $\sqrt[k]{3^5}=3 \rightarrow k=5$

b) $k=(-2)^3 \rightarrow k=-8$

c) $k=\left(\frac{3}{2}\right)^4 \rightarrow k=\frac{81}{16}$

d) $\sqrt[k]{(-5)^3}=-5 \rightarrow k=3$

e) $k=(-1)^3 \rightarrow k=-1$

f) $\sqrt[k]{\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{7}{8} \rightarrow k=2$

33. **Introduce dentro de la raíz y simplifica.**

a) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ **b)** $\frac{\sqrt{18}}{3}$ **c)** $2\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ **e)** $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ **f)** $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

a) $\sqrt{\frac{5^2\cdot 3}{5}}=\sqrt{15}$

b) $\sqrt{\frac{18}{3^2}}=\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 7}{4}}=\sqrt[3]{14}$

d) $\sqrt[4]{\frac{2^4\cdot 5}{12}}=\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{12}{2^2}}=\sqrt{3}$

f) $\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 9}{3^3\cdot 4}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

34. **Suprime el radical del denoninador.**

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **d)** $\frac{5}{\sqrt[4]{2}}$

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5}\cdot\sqrt[8]{a^3}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^8}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

d) $\frac{5}{\sqrt[4]{2}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\frac{5\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{5\sqrt[4]{8}}{2}$

Página 49

Resuelve problemas

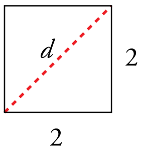
35. **Indica si el número que se obtiene en cada caso es racional o irracional:**

a) La diagonal de un cuadrado de lado 2 cm.

b) El área de un círculo de radio 2 cm.

c) El cateto de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 24 cm y 25 cm.

a) La diagonal de un cuadrado de lado 2 cm. $\rightarrow$ Irracional



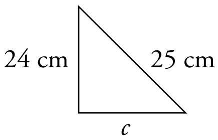
Por el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow d^2 = 8 \rightarrow d = \sqrt{8}$ cm

b) El área de un círculo de radio 2 cm. $\rightarrow$ Irracional

Área $= \pi \cdot r^2 \rightarrow$ Área $= \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ (n.º irracional)

c) El cateto del triángulo rectángulo de lados 24 cm y 25 cm. $\rightarrow$ Racional



$25^2 = 24^2 + c^2 \rightarrow 625 = 576 + c^2 \rightarrow c^2 = 49 \rightarrow c = 7$

36. **Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{x-5}$ **b)** $\sqrt{5-x}$ **c)** $\sqrt{x^2+1}$

d) $\sqrt{-x}$ **e)** $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ **f)** $\sqrt{x(3-x)}$

En todos los apartados aplicaremos el siguiente resultado: $\sqrt{A}$ se puede calcular si $A \ge 0$

a) $\sqrt{x-5}$ se puede calcular si $x - 5 \ge 0 \rightarrow x \ge 5 \rightarrow x = [5, +\infty)$

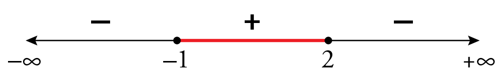
b) $\sqrt{5-x}$ se puede calcular si $5 - x \ge 0 \rightarrow 5 \ge x \rightarrow x = (-\infty, 5]$

c) $x^2 + 1 > 0$, para cualquier $x \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt{x^2+1}$ se puede calcular para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

d) $\sqrt{-x}$ se puede calcular si $-x \ge 0 \rightarrow x \le 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0]$

e) $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ se puede calcular si $(1 + x) \cdot (2 - x) \ge 0$

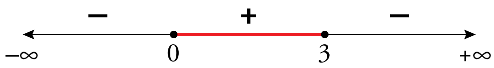
- Si $x = -1$ o $x = 2 \rightarrow (1 + x) \cdot (2 - x) = 0$
- Si $x < -1 \rightarrow \begin{cases} (1-x) < 0 \\ (2-x) > 0 \end{cases} \rightarrow (1 + x) \cdot (2 - x) < 0$
- Si $-1 < x < 2 \rightarrow \begin{cases} (1+x) > 0 \\ (2-x) > 0 \end{cases} \rightarrow (1 + x) \cdot (2 - x) > 0$
- Si $x > 2 \rightarrow \begin{cases} (1+x) > 0 \\ (x-2) < 0 \end{cases} \rightarrow (1 + x) \cdot (2 - x) < 0$



Por tanto, $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ se puede calcular si $x \in [-1, 2]$.

f) $\sqrt{x \cdot (3 - x)}$ se puede calcular si $x \cdot (3 - x) \geq 0$.

- Si $x = 0$ o $x = 3 \rightarrow x \cdot (3 - x) = 0$
- Si $x < 0 \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ (3 - x) > 0 \end{cases} \rightarrow x \cdot (3 - x) < 0$
- Si $0 < x < 3 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (3 - x) > 0 \end{cases} \rightarrow x \cdot (3 - x) > 0$
- Si $x > 3 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (3 - x) < 0 \end{cases} \rightarrow x \cdot (3 - x) < 0$



Por tanto, $\sqrt{x \cdot (3 - x)}$ se puede calcular si $x \in [0, 3]$.

37. **¿Cuál de los números $1 - \sqrt{3}$ o $3 + \sqrt{2}$ es solución de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$?**

- $(1 - \sqrt{3})^2 - 6 \cdot (1 - \sqrt{3}) + 7 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} - 6 + 6\sqrt{3} + 7 = 5 + 4\sqrt{3} \neq 0$

  El número $(1 - \sqrt{3})$ no es solución.

- $(3 + \sqrt{2})^2 - 6 \cdot (3 + \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 0$

  El número $(3 + \sqrt{2})$ es solución.

38. **Un cuadrado de 6 cm de lado está inscrito en un círculo. Calcula:**

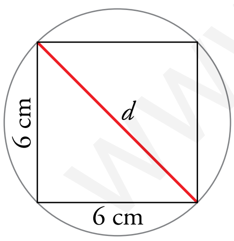
a) El radio del círculo y su área.

b) El perímetro del triángulo ABC, del que AB es un lado del cuadrado y C es el punto medio del lado opuesto.

Expresa los resultados con radicales y π.

a) Sea d = diámetro del círculo.

Por el teorema de Pitágoras:



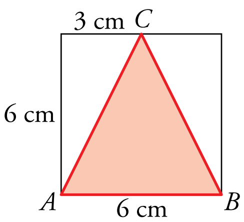
$d^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow d^2 = 36 + 36 \rightarrow d^2 = 72 \rightarrow$

$\rightarrow d = \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm

Si el diámetro del círculo mide $d = 6\sqrt{2}$ cm, entonces el radio es $r = 3\sqrt{2}$ cm.

Área $= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3\sqrt{2})^2 = \pi \cdot 9 \cdot 2 = 18\pi$ cm²

b) Por el teorema de Pitágoras:



$\overline{AC}^2 = 6^2 + 3^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 36 + 9 \rightarrow \overline{AC}^2 = 45 \rightarrow$

$\rightarrow \overline{AC} = \sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ cm

Como $\overline{BC} = \overline{AC} \rightarrow$ Perímetro $= \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AC} = 6 + 2 \cdot (3\sqrt{5}) = 6 + 6\sqrt{5}$ cm

39. **El volumen de un cilindro de 5 cm de altura es 60 π cm³.**

a) ¿Cuánto mide su radio?

b) Calcula su área lateral. Da en ambos casos el valor exacto (utiliza radicales y π).

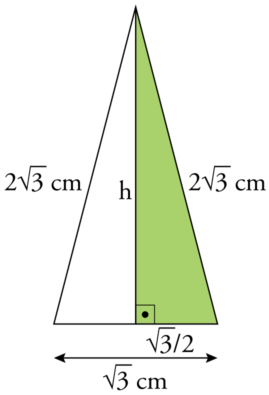
a) Volumen del cilindro = $\pi \cdot r^2 \cdot \mathrm{h}$

$$60\pi = \pi \cdot r^2 \cdot 5 \;\rightarrow\; r^2 = \frac{60\pi}{5\pi} \;\rightarrow\; r^2 = 12 \;\rightarrow\; r = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

b) Área lateral = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mathrm{h}$

$$A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 = 20\sqrt{3}\,\pi\ \text{cm}^2$$

40. **Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.**



Por el teorema de Pitágoras:

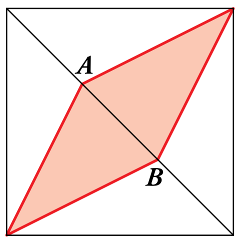
$$\mathrm{h}^2 = (2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12 - \frac{3}{4} = \frac{45}{4} \;\rightarrow$$

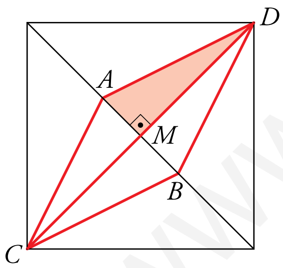
$$\rightarrow\; \mathrm{h} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 5}{2^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}\ \text{cm}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4}\ \text{cm}^2$$

41. **Los puntos *A* y *B* dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales.**

Si el área del cuadrado es 36 cm², ¿cuánto medirá el lado del rombo? Expresa el resultado con radicales

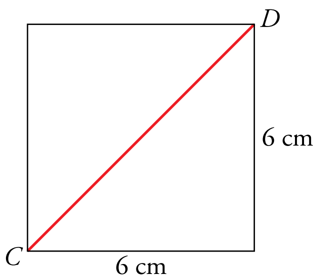




- Área del cuadrado = 36 cm² $\rightarrow$ lado = $\sqrt{36}$ = 6 cm
- Diagonal mayor del rombo = diagonal del cuadrado = $\overline{CD}$

  Por el teorema de Pitágoras:

  $$\overline{CD}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \;\rightarrow\; \overline{CD} = \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$$



- Diagonal menor $= \overline{AB} = \dfrac{\overline{CD}}{3} = \dfrac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$ cm
- El lado del rombo es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\widehat{AMD}$.

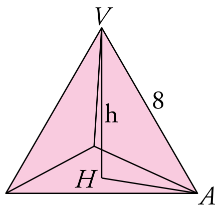
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm} \\ \overline{MD} = \dfrac{\overline{CD}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm} \end{array}\right\} \overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MD}^2 \rightarrow$$

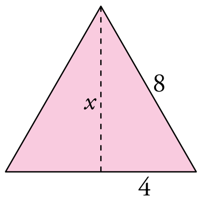
$$\rightarrow \overline{AD}^2 = (\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 2 + 18 = 20$$

$$\rightarrow \overline{AD} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

Por tanto, el lado del rombo mide $2\sqrt{5}$ cm.

42. **Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Expresa el resultado con radicales.**





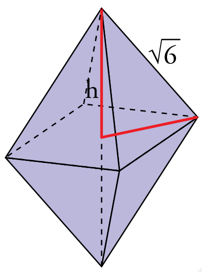
Altura de una cara:

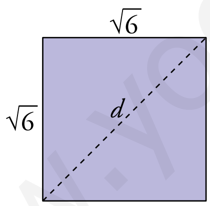
$x = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

$\overline{AH} = \dfrac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm

Altura del tetraedro: $h = \sqrt{8^2 - \left(\dfrac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{64 - \dfrac{192}{4}} = \sqrt{64 - 48} = \sqrt{16} = 4$ cm

43. **Calcula el volumen de un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Expresa el resultado con radicales.**





$d = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

$\dfrac{d}{2} = \sqrt{3}$ cm

Altura de la pirámide $= \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ cm

Volumen del octaedro $= 2\left(\dfrac{1}{3}(\sqrt{6})^2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$ cm^3

1 Proporcionalidad simple

Página 51

1. Resuelve mentalmente.

a) Una botella de aceite de tres cuartos de litro cuesta 3,60 €. ¿A cómo sale el litro?

b) Dos máquinas cortacésped siegan un prado en media hora. ¿Cuánto tardarían tres máquinas?

c) Un cicloturista ha recorrido 4 km en 12 minutos. ¿Qué distancia recorrerá en media hora?

d) Un camión, a 60 km/h, tarda en ir de A a B 40 minutos. ¿Cuánto tardará un coche a 80 km/h?

a) El precio de la botella de aceite es directamente proporcional a su capacidad.

ACEITE (litros)	COSTE (€)
0,75	3,60
1	x

D

$$\frac{3,60}{x} = \frac{0,75}{1} \rightarrow x = \frac{3,60 \cdot 1}{0,75} = 4,80 \text{ €}$$

Un litro de aceite cuesta 4,80 €.

b) El tiempo que se tarda en segar el prado es inversamente proporcional al número de máquinas cortacésped que se utilizan.

MÁQUINAS	TIEMPO (min)
2	30
3	x

I

$$\frac{30}{x} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2}{3} = 20 \text{ minutos}$$

Tres máquinas tardarían 20 minutos en segar el prado.

c) La distancia recorrida por el cicloturista es directamente proporcional al tiempo.

DISTANCIA (km)	TIEMPO (min.)
4	12
x	30

D

$$\frac{4}{x} = \frac{12}{30} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 30}{12} = 10 \text{ km}$$

En media hora el ciclotur ista recorrerá 10 km.

d) El tiempo que un camión tarda en recorrer una distancia es inversamente proporcional a la velocidad a la que circula.

$$\begin{array}{cc} \text{VELOCIDAD (km/h)} & \text{TIEMPO (min)} \\ \hline 60 & 40 \\ \underbrace{80 \qquad\qquad\quad x}_{\mathrm{I}} \end{array}$$

$$\frac{40}{x} = \frac{80}{60} \rightarrow \frac{40 \cdot 60}{80} = 30 \text{ min.}$$

Si circula a 80 km/h el camión tardará media hora en ir de A a B.

2. **Si cada día gasto 3,60 €, mis ahorros durarán 15 días.**

¿Cuánto durarían si gastase 4,50 € diarios?

La duración del dinero ahorrado es inversamente proporcional al gasto diario.

$$\begin{array}{cc} \text{GASTO DIARIO} & \text{DÍAS QUE DURAN} \\ \hline 3{,}60 & 15 \\ \underbrace{4{,}50 \qquad\qquad\quad x}_{\mathrm{I}} \end{array}$$

$$\frac{3,6}{4,5} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{3,6 \cdot 15}{4,5} = 12$$

Gastando 4,50 € al día, los ahorros durarían 12 días.

3. **Cinco metros y medio de cable eléctrico han costado 4,51 €.**

¿Cuánto costarán 8 m 35 cm del mismo tipo de cable?

El coste del cable es directamente proporcional a su longitud.

$$\begin{array}{cc} \text{CABLE (m)} & \text{COSTE (€)} \\ \hline 5{,}5 & 4{,}51 \\ \underbrace{8{,}35 \qquad\qquad x}_{\mathrm{D}} \end{array}$$

$$\frac{4,51}{x} = \frac{5,5}{8,35} \rightarrow x = \frac{4,51 \cdot 8,35}{5,5} = 6,85 \text{ €}$$

8 m y 35 cm del mismo tipo de cable costarán 6,85 €.

4. Un ganadero tiene reservas de pasto para alimentar a 35 vacas durante 60 días.

¿Cuánto le durarán sus reservas si vende 15 vacas?

El tiempo que un ganadero puede alimentar a sus vacas, con una cantidad fija de pasto, es inversamente proporcional al número de estas.

VACAS	TIEMPO (días)
35	60
20	x

I

$$\frac{60}{x} = \frac{20}{35} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 35}{20} = 105 \text{ días}$$

Sus reservas le durarán 105 días si tiene que alimentar a 20 vacas.

5. En el comedor del colegio se han consumido 132 barras de pan durante tres días.

Si una barra cuesta 0,35 €, ¿qué presupuesto debe destinar el administrador para la compra de pan a la semana?

El número de días es directamente proporcional al número de barras de pan consumidas.

Consideramos que el comedor se abre 5 días a la semana.

N.° DE DÍAS	BARRAS DE PAN
3	132
5	x

D

$$\frac{3}{5} = \frac{132}{x} \rightarrow x = \frac{132 \cdot 5}{3} = 220$$

Presupuesto = 220 · 0,35 = 77 € a la semana.

2 Proporcionalidad compuesta

Página 52

1. Por el alquiler de dos bicicletas, durante 3 horas, pagamos ayer 11,10 €. ¿Cuánto nos costará hoy alquilar tres bicicletas durante cinco horas?

BICICLETAS	TIEMPO (horas)	COSTE (€)
2	3	11,10
3	5	x

D

D

$$\frac{11,10}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \to \frac{11,10}{x} = \frac{2}{5} \to x = \frac{11,10 \cdot 5}{2} = 27,75\ €$$

El alquiler de tres bicicletas durante 5 horas costará 27,75 €.

2. Un caño que arroja medio litro por segundo llena un camión cisterna en 3 horas. ¿Qué caudal debería proporcionar para llenar dos cisternas a la hora?

El número de cisternas que se llenan es directamente proporcional al caudal. El tiempo que tarda en llenarse una cisterna es inversamente proporcional al caudal.

N.° DE CISTERNAS	TIEMPO (h)	CAUDAL (l/s)
1	3	0,5
2	1	x

I

D

$$\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{0,5}{x} \to x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 0,5}{1} = 3$$

Para llenar dos cisternas en una hora, es necesario un caudal de 3 l/s.

3. Un jardinero cobra 120 € por dar seis cortes de césped a una parcela de 250 m^2.

a) ¿Cuánto cobrará por dar ocho cortes a una parcela de 400 m^2?

b) ¿Cuántos cortes ha contratado para una parcela de 300 m^2, con un coste de 72 €?

a)

SUPERFICIE (m^2)	CORTES DE CÉSPED	COSTE (€)
250	6	120
400	8	x

D

D

$$\frac{120}{x} = \frac{250}{400} \cdot \frac{6}{8} \to \frac{120}{x} = \frac{250 \cdot 6}{400 \cdot 8} \to x = \frac{120\ 400 \cdot 8}{250 \cdot 6} = 256$$

Dar 8 cortes de césped a una parcela de 400 m^2 costará 256 €.

b)

SUPERFICIE (m^2)	CORTES DE CÉSPED	COSTE (€)
250	6	120
300	x	72

I D

$$\frac{6}{x} = \frac{300}{250} \cdot \frac{120}{72} \to \frac{6}{x} = \frac{300 \cdot 120}{250 \cdot 72} \to x = \frac{6 \cdot 250 \cdot 72}{300 \cdot 120} = 3 \text{ cortes}$$

Con 72 € se pueden dar 3 cortes de césped a una parcela de 300 m^2.

4. **Una cadena de cines, con cinco locales, vende 15 000 entradas en tres semanas. ¿Cuántas entradas puede estimar que vendería a la semana si tuviera siete locales?**

LOCALES	SEMANAS	ENTRADAS
5	3	15 000
7	1	x

D

D

$$\frac{15\,000}{x} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{1} \to \frac{15\,000}{x} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 1} \to x = \frac{15\,000 \cdot 7 \cdot 1}{5 \cdot 3} = 7\,000$$

Si tuviera 7 locales vendería 7 000 entradas en 1 semana.

5. **Tres pintores, trabajando 8 horas al día, pintan un muro en 10 días. ¿Cuánto tardarían 5 pintores trabajando 6 horas cada día?**

PINTORES	HORAS/DÍA	DÍAS
3	8	10
5	6	x

I

I

$$\frac{10}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{3} \to \frac{10}{x} = \frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 3} \to x = \frac{10 \cdot 8 \cdot 3}{6 \cdot 5} = 8 \text{ días}$$

5 pintores, trabajando 6 horas al día, tardarán 8 días en pintar el muro.

6. **Una cuadrilla de 5 obreros ha cobrado 1 050 € por un trabajo que ha durado tres días. ¿Cuántos obreros forman otra cuadrilla que, cobrando las mismas tarifas, ha presentado una factura de 1 680 € por un trabajo de 6 días?**

OBREROS	FACTURA (€)	TIEMPO (días)
5	1 050	3
x	1 680	6

D

I

$$\frac{5}{x} = \frac{1050}{1680} \cdot \frac{6}{3} \to \frac{5}{x} = \frac{1050 \cdot 6}{1680 \cdot 3} \to x = \frac{5 \cdot 1680 \cdot 3}{1050 \cdot 6} = 4 \text{ obreros}$$

La cuadrilla que, por un trabajo de 6 días, ha presentado una factura de 1 680 € está formada por 4 obreros.

3 Repartos proporcionales

Página 53

1. Dos hermanas compran cinco juegos de toallas por 175 €. Una se queda con tres juegos, y la otra, con dos. ¿Cuánto debe pagar cada una?

Cada juego de toallas cuesta $175 : 5 = 35$ €.

Quien se queda con 3 juegos pagará $3 \cdot 35 = 105$ €.

Quien se queda con 2 juegos pagará $2 \cdot 35 = 70$ €.

2. Tres amigas que comparten piso reciben una factura de la compañía eléctrica por un importe de 62,40 €. Amelia llegó al piso hace 60 días; Laura, 20 días después, y Cristina solo lleva en la casa 20 días. ¿Cuánto debe pagar cada una?

Amelia lleva en el piso 60 días.

Laura lleva en el piso 40 días.

Cristina lleva en el piso 20 días.

Se divide el importe de la factura entre el número total de días, $60 + 40 + 20 = 120$.

$42,4 : 120 = 0,52$ € por día

El pago de la factura se hará como sigue:

Amelia $\rightarrow$ $60 \cdot 0,52 = 31,20$ €

Laura $\rightarrow$ $40 \cdot 0,52 = 20,80$ €

Cristina $\rightarrow$ $20 \cdot 0,52 = 10,40$ €

3. Reparte 660 en partes directamente proporcionales a 1, 2 y 3.

$1 + 2 + 3 = 6 \rightarrow 660 : 6 = 110$

- $1 \rightarrow 110 \cdot 1 = 110$
- $2 \rightarrow 110 \cdot 2 = 220$
- $3 \rightarrow 110 \cdot 3 = 330$

4. Reparte 660 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 3.

Repartir 660 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 3 es equivalente a repartir 660 en partes directamente proporcionales a 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$

$660 : \frac{11}{6} = 360$

- $1 \rightarrow 360 \cdot 1 = 360$
- $2 \rightarrow 360 \cdot \frac{1}{2} = 180$
- $3 \rightarrow 360 \cdot \frac{1}{3} = 120$

5. Un conductor profesional ha realizado un viaje de A a B, con un vehículo pesado, a una media de 50 km/h.

A continuación ha regresado conduciendo un utilitario, a 100 km/h. Y por último ha viajado otra vez a B, con una furgoneta, a 80 km/h.

¿Cuánto tiempo ha invertido en cada trayecto, si ha tardado cuatro horas y cuarto en los tres recorridos?

Repartir 255 en partes inversamente proporcionales a 50, 100 y 80 es equivalente a repartir 255 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{80}$.

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{80} = \frac{8+4+5}{400} = \frac{17}{400}$$

$$255 : \frac{17}{400} = 6\,000$$

- Vehículo pesado $\rightarrow$ $\frac{1}{50} \cdot 6\,000 = 120$ minutos = 2 horas
- Utilitario $\rightarrow$ $\frac{1}{100} \cdot 6\,000 = 60$ minutos = 1 hora
- Furgoneta $\rightarrow$ $\frac{1}{80} \cdot 6\,000 = 75$ minutos = 1 hora y cuarto

Por tanto, cuando realizó el trayecto de A a B con un vehículo pesado tardó 2 horas, con un utilitario, tardó 1 hora, y en furgoneta, 1 hora y cuarto.

4 Cálculos con porcentajes

Página 54

Cálculo mental

a) 10 % de 500 **b) 20 % de 400** **c) 5 % de 360**

d) 75 % de 280 **e) 25 % de 88** **f) 50 % de 250**

a) 10 % de 500 = 0,10 · 500 = 50
b) 20 % de 400 = 0,20 · 400 = 80
c) 5 % de 360 = 0,05 · 360 = 18
d) 75 % de 280 = 0,75 · 280 = 210
e) 25 % de 88 = 0,25 · 88 = 22
f) 50 % de 250 = 0,50 · 250 = 125

1. Copia y completa la tabla asociando porcentaje, fracción y número decimal.

82 %	53 %	43 %	**9 %**	7 %	3 %
$\frac{82}{100}$	$\mathbf{\frac{53}{100}}$	$\frac{43}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\mathbf{\frac{7}{100}}$	$\frac{3}{100}$
0,82	0,53	**0,43**	0,09	0,07	**0,03**

2. Calcula.

a) 32 % de 500 **b) 86 % de 60**

c) 7 % de 850 **d) 5 % de 347**

e) 11,4 % de 4 000 **f) 2,5 % de 88**

g) 0,4 % de 900 **h) 0,01 % de 5 000**

i) 150 % de 398 **j) 400 % de 740**

a) 32 % de 500 = 0,32 · 500 = 160
b) 86 % de 60 = 0,86 · 60 = 51,6
c) 7 % de 850 = 0,07 · 850 = 59,5
d) 5 % de 347 = 0,05 · 347 = 17,35
e) 11,4 % de 4 000 = 0,114 · 4 000 = 456
f) 2,5 % de 88 = 0,025 · 88 = 2,2
g) 0,4 % de 900 = 0,004 · 900 = 3,6
h) 0,01 % de 5 000 = 0,0001 · 5 000 = 0,5
i) 150 % de 398 = 1,50 · 398 = 597
j) 400 % de 740 = 4 · 740 = 2 960

3. Un agricultor, que dispone de 40 hectáreas de terreno, siembra el 65 % de cebada; el 15 %, de trigo, y el resto, de avena. ¿Cuántas hectáreas ocupa la avena?

El porcentaje del terreno sembrado de avena es:

100 % – (65 % + 15 %) = 20 %

Por tanto, de las 40 ha de terreno la avena ocupa:

20 % de 40 ha = 0,2 · 40 = 8 ha

4. Dos hermanos compran un balón que cuesta 42 €. El mayor paga el 60 %. ¿Qué porcentaje paga el pequeño? ¿Cuánto ha de pagar?

Si el mayor paga el 60 %, el pequeño paga el 40 %.

Por tanto, el pequeño paga 40 % de 42 € = 0,4 · 42 = 16,80 €.

5. Un trabajador tiene un salario bruto de 1 400 € al mes, del que le retienen un 15 % de impuestos. ¿Cuánto le retienen? ¿Qué porcentaje del salario bruto se lleva? ¿Cuál es el salario neto?

- Le retienen el 15 % de 1 400 € = 0,15 · 1 400 = 210 €.
- Se lleva 100 % – 15 % = 85 % del salario bruto.
- Salario neto = 85 % de 1 400 € = 0,85 · 1 400 = 1 190 €

6. El ayuntamiento de cierta ciudad sacó a concurso 150 plazas de funcionarios municipales. Se presentaron 2 840 aspirantes de los que un 95 % fue eliminado durante la selección. ¿Se cubrieron todas las plazas?

Si fueron eliminados el 95 % de aspirantes, entonces pasaron la selección el 5 % de 2 840 aspirantes:

0,05 · 2 840 = 142 aspirantes

El ayuntamiento sacó a concurso 150 plazas y únicamente pasaron la selección 142 aspirantes del total presentados. Por tanto, no se cubrieron todas las plazas.

Página 55

Cálculo mental

a) El 50 % de … es 32.

b) El 25 % de … es 12.

c) El 75 % de … es 15.

d) El 20 % de … es 50.

e) El 10 % de … es 21.

f) El 5 % de … es 12.

g) El 30 % de … es 45.

a) $0{,}5 \cdot x = 32 \rightarrow x = \dfrac{32}{0{,}5} = 64$

b) $0{,}25 \cdot x = 12 \rightarrow x = \dfrac{12}{0{,}25} = 48$

c) $0{,}75 \cdot x = 15 \rightarrow x = \dfrac{15}{0{,}75} = 20$

d) $0{,}20 \cdot x = 50 \rightarrow x = \dfrac{50}{0{,}20} = 250$

e) $0{,}10 \cdot x = 21 \rightarrow x = \dfrac{21}{0{,}10} = 210$

f) $0{,}05 \cdot x = 12 \rightarrow x = \dfrac{12}{0{,}05} = 240$

g) $0{,}30 \cdot x = 45 \rightarrow x = \dfrac{45}{0{,}30} = 150$

Cálculo mental

a) 5 es el … % de 20.

b) 8 es el … % de 80.

c) 9 es el … % de 12.

d) 6 es el … % de 18.

e) 4 es el … % de 80.

f) 6 es el … % de 40.

g) 9 es el … % de 150.

a) $\dfrac{5}{x} = 20 \rightarrow x = 0{,}25 \rightarrow 25\,\%$

b) $\dfrac{8}{x} = 80 \rightarrow x = 0{,}10 \rightarrow 10\,\%$

c) $\dfrac{9}{x} = 12 \rightarrow x = 0{,}75 \rightarrow 75\,\%$

d) $\dfrac{6}{x} = 18 \rightarrow x = 0{,}33 \rightarrow 33\,\%$

e) $\dfrac{4}{x} = 80 \rightarrow x = 0{,}05 \rightarrow 5\,\%$

f) $\dfrac{6}{x} = 40 \rightarrow x = 0{,}15 \rightarrow 15\,\%$

g) $\dfrac{9}{x} = 150 \rightarrow x = 0{,}06 \rightarrow 6\,\%$

7. Calcula el valor de T en cada caso:

a) 16 % de $T = 52$

b) 24 % de $T = 156$

c) 18 % de $T = 58{,}5$

d) 8 % de $T = 10{,}8$

e) 0,8 % de $T = 5{,}8$

f) 0,25 % de $T = 3$

a) $0{,}16 \cdot T = 52 \rightarrow T = 52 : 0{,}16 = 325$

b) $0{,}24 \cdot T = 156 \rightarrow T = 156 : 0{,}24 = 650$

c) $0{,}18 \cdot T = 58{,}5 \rightarrow T = 58{,}5 : 0{,}18 = 325$

d) $0{,}08 \cdot T = 10{,}8 \rightarrow T = 10{,}8 : 0{,}08 = 135$

e) $0{,}08 \cdot T = 5{,}8 \rightarrow T = 5{,}8 : 0{,}008 = 725$

f) $0{,}0025 \cdot T = 3 \rightarrow T = 3 : 0{,}0025 = 1\,200$

8. Calcula el valor de *P* en cada caso:

a) $P\,\%$ **de 380 = 57** **b)** $P\,\%$ **de 225 = 9** **c)** $P\,\%$ **de 190 = 51,3**

d) $P\,\%$ **de 46 = 2,88** **e)** $P\,\%$ **de 2 500 = 5** **f)** $P\,\%$ **de 1 800 = 27**

a) $\frac{P}{100} \cdot 380 = 57 \;\rightarrow\; P = \frac{57}{380} \cdot 100 = 15\%$

b) $\frac{P}{100} \cdot 225 = 9 \;\rightarrow\; P = \frac{9}{225} \cdot 100 = 4\%$

c) $\frac{P}{100} \cdot 190 = 51{,}3 \;\rightarrow\; P = \frac{51{,}3}{190} \cdot 100 = 27\%$

d) $\frac{P}{100} \cdot 46 = 2{,}88 \;\rightarrow\; P = \frac{2{,}88}{46} \cdot 100 = 6{,}26\%$

e) $\frac{P}{100} \cdot 2\,500 = 5 \;\rightarrow\; P = \frac{5}{2\,500} \cdot 100 = 0{,}2\%$

f) $\frac{P}{100} \cdot 1\,800 = 27 \;\rightarrow\; P = \frac{27}{1\,800} \cdot 100 = 1{,}5\%$

9. Hoy había en el estadio de fútbol 24 000 aficionados, lo que supone un 80 % de su capacidad total. ¿Cuántos aficionados hay en el campo cuando se llena?

T = capacidad total del campo

80 % de $T = 24\,000 \;\rightarrow\; 0{,}8 \cdot T = 24\,000 \;\rightarrow\; T = 24\,000 : 0{,}8 = 30\,000$ aficionados

Por tanto, cuando el campo se llena hay en él 30 000 aficionados.

10. Elena tenía en su cuenta 5 000 € y ha adquirido un televisor por 750 €. ¿Qué porcentaje de sus ahorros ha gastado?

De un total de 5 000 €, se ha gastado 750 €. ¿Cuánto se ha gastado de cada 100 €?

TOTAL	PARTE
5 000	750
100	x

$$\frac{5\,000}{100} = \frac{750}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{750 \cdot 100}{5\,000} = 15$$

Se ha gastado el 15 % de sus ahorros.

11. En mi clase somos 16 chicas, lo que supone un $53{,}\overset{\frown}{3}$ % del total de alumnos y alumnas. ¿Cuál es el porcentaje de chicos? ¿Cuántos somos en total?

- Si el porcentaje de chicas es el $53{,}\overset{\frown}{3}$ %, entonces el porcentaje de chicos es:

  $$100\,\% - 53{,}\overset{\frown}{3}\,\% = 46{,}\overset{\frown}{7}\,\%$$

- $53{,}\overset{\frown}{3}\,\% = \frac{533 - 53}{9}\,\% = \frac{160}{3}\,\%$

  En clase hay 16 chicas que son el $\frac{160}{3}$ % del total, por tanto:

ALUMNOS	PORCENTAJE
16	160/3
x	100

D

$$\frac{16}{x} = \frac{160/3}{100} \;\rightarrow\; x = \frac{16 \cdot 100}{160/3} = 30$$

Por tanto, el número total de alumnos de la clase es 30.

12. Compré un ordenador portátil por 490 € y una pantalla supletoria por 135 €. ¿Qué porcentaje del gasto efectuado supone el ordenador? ¿Y la pantalla?

Portátil = 490 €
Pantalla supletoria = 135 €
$\rightarrow$ Gasto total = 490 € + 135 € = 625 €

TOTAL	PARTE
625	490
100	x

D

El precio del ordenador representa el 78,4 % del gasto total y el precio de la pantalla es el 100 % – 78,4 % = 21,6 % del total.

13. Bernardo ha comprado una bicicleta. Sus padres le han subvencionado el 50 %, y su abuela, el 30 %. Alejandro ha puesto el resto que son 108 euros. ¿Cuál era el precio de la bicicleta?

Si sus padres le han subvencionado el 50 % y su abuela el 30 %, Bernardo ha puesto:

100 % – (50 % + 30 %) = 20 % del precio total de la bicicleta (T).

20 % de T = 108 € $\rightarrow$ 0,2 · T = 108 € $\rightarrow$ T = 108 : 0,2 = 540 €

La bicicleta costó 540 €.

14. En un campamento internacional de verano había 16 españoles, 12 ingleses, 14 portugueses, 18 franceses, 3 argentinos y 5 japoneses.

¿Qué porcentaje había de cada nacionalidad?

Total de personas = 16 + 12 + 14 + 18 + 3 + 5 = 68

Españoles:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
16	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{16} \rightarrow x = \frac{16}{68} \cdot 100 = 23,53\,\%$$

Ingleses:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
12	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{12} \rightarrow x = \frac{12}{68} \cdot 100 = 17,65\,\%$$

Portugueses:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
14	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{14} \rightarrow x = \frac{14}{68} \cdot 100 = 20,59\ \%$$

Franceses:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
18	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{18} \rightarrow x = \frac{18}{68} \cdot 100 = 26,47\ \%$$

Argentinos:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
3	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{3} \rightarrow x = \frac{3}{68} \cdot 100 = 4,41\ \%$$

Japoneses:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
5	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{5} \rightarrow x = \frac{5}{68} \cdot 100 = 7,35\ \%$$

Página 57

15. Copia y completa en tu cuaderno.

$C_{INICIAL}$	AUMENTO	$I_{VARIACIÓN}$	C_{FINAL}
850	**32 %**	1,32	1 122
1 080	**25 %**	**1,25**	**1 350**
325	**2 %**	1,02	**331,5**

$C_{INICIAL}$	DESCUENTO	$I_{VARIACIÓN}$	C_{FINAL}
630	20 %	**0,80**	504
85,87	**8 %**	0,92	**79**
338,27	2 %	**0,98**	**331,5**

16. En una tienda de informática han subido todos los productos un 7 %. Un ordenador valía 840 €, y una impresora multifunción, 80 €. ¿Cuánto valen ahora?

Ordenador: $840 + \dfrac{7 \cdot 840}{100} = 898{,}80$ €

Impresora: $80 + \dfrac{7 \cdot 80}{100} = 85{,}60$ €

17. Un inversor compra acciones por valor de 15 000 €. Una semana después, se ve obligado a venderlas, a pesar de que han bajado un 4 %. ¿Cuánto dinero obtiene de la venta?

Las acciones han bajado un 4 % $\rightarrow$ $I_{VARIACIÓN} = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

$$C_{FINAL} = I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 0{,}96 \cdot 15\,000 = 14\,400 \text{ €}$$

El inversor obtuvo 14 400 € por la venta de las acciones.

18. ¿Cuánto pagará Iván por un traje que costaba 685 €, si le hacen una rebaja del 25 %?

El traje está rebajado un 25 % $\rightarrow$ $I_{VARIACIÓN} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$$C_{FINAL} = I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 0{,}75 \cdot 685 = 513{,}75 \text{ €}$$

Iván pagará 513,75 € por el traje.

19. Un grupo de amigos y amigas cena en un restaurante que carga en los precios de la carta un 6 % de IVA. La cuenta, sin IVA, asciende a 360 €. ¿Cuánto pagarán por la cena?

IVA = 6 % $\rightarrow$ $I_{VARIACIÓN} = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$

$$C_{FINAL} = I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 1{,}06 \cdot 360 = 381{,}60 \text{ €}$$

La cuenta, IVA incluido, asciende a 381,60 €.

20. ¿Cuánto costaba un vestido que, rebajado un 25 %, sale por 84 €?

Rebaja del 25 % $\rightarrow$ $I_{VARIACIÓN} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$$C_{FINAL} - I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow 84 = 0{,}75 \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{INICIAL} = 84 : 0{,}75 = 112 \text{ €}$$

El vestido costaba 112 €.

21. **El coste de una reparación de fontanería asciende a 143,99 €, IVA incluido (21 %). ¿Cuál era el importe de la factura antes de cargar el IVA?**

IVA = 21 % $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 + 0{,}21 = 1{,}21$

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 143{,}99 = 1{,}21 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 143{,}99 : 1{,}21 = 119$ €

La factura, antes de cargar el IVA, ascendía a 119 €.

22. **Un automovilista concierta con su seguro una cuota anual de 520 € el primer año, que bajará a 442 € el segundo año en caso de no sufrir incidencias.**

¿En qué porcentaje se rebajará la cuota si se cumple la condición exigida?

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 442 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 520 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 442 : 520 = 0{,}85$

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 0{,}85$ $\rightarrow$ Rebaja del $(1 - 0{,}85) \cdot 100 = 15$ %

En caso de no sufrir incidencias el primer año, la cuota anual del seguro se rebajará un 15 % el segundo año.

23. **Un cine recibió 4 600 espectadores con el estreno de la semana pasada, y ya lleva 5 200 para el de esta semana. ¿En qué porcentaje se ha superado ya el número de espectadores de la semana pasada?**

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 5\,200 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 4\,600 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 5\,200 \cdot 4\,600 = 1{,}13$

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 1{,}13$ $\rightarrow$ Aumentao del $(1{,}13 - 1) \cdot 100 = 13$ %

El número de espectadores se ha superado en un 13 % respecto a la semana pasada.

Página 58

24. **Un pueblo tenía 25 000 habitantes en 1950. Hasta 1975 su población aumentó un 18 % y, después, en el último cuarto del siglo XX, volvió a aumentar un 25 %. ¿Cuántos habitantes tenía en el año 2000?**

Aumento del 18 % $\rightarrow$ $I_{V1} = 1{,}18$

Aumento del 25 % $\rightarrow$ $I_{V2} = 1{,}25$

Índice de variación total: $I_{VT} = I_{V1} \cdot I_{V2} = 1{,}18 \cdot 1{,}25 = 1{,}475$

$$C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 1{,}475 \cdot 25\,000 = 36\,875 \text{ habitantes}$$

En el año 2000, el pueblo tenía 36 875 habitantes.

25. **Un agricultor vende sus melocotones y sus albaricoques, en el árbol, a un intermediario.**

— El intermediario recoge la fruta y la pone en el almacén cargando el precio en un 25 %.

— El almacén, en el proceso de limpia, selección y envasado, revaloriza el producto en un 60 %.

— Del almacén, pasa al transporte refrigerado que lo lleva al mercado central de una gran ciudad europea, proceso en el que se dobla el precio.

— Del mercado central pasa al minorista encareciéndose en un 50 %.

a) ¿Qué variación porcentual hay entre el precio cobrado por el agricultor y el pagado por el consumidor?

b) ¿A qué precio paga los melocotones el consumidor, si el agricultor los cobró a 0,45 €/kg?

c) ¿A cuánto vendió el agricultor los albaricoques, si el consumidor los paga a 2,40 €/kg?

a) • Aumento del 25 % $\rightarrow$ $I_{V1} = 1{,}25$

• Aumento del 60 % $\rightarrow$ $I_{V2} = 1{,}60$

• Se dobla el precio $\rightarrow$ $I_{V3} = 2$

• Aumento del 50 % $\rightarrow$ $I_{V4} = 1{,}50$

Índice de variación total: $I_{VT} = I_{V1} \cdot I_{V2} \cdot I_{V3} \cdot I_{V4} \rightarrow I_{VT} = 1{,}25 \cdot 1{,}60 \cdot 2 \cdot 1{,}50 = 6$

$I_{VT} = 6$ $\rightarrow$ Entre el precio cobrado por el agricultor y el pagado por el consumidor, ha habido un aumento del $(6 - 1) \cdot 100 = 500$ %

b) $C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 6 \cdot 0{,}45 = 2{,}7$ €/kg

El consumidor paga los melocotones a 2,7 €/kg.

c) $C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow 2{,}40 = 6 \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{INICIAL} = 2{,}40 : 6 = 0{,}4$ €/kg

El agricultor vendió los albaricoques a 0,4 €/kg.

26. El agua almacenada en un pantano sufre los siguientes cambios a lo largo de un año:

1.er TRIMESTRE: sube el 27 %.

2.º TRIMESTRE: sube el 11 %.

3.er TRIMESTRE: baja el 48 %.

4.º TRIMESTRE: sube el 32 %.

a) ¿Cuál es la variación durante el primer semestre? ¿Y durante el segundo semestre?

b) Si el día 30 de junio había 2 422 hm^3, ¿cuánto había el 1 de enero? ¿Y el 31 de diciembre?

a) A lo largo del primer semestre:

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 1{,}27 \cdot 1{,}11 = 1{,}41 \ \rightarrow$ hay una subida del 41 %

A lo largo del segundo semestre:

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 0{,}52 \cdot 1{,}32 = 0{,}69 \ \rightarrow$ hau una bajada del 31 %

b) El 1 de enero había:

$C_{\text{INICIAL}} \cdot 1{,}41 = 2\,422$

$C_{\text{INICIAL}} = 2\,422 : 1{,}41 = 1\,717{,}73 \text{ hm}^3$

El 31 de3 diciembre había:

$C_{\text{FINAL}} = 2\,422 \cdot 0{,}69 = 1\,671{,}18 \text{ hm}^3$

27. Un balón, lanzado a 8 metros de altura, pierde el 60 % de energía en cada bote, y deja de botar cuando cae desde una altura inferior a 25 cm. ¿Cuántos botes dará hasta pararse? (Sugerencia: Utiliza la calculadora).

En cada bote el balón pierde el 60 % de energía $\rightarrow I_V = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

- Altura inicial: h = 8 m = 800 cm
- Primer bote: h = 800 · 0,4 = 320 cm
- Segundo bote: h = 320 · 0,4 = 128 cm
- Tercer bote: h = 128 · 0,4 = 51,2 cm
- Cuarto bote: h = 51,2 · 0,4 = 20,48 cm < 25 cm

Da 4 botes hasta pararse.

28. Un comerciante poco honesto, antes de anunciar unas rebajas del 40 %, aumenta el 40 % el precio de referencia de los artículos, creyendo que, de esa forma, las cosas quedarán igual. Sin embargo, sí hay un cierto descuento.

a) ¿Cuál es el verdadero descuento?

b) Si un traje valía 550 €, ¿cuál será su valor en cada paso del proceso?

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Aumento del 40 \%} \rightarrow \text{Índice de variación: 1,4} \\ \text{Descuento del 40 \%} \rightarrow \text{Índice de variación: 0,6}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Índice de variación: } 0{,}6 \cdot 1{,}4 = 0{,}84$

Por tanto, se ha aplicado una rebaja total del 16 %.

b) Tras la primera subida $\rightarrow$ 550 · 1,4 = 770 €

Tras la rebaja del 40 % $\rightarrow$ 770 · 0,6 = 462 €

5 Depósitos y préstamos

Página 59

1. Un banco paga el 6 % anual por el dinero depositado. Un inversor pone 20 000 €. Al cabo de un año deja el dinero y los intereses y añade otros 10 000 €. ¿Cuánto dinero le darán al acabar otro año?

- Tras el primer año tendrá: $20\,000 \cdot 1{,}06 = 21\,200$ €.
- Tras añadir 10 000 € tendrá: $21\,200 + 10\,000 = 31\,200$ €.
- Al acabar otro año tendrá: $31\,200 \cdot 1{,}06 = 33\,072$ €.

2. Se depositan 6 000 € al 3 %. Al acabar el año, se saca todo el dinero, se añaden 3 820 € y se deposita todo en otro banco al 5 %. ¿Cuánto dinero hay al final de otro año?

- Tras el primer año: $6\,000 \cdot 1{,}03 = 6\,180$ €
- Se añaden 3 820 €: $6\,180 + 3\,820 = 10\,000$ €
- Tras el segundo año: $10\,000 \cdot 1{,}05 = 10\,500$ €

3. ¿Qué intereses producen 1 000 € en cuatro meses, colocados al 4 % anual? ¿En cuánto se convierten?

Cuatro meses suponen $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ de año.

Un 4 % anual significa $4 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}\widehat{3}$ % en cuatro meses:

$$1\,000 \text{ €} \xrightarrow{1{,}\widehat{3}\,\%} 1\,000 \cdot 0{,}01\widehat{3} = 13{,}33 \text{ €}$$

1 000 €, al 4 % anual, producen unos intereses de 13,33 € en cuatro meses. Por tanto, 1 000 € en cuatro meses se convierten en 1 013,33 €.

4. ¿Qué capital, colocado al 3,2 % durante 9 meses, produce unos intereses de 448,80 €?

Nueve meses suponen $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ de año.

Un 3,2 % al año significa $3{,}2 \cdot \frac{3}{4} = 2{,}4$ % en nueve meses.

$$C \xrightarrow{2{,}4\,\%} C \cdot 0{,}024 = 448{,}80 \text{ €} \rightarrow C = 448{,}80 : 0{,}024 = 18\,700 \text{ €}$$

El capital ascendía a 18 700 €.

5. Un capital de 120 000 €, colocado en una cuenta a seis meses, se convierte en 126 750 €. ¿Qué tanto por ciento anual abona la cuenta?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Capital inicial} = 120\,000 \text{ €} \\ \text{Capital final} = 126\,750 \text{ €}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Intereses} = 126\,750 - 120\,000 = 6\,750 \text{ €}$$

- I = interés semestral aplicado $\rightarrow$ $120\,000 \cdot I = 6\,750$ $\rightarrow$ $I = 6\,750 : 120\,000 = 0{,}05625$

  Abona un 5,625 % de interés semestral.
- Un 5,625 % en seis meses supone $2 \cdot 5{,}625 = 11{,}25$ % al año.

  Por tanto, la cuenta abona un 11,25 % anual.

Página 60

6. Un inversor coloca 24 000 € al 4,8 % anual durante cinco años. ¿Cuánto tendrá al final de ese periodo?

Tendrá $24\,000 \cdot (1{,}048)^5 \approx 30\,340{,}15$ €.

7. ¿En cuánto se transforman 24 000 € durante 5 años al 4,8 % anual, si los periodos de capitalización son mensuales?

4,8 : 12 = 0,4. Un 4,8 % anual significa un 0,4% mensual.

Como en 5 años hay $5 \cdot 12 = 60$ meses:

$$C_F = 24\,000 \cdot (1{,}004)^{60} \approx 30\,495{,}38 \text{ €}$$

8. Colocando en un banco 10 000 € durante cinco años, se convierten en 13 000 €.

a) ¿Qué interés paga el banco?

b) ¿Qué cantidad se habría retirado si los periodos de capitalización hubieran sido mensuales?

a) Llamando x al índice de variación anual:

$$10\,000 \cdot x^5 = 13\,000 \;\rightarrow\; x^5 = 13\,000 : 10\,000 \;\rightarrow\; x^5 = 1{,}3 \;\rightarrow\; x = \sqrt[5]{1{,}3} \approx 1{,}054$$

El banco pagaba un 5,4 % anual.

b) 5,4 : 12 = 0,45

Un 5,4 % anual significa un 0,45 % mensual. En 5 años hay $5 \cdot 12 = 60$ meses.

$$C_F = 10\,000 \cdot 1{,}0045^{60} \approx 13\,092 \text{ €}$$

Si los periodos de capitalización hubieran sido mensuales, la cantidad que se habría retirado tras cinco años habría sido 13 092 €.

6 Otros problemas aritméticos

Página 61

1. Si mezclamos 12 kg de café de 12,40 €/kg con 8 kg de café de 7,40 €/kg, ¿cuál será el precio de la mezcla?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ A	12 kg	12,40 €/kg	12 · 12,40 = 148,8 €
CAFÉ B	8 kg	7,40 €/kg	8 · 7,40 = 59,2 €
MEZCLA	20 kg		208 €

Precio de la mezcla $= \dfrac{\text{COSTE TOTAL}}{\text{CANTIDAD TOTAL}} = \dfrac{208}{20} = 10,40$ €/kg

2. Si mezclamos un lingote de 3 500 g con un 80 % de oro con otro lingote de 1 500 g con un 95 % de oro, ¿qué proporción de oro habrá en el lingote resultante?

- El lingote resultante pesará 3 500 g + 1 500 g = 5 000 g.
- En el primer lingote hay 0,8 · 3 500 = 2 800 g de oro.

  En el segundo lingote hay 0,95 · 1 500 = 1 425 g de oro.

  En el lingote resultante hay 2 800 + 1 425 = 4 225 g de oro.
- La proporción de oro en el lingote final será: $\dfrac{4\,225}{5\,000} = 0,845 \rightarrow 84,5\,\%$

3. Un barril contiene 1 *hl* de vino de alta graduación, cotizado a 3,60 €/*l*. Para rebajar el grado alcohólico, se le añaden 20 litros de agua. ¿Cuál es ahora el precio del vino?

- Tenemos 100 + 20 = 120 *l* de "vino aguado".
- Suponiendo que el agua es gratis, el precio total de la mezcla será el mismo que el del vino; es decir: 100 · 3,60 = 360 €.
- Por tanto, el precio del vino aguado será: $\dfrac{360\text{ €}}{120\ l} = 3$ €/*l*

4. ¿Qué cantidad de café superior, a 15 €/kg, hay que mezclar con 100 kilos de otro café, de peor calidad, a 9,50 €/kg, para que la mezcla resulte a 12,50 €/kg?

(Da el resultado con un error menor de 100 g).

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ SUPERIOR	x	15 €/kg	$15x$
CAFÉ INFERIOR	100	9,50 €/kg	9,50 · 100 = 950
MEZCLA	$100 + x$	12,50 €/kg	$12,50 \cdot (100 + x)$

Coste café superior + Coste café inferior = Coste mezcla

$$15x + 950 = 12,50 \cdot (100 + x) \rightarrow 15x + 950 = 1\,250 + 12,50x$$

$$2,5x = 300 \rightarrow x = \frac{300}{2,5} \rightarrow x = 120 \text{ kg}$$

Hay que mezclar 120 kg de café superior.

5. **Se mezcla un barril de vino, que se vende a 7,40 € la cántara, con tres barriles de otro vino, que se vende a 5,20 € la cántara.**

¿A cómo se ha de vender la cántara de la mezcla para obtener el mismo rendimiento que vendiéndolos por separado?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
PRIMER VINO	1	7,40 €/cántara	1 · 7,40 = 7,40 €
SEGUNDO VINO	3	5,20 €/cántara	3 · 5,20 = 15,60 €
MEZCLA	4	x	7,40 + 15,60 = 23 €

Precio de la mezcla $= \frac{\text{COSTE TOTAL}}{\text{CANTIDAD TOTAL}} = \frac{23}{4} = 5{,}75$ €/cántara

Se debe vender a 5,75 €.

6. **Un litro de agua pesa 999,2 g, y un litro de alcohol, 794,7 g. ¿Cuál es el peso de un litro de la disolución obtenida al mezclar 3 *l* de agua con 7 *l* de alcohol?**

En total, tenemos 10 *l* de mezcla.

Los 3 *l* de agua pesan $3 \cdot 999{,}2 = 2\,997{,}6$ g.

Los 7 *l* de alcohol pesan $7 \cdot 794{,}7 = 5\,562{,}9$ g.

La mezcla, en total, pesa $2\,997{,}6 + 5\,562{,}9 = 8\,560{,}5$ g.

Por tanto, el peso por litro de la disolución será: $\frac{8\,560{,}5 \text{ g}}{10\ l} = 856{,}05$ g/*l*

7. **Un joyero quiere fundir un lingote de 2 kg de oro de ley 0,85 con otro lingote de 1,5 kg de oro y cuya ley es 0,9. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?**

(La ley de una aleación es el cociente entre el peso del metal precioso y el peso total de la aleación).

El lingote resultante pesará $2 + 1{,}5 = 3{,}5$ kg.

El primer lingote contiene $0{,}85 \cdot 2 = 1{,}7$ kg de oro.

El segundo lingote contiene $0{,}9 \cdot 1{,}5 = 1{,}35$ kg de oro.

El lingote resultante contiene $1{,}7 + 1{,}35 = 3{,}05$ kg de oro.

La ley del lingote final será: $\frac{3{,}05}{3{,}5} \approx 0{,}87$

Página 62

8. Un coche va a 120 km/h y un camión a 90 km/h.

a) Si el coche sigue al camión a 75 km de distancia, ¿cuánto tardará en alcanzarlo?

b) Si están a 504 km y se dirigen uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

a) El coche se aproxima al camión a una velocidad de $120 - 90 = 30$ km/h.

Por tanto, en salvar los 75 km que les separan, tardará: $\frac{75}{30} = 2{,}5$ h.

b) Ahora, el coche y el camión se aproximan a $120 + 90 = 210$ km/h.

Por tanto, tardarán en cruzarse: $\frac{504}{210} = 2{,}4$ h.

9. Dos poblaciones A y B distan 240 km. A las nueve de la mañana sale de A hacia B un camión a una velocidad de 70 km/h. Simultáneamente, un coche sale de B hacia A a 110 km/h. ¿A qué hora se cruzan?

El camión y el coche se aproximan, el uno al otro, a razón de:

$70 + 110 = 180$ km/h

El tiempo en encontrarse será:

$$t = \frac{\text{Distancia que los separa}}{\text{Velocidad a la que se acercan}} = \frac{240}{180} = \frac{4}{3} \text{ hora} = 1 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

10. Un ciclista profesional avanza por una carretera a una velocidad de 38 km/h. Más adelante, a 22 km, un cicloturista avanza en la misma dirección a 14 km/h. ¿Cuánto tarda el uno en alcanzar al otro?

El ciclista profesional se aproxima al cicloturista a razón de:

$38 - 14 = 24$ km/h

El tiempo hasta el encuentro será:

$$t = \frac{\text{Distancia que los separa}}{\text{Velocidad a la que se acercan}} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12} \text{ hora} = 55 \text{ minutos}$$

11. Unos delincuentes roban un coche y, creyéndose a salvo, se alejan tranquilamente por la autopista a 120 km/h. Sin embargo, un testigo avisa a la policía, que sale en su persecución cinco minutos después y tarda otros doce minutos en darles alcance. ¿A qué velocidad iba la policía?

- Delincuentes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Velocidad} = 120 \text{ km/h} \\ \text{tiempo} = 5 \text{ min} + 12 \text{ min} = 17 \text{ min} = \frac{17}{60} \text{ h} \end{array}\right\} \to \text{Distancia} = 120 \cdot \frac{17}{60} = 34 \text{ km}$$

- Cuando la policía da alcance a los delincuentes también ha recorrido 34 km pero en 12 minutos $\to \frac{12}{60}$ h = 0,2 h.

- Policía:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Distancia} = 34 \text{ km} \\ \text{tiempo} = 0{,}2 \text{ h} \end{array}\right\} \to \text{Velocidad} = \frac{34}{0{,}2} = 170 \text{ km/h}$$

La policía iba a 170 km/h.

12. Julián y Cristina viven a una distancia de 3,2 km. Julián telefonea a Cristina y acuerdan salir de inmediato uno al encuentro del otro.

Julián lo hace a pie, al ritmo de 70 metros por minuto. Cristina sale en bici y el encuentro se produce en 10 minutos. ¿A qué velocidad avanzaba Cristina?

- Julián:

$$\left.\begin{array}{l}\text{velocidad} = 70 \text{ m/min} \\ \text{tiempo} = 10 \text{ min}\end{array}\right\} \to \text{Distancia recorrida} = 70 \cdot 10 = 700 \text{ m}$$

- Hasta que se encuentran Julián ha recorrido 700 m, por tanto, Cristina ha recorrido el resto de la distancia que los separaba:

$$3\,200 \text{ m} - 700 \text{ m} = 2\,500 \text{ m}$$

- Cristina:

$$\left.\begin{array}{l}\text{distancia recorrida} = 2\,500 \text{ m} \\ \text{tiempo} = 10 \text{ min}\end{array}\right\} \to \text{Velocidad} = \frac{2\,500}{10} = 250 \text{ m/min}$$

Cristina avanzaba a 250 m/min.

Página 63

13. Dos grifos, A y B, abastecen un depósito de agua. Abriendo el primero, el depósito se llena en 5 horas, y abriendo el segundo, en 7 horas.

¿Cuánto tarda en llenarse el depósito si se abren los dos?

- El grifo A llena $\frac{1}{5}$ del depósito en una hora.
- El grifo B llena $\frac{1}{7}$ del depósito en una hora.
- A y B juntos llenan $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$ del depósito en una hora.
- A y B llenan juntos el depósito en $\frac{35}{12}$ de hora = 2 h 55 min.

14. Un depósito dispone de dos grifos de abastecimiento. Abriendo el primero, se llena en 3 horas, y abriendo los dos se llena en 2 horas.

¿Cuánto tarda en llenarse el depósito si se abre solo el segundo?

- El primer grifo llena $\frac{1}{3}$ del depósito en una hora.
- Los dos grifos juntos llenan $\frac{1}{2}$ del depósito en una hora.
- El segundo grifo llena $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ del depósito en una hora.
- El segundo grifo llenará el depósito en 6 horas.

15. El embalse que abastece de agua a una ciudad, A, tiene reservas para 8 meses. Por un problema temporal, debe prestar servicio, también, a una ciudad vecina, B, con lo que se calcula que las reservas, para ambas ciudades, se reducen a 5 meses.

¿Cuánto tiempo podría asegurar el abastecimiento en exclusiva de la ciudad B?

- La ciudad A consume $\frac{1}{8}$ del embalse cada mes.
- A y B consumen $\frac{1}{5}$ del embalse cada mes.
- La ciudad B consume $\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$ del embalse en un mes.
- El embalse podría asegurar el abastecimiento de la ciudad B durante $\frac{40}{3}$ meses = 13 meses y 10 días (considerando que un mes tiene 30 días).

16. Una bañera dispone de un grifo de agua fría y otro de agua caliente. Abriendo solo el agua fría, se llena en 8 minutos, y abriendo la caliente, en 12 minutos. Dispone también de un desagüe que, cuando está llena, la vacía en 4 minutos.

a) ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse si se abren los dos grifos a la vez para obtener agua templada?

b) ¿Qué ocurrirá si, estando vacía, se abren los dos grifos y se olvida colocar el tapón del desagüe?

a) El grifo de agua fría llena, en un minuto, $\frac{1}{8}$ de la bañera.

El grifo de agua caliente llena, en un minuto, $\frac{1}{12}$ de la bañera.

Los dos grifos juntos, en un minuto, llenan $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ de la bañera.

Si se abren los dos grifos a la vez la bañera se llena en $\frac{24}{5}$ minutos = 4 minutos y 48 segundos.

b) Los dos grifos juntos, en un minuto, llenan $\frac{5}{24}$ de la bañera.

El desagüe, en un minuto, vacía $\frac{1}{4}$ de la bañera.

Como $\frac{5}{24} < \frac{1}{4}$, si se abren los dos grifos y se olvida colocar el tapón del desagüe, la bañera no se llenará nunca.

17. Un peatón ha tardado 35 minutos en el recorrido A-B. Un ciclista ha tardado14 minutos en el recorrido contrario, B-A. Si ambos han salido a la par:

a) ¿Cuánto han tardado en cruzarse?

b) ¿Qué fracción del recorrido ha cubierto cada uno?

a) El peatón recorre, cada minuto, $\frac{1}{35}$ de la distancia entre A y B.

El ciclista recorre, cada minuto, $\frac{1}{14}$ de la distancia entre B y A.

Los dos juntos recorren, cada minuto, $\frac{1}{35} + \frac{1}{14} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$ de la distancia entre A y B, entonces el peatón y el ciclista tardan 10 minutos en cruzarse.

b) El peatón ha cubierto $\frac{10}{35} = \frac{2}{7}$ del recorrido y el ciclista $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ del recorrido.

Ejercicios y problemas

Página 64

Practica

1. **Calcula mentalmente.**

a) 50 % de 360 **b) 25 % de 88** **c) 10 % de 1 375**
d) 20 % de 255 **e) 75 % de 800** **f) 30 % de 150**

a) 180 b) 22 c) 137,5
d) 51 e) 600 f) 45

2. **Calcula.**

a) 20 % de 1 240 **b) 12 % de 175**
c) 87 % de 4 000 **d) 95 % de 60**
e) 13 % de 2 400 **f) 7 % de 250**
g) 22 % de 1 353 **h) 5 % de 421**

a) $\frac{20 \cdot 1240}{100} = 248$ b) $\frac{12 \cdot 175}{100} = 21$

c) $\frac{87 \cdot 4\,000}{100} = 3\,480$ d) $\frac{95 \cdot 60}{100} = 57$

e) $\frac{13 \cdot 2\,400}{100} = 312$ f) $\frac{7 \cdot 250}{100} = 17,5$

g) $\frac{22 \cdot 1353}{100} = 297,66$ h) $\frac{5 \cdot 421}{100} = 21,05$

3. **Copia y completa en tu cuaderno.**

a) Para calcular el 12 %, se multiplica por 0,12.
b) Para calcular el 35 %**, se muliplica por 0,35.**
c) Para calcular el 5 %, se multiplica por 0,05.
d) Para calcular el 2 %**, se multiplica por 0,02.**

4. **Calcula el tanto por ciento que representa:**

a) 42 respecto de 200 **b) 45 respecto de 1 500** **c) 432 respecto de 960**
d) 117 respecto de 650 **e) 575 respecto de 2 500** **f) 195 respecto de 1 300**
g) 8 respecto de 50 **h) 75 respecto de 625**

a) $\frac{42}{100} \cdot 100 = 21\,\%$ b) $\frac{45}{1\,500} \cdot 100 = 3\,\%$ c) $\frac{432}{960} \cdot 100 = 45\,\%$

d) $\frac{117}{650} \cdot 100 = 18\,\%$ e) $\frac{575}{2\,500} \cdot 100 = 23\,\%$ f) $\frac{195}{1\,300} \cdot 100 = 15\,\%$

g) $\frac{8}{50} \cdot 100 = 16\,\%$ h) $\frac{75}{625} \cdot 100 = 12\,\%$

5. **¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?**

a) 8 % **b) 3 %** **c) 17 %** **d) 95 %** **e) 110 %**

a) I.V. = 1,08 b) I.V. = 1,03 c) I.V. = 1,17 d) I.V. = 1,95 e) I.V. = 2,10

6. **¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?**

a) 96 % **b) 13 %** **c) 35 %** **d) 6 %** **e) 63 %**

a) I.V. = 0,04 b) I.V. = 0,87 c) I.V. = 0,65 d) I.V. = 0,94 e) I.V. = 0,37

7. **Piensa y completa en tu cuaderno.**

a) Al multiplicar por 1,3 se aumenta un 30 **%.**

b) Al multiplicar por 1,08 se aumenta un 8 **%.**

c) Al multiplicar por 0,90 se disminuye un 10 **%.**

d) Al multiplicar por 0,65 se disminuye un 35 **%.**

8. **Calcula el valor de x en cada caso.**

a) El 30 % de x es 21.

b) El 85 % de x es 187.

c) El 32 % de x es 384.

d) El 13 % de x es 97,24.

a) 30 % de $x = 21 \rightarrow 0,3 \cdot x = 21 \rightarrow x = 21 : 0,3 = 70$

b) 85 % de $x = 187 \rightarrow 0,85 \cdot x = 187 \rightarrow x = 187 : 0,85 = 220$

c) 32 % de $x = 384 \rightarrow 0,32 \cdot x = 384 \rightarrow x = 384 : 0,32 = 1\,200$

d) 13 % de $x = 97,24 \rightarrow 0,13 \cdot x = 97,24 \rightarrow x = 97,24 : 0,13 = 748$

9. **Expresa en un solo porcentaje.**

a) El 40 % del 20 %.

b) El 15 % del 30 %.

c) El 12,5 % del 80 %.

d) El 120 % del 10 %.

a) 8% b) 4,5% c) 10% d) 12%

Aplica lo aprendido

Problemas de proporcionalidad simple y compuesta

10. **Un coche consume 6,4 *l* de combustible cada 100 km. ¿Cuánto gasta en 300 km? ¿Y en 375 km?**

En 300 km gasta $6,4 \cdot 3 = 19,2$ *l*.

En 375 km gasta $6,4 \cdot 3,75 = 24$ *l*.

11. **Trabajando 8 horas al día, he tardado 5 días en poner el suelo de una vivienda. ¿Cuántos días habría tardado trabajando 10 horas diarias?**

El número de horas trabajadas al día es inversamente proporcional al número de días que se tarda en hacer un trabajo.

HORAS/DÍA	N.° DE DÍAS
8	5
10	x

I

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 5}{10} = 4$$

Trabajando 10 horas al día, habría tardado 4 días.

12. **Un campesino ha obtenido una cosecha de 40 000 kilos de trigo de un campo que tiene una superficie de 2,5 hectáreas. ¿Qué cosecha puede esperar de un campo próximo de hectárea y media?**

La superficie de un campo y el número de kilos de trigo que se obtienen son magnitudes directamente proporcionales.

SUPERFICIE (ha)	TRIGO (kg)
2,5	40 000
1,5	x

D

$$\frac{2,5}{1,5} = \frac{40\,000}{x} \rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 40\,000}{2,5} = 24\,000$$

Puede esperar una cosecha de 24 000 kg.

13. **Un grifo con un caudal de 45 *l*/h llena un depósito en 8 horas. ¿Cuál debería ser el caudal para llenar la mitad del depósito en 6 horas?**

El grifo en 1 hora arroja 45 l $\rightarrow$ En 8 horas arrojará $45 \cdot 8 = 360\ l$.

La mitad del depósito será $\frac{360\ l}{2} = 180\ l$.

Si se quiere llenar en 6 horas, el caudal será: $\frac{180\ l}{6\ \text{h}} = 30\ l/\text{h}$

14. **Una empresa ha cobrado 30 € por el alquiler de una máquina cortacésped durante 5 días. ¿Cuánto recibirá por el alquiler de dos cortacéspedes durante 4 días?**

El número de máquinas cortacéspedes y el número de días son directamente proporcionales al coste del alquiler.

N.° DE MÁQUINAS	N.° DE DÍAS	COSTE (€)
1	5	30
2	4	x

D

D

$$\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 5} = 48$$

La empresa ha cobrado 48 € por el alquiler de 2 máquinas durante 4 días.

15. **Un taller fabrica en 10 días 1 600 chaquetas, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuánto tardará en hacer 2 000 chaquetas trabajando 10 horas al día?**

El número de chaquetas que se han de confeccionar es directamente proporcional al número de días que se han de trabajar.

Sin embargo, el número de horas de trabajo al día es inversamente proporcional al número de días trabajados.

CHAQUETAS	HORAS/DÍA	N.º DE DÍAS
1 600	8	10
2 000	10	x

I

D

$$\frac{1600 \cdot 10}{2000 \cdot 8} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 2000 \cdot 8}{1600 \cdot 10} = 10$$

Tardará 10 días en hacer 2 000 chaquetas.

16. **Un pintor ha cobrado 480 € por cuatro jornadas de 8 horas. ¿Cuánto cobrarán dos pintores por tres jornadas de 10 horas?**

El número de pintores que trabajan y el número de jornadas trabajadas son directamente proporcionales al sueldo cobrado.

N.º DE PINTORES	JORNADAS	SUELDO
1	4	480
2	3	x

D

D

$$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{480}{x} \rightarrow x = \frac{480 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 4} = 720$$

720 € es lo que cobrarían 2 pintores trabajando 3 jornadas de 8 h.

Por 3 jornadas de 1 h, 2 pintores cobrarían $\frac{720}{8} = 90$ €.

Por 3 jornadas de 10 h, 2 pintores cobrarían $90 \cdot 10 = 900$ €.

17. **Un tablero de 2,80 m × 1,20 m cuesta 42 €. ¿Cuánto costará otro tablero de 1,65 m × 0,80 m?**

LARGO DEL TABLERO (m)	ANCHO DEL TABLERO (m)	COSTE (€)
2,80	1,20	42
1,65	0,80	x

D

D

$$\frac{42}{x} = \frac{2,80}{1,65} \cdot \frac{1,20}{0,80} \rightarrow \frac{42}{x} = \frac{2,80 \cdot 1,20}{1,65 \cdot 0,80} \rightarrow x = \frac{42 \cdot 1,65 \cdot 0,80}{2,80 \cdot 1,20} = 16,50 \text{ €}$$

Un tablero de 1,65 m × 0,80 m costará 16,50 €.

Problemas de porcentajes

18. **Para comprar un piso de 180 000 €, se ha de pagar, además, un 8 % de IVA y 5 400 € de gastos de notaría y gestión. ¿Cuál es el gasto total?**

$180\,000 \cdot 1{,}08 = 194\,400$

El gasto total es de $194\,400 + 5\,400 = 199\,800$ €.

19. **Un especulador compra 6 000 m^2 de terreno a 80 €/m^2. Un año después, vende 2 000 m^2 un 20 % más caro, y el resto, por un 25 % más de lo que le costó. ¿Cuál ha sido su ganancia?**

Precio pagado por el terreno = $6\,000 \cdot 80 = 480\,000$ €

Precio de venta:

2 000 m^2 un 20 % más caro $\rightarrow$ $1{,}20 \cdot 80 = 96$ €/m^2

Venta de 2 000 m^2 $\rightarrow$ $2\,000 \cdot 96 = 192\,000$ €

4 000 m^2 un 25 % más caro $\rightarrow$ $1{,}25 \cdot 80 = 100$ €/m^2

Venta de 4 000 m^2 $\rightarrow$ $4\,000 \cdot 100 = 400\,000$ €

Dinero total conseguido por la venta: $400\,000 + 192\,000 = 592\,000$ €

Ganancia = $592\,000 - 480\,000 = 112\,000$ €

La ganancia obtenida es de 112 000 €.

20. **De 1 232 hombres encuestados, 924 declaran que colaboran en las tareas del hogar. ¿Qué porcentaje de hombres dice trabajar en casa?**

De un total de 100 hombres, colaboran en las tareas del hogar x.

TOTAL	PARTE
1 232	924
100	x

$$\frac{1\,232}{100} = \frac{924}{x} \rightarrow x = \frac{924 \cdot 100}{1\,232} = 75$$

El 75 % de los hombres dice trabajar en casa.

Página 65

21. En un examen de Matemáticas han aprobado 22 estudiantes, lo que supone el 88 % del total de la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

88 % del total = 22 estudiantes

Total · 0,88 = 22 → Total = 22 : 0,88 = 25

En la clase hay 25 estudiantes.

22. En la sesión de tarde de un teatro se han ocupado hoy 693 butacas, lo que supone el 77 % del total. ¿Cuál es el aforo del teatro?

El aforo es 693 : 0,77 = 900 plazas.

23. En una tienda se anuncian rebajas del 35 %.

a) ¿En cuánto se queda un jersey de 60 €?

b) ¿Cuánto costaba, sin rebaja, una camisa que se queda en 39 €?

a) Rebaja del 35 % → $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{FINAL}} = 0{,}65 \cdot 60 = 39$ €

El jersey, con la rebaja, se queda en 39 €.

b) Del apartado anterior se deduce que la camisa, sin rebaja, costaba 60 €.

24. Paula ha pagado 76,50 € por un vestido que costaba 85 €. ¿Qué tanto por ciento le han rebajado?

PRECIO INICIAL (€)	PRECIO FINAL (€)
85	76,5
100	x

$$\frac{85}{100} = \frac{76{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{76{,}5 \cdot 100}{85} = 90$$

En un artículo que hubiera costado 100 €, habría pagado 90 €, luego le han rebajado el 10 %.

25. A Irene le han subido el sueldo un 5 % y ahora gana 2 205 €. ¿Cuánto ganaba antes de la subida?

Subida del 5 % → $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 2\,205 = 1{,}05 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow$$

$$\rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 2\,205 : 1{,}05 = 2\,100 \text{ €}$$

Antes de la subida Irene ganaba 2 100 €.

26. **En las rebajas pagamos 344,40 € por un anorak rebajado un 18 %. ¿Cuál era el precio sin rebaja?**

Rebaja del 18 % $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 344{,}40 = 0{,}82 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 344{,}40 : 0{,}82 = 420\ €$$

El precio sin rebajar del anorak era de 420 €.

27. **Una empresa automovilística ha exportado, durante este trimestre, 6 210 coches, frente a los 5 400 del trimestre pasado. ¿En qué porcentaje ha aumentado este trimestre respecto al anterior?**

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 6\,210 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 5\,400 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 6\,210 : 5\,400 = 1{,}15$$

La exportación de coches ha aumentado un 15 % respecto al trimestre anterior.

28. **El precio de la vivienda subió un 8 % hace dos años, un 15 % el año pasado y un 10 % este año. ¿Cuál ha sido el porcentaje total de subida?**

El índice de variación en los últimos tres años será:

$$1{,}08 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}1 = 1{,}3662 \rightarrow 1{,}3662 - 1 = 0{,}3662$$

El porcentaje de subida es 36,62 %.

29. **Un trabajador, que tenía un sueldo de 1 800 €, es ascendido a jefe de sección con un sueldo de 2 200 €. ¿En qué tanto por ciento ha mejorado el sueldo?**

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 2\,200 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 1\,800 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 2\,200 : 1\,800 = 1{,}22$$

Su sueldo ha mejorado un 22 %.

Problemas de depósitos y préstamos

30. **Se depositan 15 000 € al 2,5 % anual. Al acabar el año se saca todo el dinero, se añaden 10 000 € y se deposita todo en otro banco al 4 %. ¿Cuánto dinero habrá al acabar el segundo año?**

Dinero al finalizar el primer año = 15 000 · 1,025 = 15 375 €

Añade otros 10 000 € $\rightarrow$ 15 375 + 10 000 = 25 375 €

Se depositan en otro banco al 4 % durante otro año $\rightarrow$ 25 375 · 1,04 = 26 390 €

Al acabar el segundo año habrá 26 390 €.

31. **Un comerciante pide una prórroga de dos meses por una letra de 2 000 €, con unos intereses del 16 % anual. ¿Cuánto le cuesta la prórroga?**

Si la prórroga fuera de un año, tendría que pagar como intereses de demora el 16 % de 2 000:

$$16\ \%\ \text{de}\ 2\,000 = \frac{16 \cdot 2\,000}{100} = 320\ €$$

Como solo pide una prórroga de 2 meses (sexta parte del año), deberá pagar unos intereses de 320 : 6 = 53,33 €.

La prórroga le cuesta 53,33 €.

32. **Un comerciante pide una prórroga de 4 meses por una letra de 5 000 €, lo que le supone una penalización de 225 €. ¿A qué tanto por ciento le ponen los intereses de demora?**

i = interés cuatrimestral aplicado

$$5\,000 \cdot i = 225 \;\rightarrow\; i = 225 : 5\,000 = 0{,}045$$

Se le impone un 4,5 % de interés cuatrimestral por la demora.

Un 4,5 % en cuatro meses significa un $3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5$ % al año.

Por tanto, le aplican un 13,5 % anual por los intereses de demora.

33. **Jorge tiene 24 000 €, y pacta mantener el dinero en un banco durante cinco años, cobrando los beneficios cada año, a un 6 % anual.**

¿Qué beneficio obtiene anualmente? ¿Y en los cinco años del acuerdo?

Dado que los beneficios los retira anualmente, el interés que pacta con el banco es simple.

Beneficio que obtiene en 1 año:

$$6\,\%\text{ de } 24\,000 = \frac{6 \cdot 24\,000}{100} = 1\,440\ €$$

Beneficio que obtiene en 5 años:

$$5 \cdot 1\,440 = 7\,200\ €$$

En 1 año obtiene un beneficio de 1 440 €, y en 5 años, 7 200 €.

34. **Tengo 28 500 € colocados al 4,25 % anual. Al terminar el año, sumo los intereses a lo que tenía y lo dejo en el banco con las mismas condiciones. ¿Qué cantidad tendré al cabo de cinco años?**

$C_F = 28\,500 \cdot 1{,}0425^5 = 35\,093{,}38$ €

35. **¿En cuánto se transforman 20 600 € durante 3 años al 6 % anual si los periodos de capitalización son mensuales?**

6 % anual significa 0,5% mensual (6 : 12 = 0,5).

En 3 años hay 36 meses. Por tanto:

$$\text{Capital final} = 20\,600 \cdot 1{,}005^{36} = 24\,651{,}62\ €$$

36. **Rosa y María colocan, cada una, 6 000 € al 4 % anual durante cuatro años. Rosa retira anualmente los beneficios obtenidos. María da orden de que los beneficios se sumen cada año al capital. ¿Cuál es la diferencia entre los beneficios obtenidos por cada una?**

Rosa negocia su capital bajo un interés simple:

$$\left.\begin{array}{l} C = 6\,000\ € \\ r = 4 \\ t = 4 \end{array}\right\} \text{Beneficio} \;\rightarrow\; I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{6\,000 \cdot 4 \cdot 4}{100} = 960\ €$$

María negocia su capital bajo un interés compuesto:

Capital final: $6\,000 \cdot 1{,}04^4 = 7\,019{,}15$ €

María gana: $7\,019{,}15 - 6\,000 = 1\,019{,}15$ €

María obtiene: $1\,019{,}15 - 960 = 59{,}15$ € más de beneficio que Rosa.

Problemas de repartos

37. **Se ha encargado a un orfebre el diseño y la fabricación de un trofeo que ha de pesar 5 kg y ha de estar fabricado con una aleación que contenga tres partes de oro, tres de plata y dos de cobre. ¿Qué cantidad se necesita de cada metal?**

Número total de partes = 3 + 3 + 2 = 8

Cantidad de metal en cada parte = $\frac{5}{8}$ = 0,625 kg

Cantidad de oro → 3 · 0,625 = 1,875 kg = 1 kg 875 g

Cantidad de plata → 3 · 0,625 = 1,875 kg = 1 kg 875 g

Cantidad de cobre → 2 · 0,625 = 1,25 kg = 1 kg 250 g

38. **Tres vecinos de una aldea alquilan una máquina motosierra durante 12 días. Juan la tiene 2 días; Pedro, 3 días; y Rufino, 7 días. El importe del alquiler asciende a 264 euros. ¿Cuánto debe pagar cada uno?**

Número total de días que se alquila la máquina = 12

Precio por día = $\frac{\text{Precio total}}{\text{N.° de días}} = \frac{264}{12} = 22$

Juan debe pagar → 2 · 22 = 44 €

Pedro debe pagar → 3 · 22 = 66 €

Rufino debe pagar → 7 · 22 = 154 €

39. **En un concurso de televisión se distribuyen 155 000 € entre los tres finalistas. El reparto se realiza en partes inversamente proporcionales al número de fallos cometidos durante la prueba:**

A: 3 fallos B: 5 fallos C: 2 fallos

¿Cuánto se lleva cada uno de los finalistas?

Repartir 155 000 € en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 2 es equivalente a repartir dicha cantidad en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{10 + 6 + 15}{30} = \frac{31}{30}$$

$$155\,000 : \frac{31}{30} = 150\,000$$

Finalista A (3 fallos) → $\frac{1}{3} \cdot 150\,000 = 50\,000$ €

Finalista B (5 fallos) → $\frac{1}{5} \cdot 150\,000 = 30\,000$ €

Finalista C (2 fallos) → $\frac{1}{2} \cdot 150\,000 = 75\,000$ €

Otros problemas aritméticos

40. **Un fabricante de churros usa una mezcla de aceite que contiene dos partes de aceite de oliva por cada parte de aceite de girasol. Sabiendo que compra el de oliva a 3,40 €/litro y el de girasol a 1,60 €/litro, ¿a cómo le sale el litro de mezcla?**

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE TOTAL (€)
ACEITE OLIVA	2	3,40	6,80
ACEITE GIRASOL	1	1,60	1,60
MEZCLA	3		8,40

Precio de un litro de mezcla = $\dfrac{\text{Coste}}{\text{n.° de litros}} = \dfrac{8,40}{3} = 2,8$ €

Página 66

41. **Dos poblaciones A y B distan 270 km. A las 12 de la mañana sale de A hacia B un coche que circula a 100 km/h. En el mismo instante, un coche sale de B hacia A circulando a 80 km/h. ¿A qué hora se cruzan?**

$$\underset{A}{\circ}\xrightarrow{100 \text{ km/h}} \qquad \xleftarrow{80 \text{ km/h}}\underset{B}{\circ}$$

Ambos vehículos se aproximan a la velocidad de 100 + 80 = 180 km/h.

A una velocidad de 180 km/h, el tiempo que tardan en recorrer los 270 km que separan

A de B es $t = \frac{e}{v} = \frac{270}{180} = 1{,}5$ h.

Por tanto, se cruzarán a las 13 horas y media (una y media de la tarde).

42. **Un ciclista sale de un lugar a 18 km/h. Media hora más tarde sale en su persecución, desde el mismo lugar, otro ciclista a 22 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero?**

Cuando sale el segundo ciclista, el primero, en media hora, lleva recorridos 9 km.

Los ciclistas se aproximan a 22 – 18 = 4 km/h.

Y 9 km, a una velocidad de 4 km/h se recorren en 2 horas y cuarto.

El segundo ciclista dará alcance al primero en 2 h 15 min.

43. **Una furgoneta circula por una carretera a una velocidad de 70 km/h. Treinta kilómetros más atrás, avanza en el mismo sentido un turismo a 100 km/h.**

Calcula el tiempo que tarda el turismo en alcanzar a la furgoneta y la distancia que recorre hasta lograrlo.

El turismo se aproxima a la furgoneta a razón de 100 – 70 = 30 km/h

El tiempo hasta que el turismo alcanza a la furgoneta es:

$$t = \frac{\text{Distancia que los separa}}{\text{Velocidad a la que se acerca}} = \frac{30}{30} = 1 \text{ hora}$$

Por tanto, el turismo tarda una hora en alcanzar a la furgoneta y, dado que su velocidad es de 100 km/h, habrá recorrido 100 km hasta lograrlo.

44. **Dos manantiales vierten sus aguas en un depósito de 345 litros de capacidad. Si el caudal del primero es de 50 *l*/min, y el del segundo, 40 *l*/min, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el depósito?**

El caudal de los dos manantiales será:

50 + 40 = 90 *l*/min.

Los dos manantiales juntos invertirán $\frac{345}{90} \approx 3{,}83$ minutos en llenar 345 *l*.

45. **El depósito de agua potable de cierta población se abastece del manantial del que siempre bebió el pueblo y de un pozo abierto recientemente, cuando aumentó la demanda. El manantial es capaz de llenar el depósito en 6 horas, y la bomba que extrae el agua del pozo, en 10 horas.**

¿En cuánto tiempo se llenará el depósito, actuando ambos recursos conjuntamente?

El manantial, en una hora, llena $\frac{1}{6}$ del depósito.

La bomba que extrae el agua del pozo, en una hora, llena $\frac{1}{10}$ del depósito.

Ambos recursos juntos llenan en una hora:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \text{ del depósito}$$

Por tanto, el manantial y la bomba llenan el depósito en $\frac{15}{4}$ horas = 3 h 45 min

46. **Un depósito de riego se abastece de dos bombas que extraen agua de sendos pozos. La primera, funcionando en solitario, llena el depósito en 10 horas, pero cuando se ponen las dos en funcionamiento, se llena en 6 horas.**

¿Cuánto tiempo tardaría la segunda bomba, conectada en solitario?

La primera bomba llena, en una hora, $\frac{1}{10}$ del depósito.

Las dos bombas juntas llenan en una hora, $\frac{1}{6}$ del depósito.

La segunda bomba llena, en una hora:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \text{ del depósito.}$$

Por tanto, la segunda bomba conectada en solitario llenaría el depósito en 15 horas.

47. **Los autobuses que cubren el servicio entre dos urbanizaciones tardan 30 minutos en el recorrido A-B y 24 minutos en el recorrido contrario, B-A.**

¿Cuánto tardan en cruzarse dos autobuses que salen a la misma hora, para hacer los recorridos opuestos?

El primer autobús recorre, cada minuto, $\frac{1}{30}$ del recorrido A-B.

El segundo autobús recorre, cada minuto, $\frac{1}{24}$ del recorrido B-A.

Los dos juntos recorren, cada minuto:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{24} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40} \text{ del recorrido entre ambas urbanizaciones}$$

Por tanto, los autobuses tardan en cruzarse $\frac{40}{3}$ minutos = 13 minutos y 20 segundos.

Resuelve problemas

48. Tres socios invierten en un negocio 272 000 €. El primero pone el 65 %; el segundo, el 20 %, y el tercero, el resto. Si a final de año han conseguido una rentabilidad del 8 % del capital invertido, ¿qué cantidad recibirá cada uno?

La cantidad que obtienen es 272 000 · 1,08 = 293 760 €.

El primer socio recibe 293 760 · 0,65 = 190 944 €.

El segundo socio recibe 293 760 · 0,20 = 58 752 €.

El tercer socio recibe 293 760 · 0,15 = 44 064 €.

49. Una carrera ciclista está dotada con un premio de 5 000 € para el ganador más otros 7 200 € a distribuir entre los cuatro siguientes, de forma que a cada uno se le asignará una cantidad inversamente proporcional al puesto conseguido en la carrera.

¿Cuánto se llevará cada uno de esos cuatro?

Repartir 7 200 € en partes inversamente proporcionales a 2, 3, 4 y 5 es equivalente a repartir dicha cantidad en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{30+20+15+12}{60}=\frac{77}{60}$$

$$7\,200 : \frac{77}{60}=\frac{7\,200 \cdot 60}{77}$$

Al segundo clasificado le corresponden $\left(\frac{7\,200 \cdot 60}{77}\right) \cdot \frac{1}{2} = 2\,805{,}19$ €.

Al tercer clasificado le corresponden $\left(\frac{7\,200 \cdot 60}{77}\right) \cdot \frac{1}{3} = 1\,870{,}13$ €.

Al cuarto clasificado le corresponden $\left(\frac{7\,200 \cdot 60}{77}\right) \cdot \frac{1}{4} = 1\,402{,}60$ €.

Al quinto clasificado le corresponden $\left(\frac{7\,200 \cdot 60}{77}\right) \cdot \frac{1}{5} = 1\,122{,}08$ €.

50. Un estudiante ocupa un piso de alquiler el día uno de septiembre con la idea de compartirlo con otros dos compañeros. El día 10 entra el segundo inquilino, y el día 25, el tercero.

¿Cómo deben repartir ese primer mes el recibo del alquiler, que asciende a 605 €?

El primer estudiante ocupa el piso durante 30 días; el segundo, 21 días y el tercero, 6 días. Total, 57 días.

Precio por día = $\frac{605}{57}$ = 10,6 €

El primer estudiante debe pagar 30 · 10,6 = 318 €.

El segundo estudiante debe pagar 21 · 10,6 = 222,6 ≈ 223 €.

El tercer estudiante debe pagar 6 · 10,6 = 63,6 ≈ 64 €.

51. Un automóvil ha ido a 90 km/h durante 20 min y a 120 km/h durante los 10 min siguientes. ¿Cuál ha sido la velocidad media en ese tiempo?

Calculamos el espacio que ha recorrido en cada periodo:

- Durante 20 minutos la velocidad ha sido de 90 km/h.

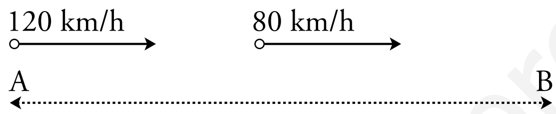
  El espacio que ha recorrido es de $\frac{90}{3} = 30$ km (20 minutos es la tercera parte de 1 hora).

- Durante 10 minutos la velocidad ha sido de 120 km/h.

  En este tiempo ha recorrido $\frac{120}{6} = 20$ km (10 minutos es la sexta parte de 1 hora).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Espacio total recorrido} = 30 + 20 = 50 \text{ km} \\ \text{Tiempo invertido} = 20 + 10 + 30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}\end{array}\right\} \text{Velocidad media} = \frac{50}{0,5} = 100 \text{ km/h}$$

52. Un camión sale de A hacia B a 80 km/h. Un cuarto de hora después sale un coche, en la misma dirección, a 120 km/h, llegando ambos a B simultáneamente. ¿Cuál es la distancia entre A y B?



Ambos vehículos se aproximan a una velocidad de 120 – 80 = 40 km/h.

- Calculamos la distancia que lleva recorrida el camión cuando el coche sale:

  En 1 h recorre 80 km. En $\frac{1}{4}$ h recorre $\frac{80}{4} = 20$ km.

- El tiempo en recorrer los 20 km que les separan, a una velocidad de 40 km/h es:

$$t = \frac{e}{v} \quad \to \quad t = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ h}$$

El coche y el camión tardan media hora en encontrarse, momento que se produce al final del trayecto. Por tanto, el coche tarda 0,5 h en llegar a B a una velocidad de 120 km/h. Así, la distancia de A a B será de: $e = 0,5 \text{ h} \cdot 120 \text{ km/h} = 60$ km.

53. Un comerciante compra 30 sacos de 50 kilos de café a 10,50 €/kg y 15 sacos de 40 kilos de otro café, a 14 €/kg. Después, los mezcla y los envasa en bolsas de 400 gramos. ¿A cómo debe vender la bolsa si desea ganar 1,50 céntimos por cada kilo?

El coste de lo que ha comprado es:

$$30 \cdot 50 \cdot 10,5 + 15 \cdot 40 \cdot 14 = 24\,150 \text{ €}$$

Ha comprado $30 \cdot 50 + 15 \cdot 40 = 2\,100$ kg de café.

Cada kilo de café le ha salido a:

$$24\,150 : 2\,100 = 11,50 \text{ €/kg}$$

Envasándolos en bolsas de 400 g = 0,4 kg, emplea:

$$2\,100 : 0,4 = 5\,250 \text{ bolsas}$$

Al venderlo, quiere obtener:

$$11,50 + 1,50 = 13 \text{ €/kg.}$$

Es decir, quiere obtener, en total, $2\,100 \cdot 13 = 27\,300$ €.

Así, debe vender cada bolsa a $27\,300 : 5\,250 = 5,20$ €.

54. **Para la fabricación de cierto refresco, se mezclan 200 litros de un concentrado de zumo de frutas, 50 litros de sirope y 250 litros de agua tratada.**

¿A cómo sale el litro de refresco, si el concentrado de zumo cuesta 2,50 €/*l*; el sirope, 1,50 €/*l*, y el tratamiento del agua sale a 100 € el metro cúbico?

$$\left.\begin{array}{l} \text{El coste del zumo es } 200 \cdot 2,5 = 500\ € \\ \text{El coste del sirope es } 50 \cdot 1,50 = 75\ € \\ \text{El coste del agua } (100\ €/\text{m}^3 = 0,1\ €/l) \text{ es } 250 \cdot 0,1 = 25\ € \end{array}\right\} \text{Total: } 600\ €$$

En la mezcla hay un total de 200 + 50 + 250 = 500 *l*.

El litro de refresco sale a 500 : 600 = 0,83 €.

55. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

Página 67

56. **Se mezclan 300 kg de pintura de 30 € el kilo con 200 kg de otra pintura más barata. De esta forma, la mezcla sale a 24 € el kilo.**

¿Cuál es el precio de la pintura barata?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA BARATA	200	?	?
PINTURA CARA	300	30	9 000
MEZCLA	500	24	12 000

Para que el coste de la mezcla sea de 12 000 €, el coste de la pintura barata ha de ser:

$$12\,000 - 9\,000 = 3\,000 \text{ €}$$

El precio por kilo de la pintura barata será:

$$\frac{\text{Coste}}{\text{kilos}} = \frac{3\,000}{200} = 15 \text{ €}$$

57. **Se funde un collar de oro de 450 gramos y ley 0,95 junto con un brazalete, también de oro, de 300 gramos y ley 0,75.**

¿Cuál es la ley del oro resultante?

	PESO	LEY	PESO DE ORO
COLLAR	450 g	0,95	427,5 g
BRAZALETE	300	0,75	225 g
MEZCLA	750 g		652,5 g

$$\text{Ley de la mezcla} = \frac{652,5}{750} = 0,87$$

58. **El 34 % de los asistentes a un congreso sobre la paz son europeos; el 18 %, africanos; el 32 %, americanos, y el resto, asiáticos.**

Sabiendo que hay 51 europeos, ¿cuántos hay de cada uno de los demás continentes?

Llamamos x al número de asistentes al congreso.

$$34\,\% \text{ de } x = 51 \;\rightarrow\; 0,34 \cdot x = 51 \;\rightarrow\; x = 51 : 0,34 = 150$$

El número total de asistentes es de 150 personas.

Calculamos el número de africanos, americanos y asiáticos que hay:

Africanos $\rightarrow$ $18\,\%$ de $150 = 0,18 \cdot 150 = 27$

Americanos $\rightarrow$ $32\,\%$ de $150 = 0,32 \cdot 150 = 48$

Asiáticos $\rightarrow$ $150 - 27 - 48 - 51 = 24$

Hay 27 africanos, 48 americanos y 24 asiáticos.

59. **Celia ha comprado en las rebajas un jersey con un descuento del 15 % y una falda con un descuento del 20 %, y le han salido ambas prendas por el mismo precio.**

Si en total se ha gastado 136 €, ¿cuánto se habría gastado si las hubiera comprado antes de las rebajas?

Se ha gastado 136 € y ambas prendas rebajadas le han salido por el mismo precio. Por tanto, el precio rebajado, tanto del jersey como de la falda, es de 68 €.

Jersey:

$$15\,\% \text{ de descuento } \to I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

$$68 = 0{,}85 \cdot C_{\text{INICIAL}} \to C_{\text{INICIAL}} = 68 : 0{,}85 = 80\ €$$

Antes de la rebaja, el jersey costaba 80 €.

Falda:

$$20\,\% \text{ de descuento } \to I_{\text{VARIACIÓN}} = 0{,}80$$

$$68 = 0{,}80 \cdot C_{\text{INICIAL}} \to \text{Precio sin rebajar} = 68 : 0{,}80 = 85\ €$$

Antes de la rebaja, la falda costaba 85 €.

Por tanto, si se hubiera comprado ambas prendas antes de la rebaja se habría gastado:

$$80\ € + 85\ € = 165\ €$$

60. **Una pareja, al pactar la compra de un piso, acuerda abonar como señal un 5 % del precio, un segundo pago del 65 % a la firma de las escrituras, y el resto en 12 mensualidades de 7 000 euros cada una.**

¿Cuál es el precio del piso?

Señal $\to$ 5 % del precio del piso

Firma de escrituras $\to$ 65 % del precio del piso

Resto $\to$ $12 \cdot 7\,000 = 84\,000$, que corresponde al 30 % del valor del piso.

Llamando x al precio del piso:

$$30\,\% \text{ de } x = 84\,000 \to 0{,}3 \cdot x = 84\,000 \to x = 84\,000 : 0{,}3 \to x = 280\,000$$

El precio del piso es de 280 000 €.

61. **Se colocan 5 600 € en una cuenta bancaria, al 1,60 % anual, y se retiran al cabo de un año y tres meses.**

a) ¿Qué cantidad se retirará si el periodo de capitalización es anual?

b) ¿Y si el periodo de capitalización es mensual?

c) ¿Cuál de las opciones es más beneficiosa?

a) $$\left.\begin{array}{l} C = 5\,600\ € \\ r = 1{,}6\%\ \text{anual} \\ t = 1\ \text{año y 3 meses} = \dfrac{5}{4}\ \text{años} = 1{,}25\ \text{años} \end{array}\right\} C_F = 5\,600 \cdot (1 + 0{,}016)^{1{,}25}$$

Se retirarán: $5\,600 \cdot 1{,}016^{1{,}25} = 5\,712{,}22\ €$

b) 1,6 : 12 = $0,1\overset{\frown}{3}$ → Un 1,6 % anual significa un $0,1\overset{\frown}{3}$ % mensual.

En un año y tres meses hay 15 meses.

Por tanto, $C_F = 5\,600 \cdot (1 + 0,001\overset{\frown}{3})^{15} = 5\,600 \cdot 1,001\overset{\frown}{3}^{\,15} = 5\,713,05$ €

c) La segunda opción es ligeramente más beneficiosa que la primera.

62. **¿En qué cantidad se convierte un euro, colocado al 5 % durante 25 años?**

$$\left.\begin{array}{l} C = 1 \text{ €} \\ r = 5\% \text{ anual} \\ t = 25 \text{ años} \end{array}\right\} \quad C_F = 1 \cdot (1 + 0,05)^{25} = 1,05^{25} = 3,39 \text{ €}$$

Problemas "+"

63. **Un camión ha tardado 3,5 h en el recorrido A-B entre dos ciudades. Un turismo, que salió a la misma hora, ha tardado 2,5 h en el recorrido contrario, B-A.**

a) ¿Cuánto han tardado en cruzarse?

b) ¿Qué fracción del recorrido ha cubierto cada uno?

a) • El camión ha tardado 3,5 h = $\frac{7}{2}$ h en el recorrido A-B, por tanto, el camión recorre cada hora $\frac{1}{7/2} = \frac{2}{7}$ de la distancia entre A y B.

• El turismo ha tardado 2,5 h = $\frac{5}{2}$ h en el recorrido B-A, por lo que el turismo recorre cada hora $\frac{1}{5/2} = \frac{2}{5}$ de la distancia entre B y A.

• Los dos juntos recorren, cada hora, $\frac{2}{7} + \frac{2}{5} = \frac{24}{35}$ de la distancia entre ambas ciudades.

• En conclusión, el camión y el turismo tardan en cruzarse $\frac{35}{24}$ horas = 1 h 27 min 30 s.

b) El camión ha cubierto $\frac{35}{24} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{12}$ del recorrido, y el turismo $\frac{35}{24} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{12}$ del recorrido.

64. **Vicente ha pagado 1 003 € por un televisor que estaba rebajado un 15 %. Teniendo en cuenta que le han cargado un 18 % de IVA, ¿cuál era el precio de catálogo, sin rebaja ni IVA?**

Llamamos x al precio del televisor en catálogo.

Se hace una rebaja del 15 % (se cobra el 85 %) y se aplica un 18 % de IVA. Por tanto:

$$x \cdot 0,85 \cdot 1,18 = 1\,003 \;\rightarrow\; x = 1\,000 \text{ €}$$

65. **Pablo colocó hace tiempo 48 000 € al 4 % en un banco, dando orden de acumular anualmente los intereses al capital. Si en la actualidad tiene 56 153,21 €, ¿cuántos años dura ya la inversión?**

Llamamos x al número de años que dura la inversión:

$$48\,000 \cdot (1{,}04)^x = 56\,153{,}21 \rightarrow (1{,}04)^x = 1{,}1699$$

Observamos que:

$$(1{,}04)^2 = 1{,}0816 \qquad (1{,}04)^3 = 1{,}124864 \qquad (1{,}04)^4 = 1{,}1699$$

Se obtiene $x = 4$ años.

66. **¿Cuántos años tarda en doblarse un capital colocado al 4 % anual?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Capital inicial} = C\\ \text{Capital final} = 2C\\ \text{Rédito} = 4\%\text{ anual}\end{array}\right\} \rightarrow 2C = C \cdot (1 + 0{,}04)^t = C \cdot 1{,}04^t \rightarrow \frac{2C}{C} = 1{,}04^t \rightarrow 2 = 1{,}04^t$$

Dando valores a t con la calculadora tenemos:

$t = 15 \rightarrow 1{,}04^{15} = 1{,}80$

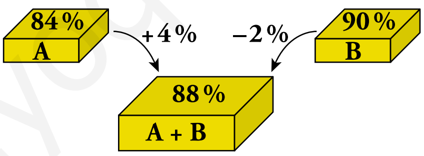
$t = 16 \rightarrow 1{,}04^{16} = 1{,}87$

$t = 17 \rightarrow 1{,}04^{17} = 1{,}95$

$t = 18 \rightarrow 1{,}04^{18} = 2{,}02$

Un capital colocado al 4 % anual tarda en doblarse, aproximadamente, 18 años.

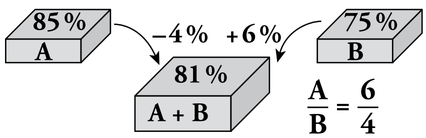
67. **Se funden dos lingotes, el primero con un 84 % de oro y el segundo con un 90 % de oro, formando un único bloque que tiene una riqueza del 88 %. Si el primero pesaba 1,5 kg, ¿cuál era el peso del segundo?**



El 4 % que "gana" A se compensa con el 2 % que "pierde" B. Por tanto, el peso de B debe ser doble que el de A.

B debe pesar el doble que A para que un +4% de A se compense con un –2% de B. Por tanto, B pesaba 3 kg.

68. **Se funden dos lingotes, el primero con un 85 % de plata y el segundo con un 75 %, formando un único bloque de 1,5 kg con una riqueza del 81 % de plata. ¿Cuál era el peso de los lingotes originales?**



Los pesos de A y B deben estar en la proporción $\frac{6}{4}$. Es decir, $A = \frac{6}{4}B = \frac{3}{2}B$.

$$A + B = 1{,}5 \rightarrow \frac{3}{2}B + B = 1{,}5 \rightarrow \frac{5}{2}B = 1{,}5 \rightarrow B = \frac{3}{5} = 0{,}6\text{ kg}$$

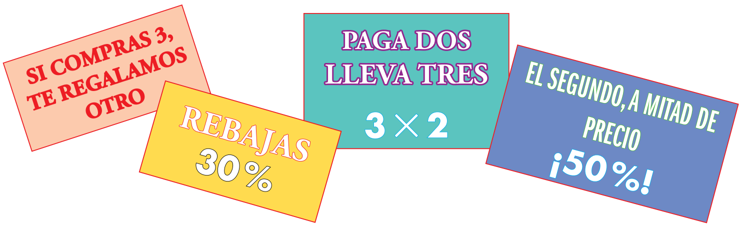
$A = 1{,}5 - 0{,}6 = 0{,}9$ kg

El primer bloque, A, pesaba 900 gramos y el segundo, B, 600 gramos.

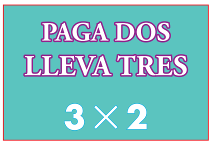
Curiosidades matemáticas

El precio baja

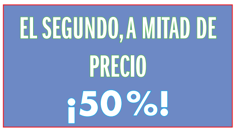
Cuatro supermercados de un barrio compiten con sus rebajas.



¿Cuál de las cuatro tiendas hace una rebaja mayor?



$\rightarrow$ Pagas $\frac{2}{3} = 0,\overset{\frown}{6} \rightarrow 66,\overset{\frown}{6}\ \%$



$\rightarrow$ Pagas $\frac{1,5}{2} = 0,75\ \%$

$\rightarrow$ Pagas 70 %

$\rightarrow$ Pagas $\frac{3}{4} = 0,75 \rightarrow 75\ \%$

La primera tienda es la que hace mayor rebaja.

1 Monomios, polinomios y otras expresiones algebraicas

Página 72

1. ¿Cuáles de los siguientes monomios son semejantes a $5x^2$?

$$7x^2, \quad 5x^3, \quad 5x, \quad 5xy, \quad x^2, \quad 3x^2y$$

$7x^2$ y x^2 son semejantes a $5x^2$.

2. Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$

b) $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$

c) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3$

d) $2x^2 - 3x - 10$

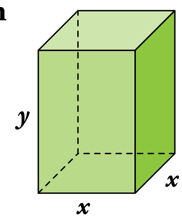
a) Grado 5.

b) Grado 6

c) Grado 4.

d) Grado 2.

3. La base de un ortoedro es un cuadrado de lado x. Su altura es y. Expresa mediante un polinomio:



a) El área de la base.

b) El área de una cara lateral.

c) El perímetro de la base.

d) El volumen.

a) $A_{BASE} = x \cdot x = x^2$

b) $A_{CARA\ LAT.} = x \cdot y$

c) $P_{BASE} = x + x + x + x = 4x$

d) $V_{ORT.} = x \cdot x \cdot y = x^2y$

4. Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de un número más su cubo.

b) La suma de dos números naturales consecutivos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles (llama x al lado desigual e y a los otros dos lados).

d) El área total de un cilindro de 4 m de altura en función del radio de la base, r.

e) El área total de un ortoedro cuya base es un cuadrado de lado l y cuya altura es 5 m.

a) $x + x^3$

b) $n + (n + 1) = 2n + 1$

c) $x + 2y$

d) $2\pi r \cdot 4 + 2\pi r^2 = \pi r(8 + 2r)$

e) $2l^2 + 4 \cdot 5l = 2l(l + 10)$

5. Calcula el valor numérico de la siguiente fracción para $x = 5$:

$$\frac{x}{x^2 + 2x}$$

$$\frac{5}{5^2 + 2 \cdot 5} = \frac{5}{25 + 10} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

2 Operaciones con monomios

Página 73

1. Efectúa las siguientes sumas de monomios. Cuando el resultado no pueda simplificarse, déjalo indicado:

a) $7x - 3x + 8x + 5x - 10x + 2x$

b) $8x^2 - 5x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x^2$

c) $x + 7x - x^2 + 3x + 5x^2 - 2x^2$

d) $4xy^2 - 9xy^2 + xy^2 + 3xy^2$

e) $9x^5 + y^2 + 6y^2 - 13x^5 - 5 + y^3$

a) $7x - 3x + 8x + 5x - 10x + 2x = 9x$

b) $8x^2 - 5x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x^2 = \frac{17}{3}x^2$

c) $x + 7x - x^2 + 3x + 5x^2 - 2x^2 = 11x + 2x^2$

d) $4xy^2 - 9xy^2 + xy^2 + 3xy^2 = -xy^2$

e) $9x^5 + y^2 + 6y^2 - 13x^5 - 5 + y^3 = -4x^5 + 7y^2 - 5 + y^3$

2. Opera.

a) $(3x^2) \cdot (5xy)$

b) $(\sqrt{3}x) \cdot (\sqrt{3}y)$

c) $(3xy)^2 : (2x^2)$

d) $(\sqrt{3}x)^2 \cdot (2x)$

a) $15x^3y$

b) $3xy$

c) $\frac{9}{2}y^2$

d) $6x^3$

3. Siendo $A = 5x^2$, $B = 4x$ y $C = -2x^2$, calcula:

a) $A + C$

b) $2A + 3C$

c) $A^2 - C$

d) $(A \cdot B) : C$

e) $(A : C) \cdot B$

f) $B^2 : C^2$

a) $5x^2 - 2x^2 = 3x^2$

b) $10x^2 - 6x^2 = 4x^2$

c) $25x^4 + 2x^2$

d) $(20x^3) : (-2x^2) = -10x$

e) $-\frac{5}{2} \cdot 4x = -10x$

f) $(16x^2) : (4x^4) = \frac{4}{x^2}$

4. Reduce a una sola fracción, como en el ejemplo:

- $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x} = \frac{3}{3x^2} + \frac{x}{3x^2} = \frac{3+x}{3x^2}$

a) $\frac{3}{2x} - \frac{2}{3x}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x}$

d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

a) $\frac{3}{2x} - \frac{2}{3x} = \frac{9}{6x} - \frac{4}{6x} = \frac{5}{6x}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x} = \frac{4}{2x^2} + \frac{x}{2x^2} = \frac{4+x}{2x^2}$

d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} + \frac{3}{x^3} = \frac{x^2+2x+3}{x^3}$

3 Operaciones con polinomios

Página 74

1. Quita paréntesis y reduce.

a) $(x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3x) + (4x^3 - 9x^2 + 7x - 1)$

b) $(5x^4 - 5x^2 - 3x) - (x^3 + 3x^2 + 6x - 11)$

c) $(7x^2 - 9x + 1) - (x^3 - 5x^2 - 4) + (x^3 - 4x^2)$

a) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3x + 4x^3 - 9x^2 + 7x - 1 = x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

b) $5x^4 - 5x^2 - 3x - x^3 - 3x^2 - 6x + 11 = 5x^4 - x^3 - 8x^2 - 9x + 11$

c) $7x^2 - 9x + 1 - x^3 + 5x^2 + 4 + x^3 - 4x^2 = 8x^2 - 9x + 5$

2. Efectúa.

a) $2 \cdot (3x^2 - 4x)$

b) $-5 \cdot (x^3 - 3x)$

c) $x \cdot (-2x + 3)$

d) $x^2 \cdot (x^2 - x + 1)$

a) $6x^2 - 8x$

b) $-5x^3 + 15x$

c) $-2x^2 + 3x$

d) $x^4 - x^3 + x^2$

3. Sean $P = x^5 - 3x^4 + 5x + 9$, $Q = 5x^2 + 3x - 11$.

Halla:

a) $P + Q$

b) $P - Q$

c) $2P - 3Q$

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & x^5 & - & 3x^4 & & & + & 5x & + & 9 \\ + & & & & & & 5x^2 & + & 3x & - & 11 \\ \hline P + Q & = & x^5 & - & 3x^4 & + & 5x^2 & + & 8x & - & 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & x^5 & - & 3x^4 & & & + & 5x & + & 9 \\ - & & & & & & 5x^2 & + & 3x & - & 11 \\ \hline P - Q & = & x^5 & - & 3x^4 & - & 5x^2 & + & 2x & + & 20 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2P & \to & 2x^5 & - & 6x^4 & & & + & 10x & + & 18 \\ 3Q & \to & - & & & & 15x^2 & + & 9x & - & 33 \\ \hline 2P - 3Q & = & 2x^5 & - & 6x^4 & - & 15x^2 & + & x & + & 51 \end{array}$$

4. Halla los productos siguientes:

a) $3x \cdot (2x + y + 1)$

b) $3a \cdot (a^2 + 2a^4)$

c) $ab^2 \cdot (a - b)$

d) $-5x^3 \cdot (3x^2 + 7x + 11)$

e) $x^2y \cdot (2x - y + 2)$

f) $7x^2y \cdot (3x + y)$

g) $5x^3y^3 \cdot (x^2 + x - 1)$

h) $3a^2b^3 \cdot (3a - b + 1)$

a) $6x^2 + 3xy + 3x$

b) $3a^3 + 6a^5$

c) $a^2b^2 - ab^3$

d) $-15x^5 - 35x^4 - 55x^3$

e) $2x^3y - x^2y^2 + 2x^2y$

f) $21x^3y + 7x^2y^2$

g) $5x^5y^3 + 5x^4y^3 - 5x^3y^3$

h) $9a^3b^3 - 3a^2b^4 + 3a^2b^3$

5. Calcula el polinomio P en cada caso.

a) $2 \cdot P = 6x^3 - 4x^2 - 8x + 2$

b) $x \cdot P = x^3 - 3x^2 - 5x$

c) $4x^2 \cdot P = -12x^5 + 4x^3 - 8x^2$

d) $2xy^2 \cdot P = 2x^2y^2 + 4xy^3 + 6x^2y^3$

a) $P = 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

b) $P = x^2 - 3x - 5$

c) $P = -3x^3 + x - 2$

d) $P = \dfrac{2x^2y^2}{2xy^2} + \dfrac{4xy^3}{2xy^2} + \dfrac{6x^2y^3}{2xy^2} = x + 2y + 3xy$

Página 75

6. **Dados los polinomios $P = 5x^2 - 3$, $Q = x^2 - 4x + 1$, $R = -5x + 2$, calcula:**

a) $P \cdot R$

b) $Q \cdot R$

c) $P \cdot Q$

a) $(5x^2 - 3) \cdot (-5x + 2) = -25x^3 + 10x^2 + 15x - 6$

b)
$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & -\ 4x & +\ 1 \\
\times & & -\ 5x & +\ 2 \\
\hline
 & 2x^2 & -\ 8x & +\ 2 \\
-5x^3 & +\ 20x^2 & -\ 5x & \\
\hline
-5x^3 & +\ 22x^2 & -\ 13x & +\ 2
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & -\ 4x & +\ 1 \\
\times & & & 5x^2 & -\ 3 \\
\hline
 & & -\ 3x^2 & +\ 12x & -\ 3 \\
5x^4 - 20x^3 & +\ 5x^2 & & & \\
\hline
5x^4 - 20x^3 & +\ 2x^2 & & +\ 12x & -\ 3
\end{array}$$

7. **Opera y simplifica:**

a) $3x^2(2x^3 - 1) + 6(4x^2 - 3)$

b) $(x - 3)(x^2 + 1) - x^2(2x^3 + 5x^2)$

c) $(x - 3)(2x + 5) - 4(x^3 + 7x)$

a) $6x^5 - 3x^2 + 24x^2 - 18 = 6x^5 + 21x^2 - 18$

b) $x^3 + x - 3x^2 - 3 - 2x^5 - 5x^4 = -2x^5 - 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3$

c) $2x^2 + 5x - 6x - 15 - 4x^3 - 28x = -4x^3 + 2x^2 - 29x - 15$

8. **Efectúa $P(x) : Q(x)$ en cada caso y expresa el resultado así:**

$$P(x) = Q(x) \cdot \text{COCIENTE} + \text{RESTO}$$

a) $P(x) = 3x^2 - 11x + 5$ — $Q(x) = x + 6$

b) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$ — $Q(x) = 3x + 1$

c) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$ — $Q(x) = x$

d) $P(x) = 5x^2 + 11x - 4$ — $Q(x) = 5x - 2$

a)
$$\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & -\ 11x & +\ 5 & x + 6 \\
\cline{4-4}
-\ 3x^2 & -\ 18x & & 3x - 29 \\
\cline{1-2}
 & -\ 29x & +\ 5 & \\
 & +\ 29x & +\ 174 & \\
\cline{2-3}
 & & 179 &
\end{array}$$

$3x^2 - 11x + 5 = (x + 6)(3x - 29) + 179$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +\ 2x^2 & +\ 18x & +\ 3 & 3x + 1 \\
\cline{5-5}
-\ 6x^3 & -\ 2x^2 & & & 2x^2 + 6 \\
\cline{1-2}
 & 0 & +\ 18x & +\ 3 & \\
 & & -\ 18x & -\ 6 & \\
\cline{2-4}
 & & & -\ 3 &
\end{array}$$

$6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 = (3x + 1)(2x^2 + 6) - 3$

c)
$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & +\ 2x^2 & +\ 18x & +\ 3 & x \\ \cline{5-5} -6x^3 & & & & 6x^2+2x+18 \\ \cline{1-2} 0 & +\ 2x^2 & & & \\ & -\ 2x^2 & & & \\ \cline{2-3} & 0 & +\ 18x & & \\ & & -\ 18x & & \\ \cline{3-4} & & 0 & +\ 3 & \end{array}$$

$$6x^3+2x^2+18x+3=x(6x^2+2x+18)+3$$

d)
$$\begin{array}{rrr|l} 5x^2 & +\ 11x & -\ 4 & 5x-2 \\ \cline{4-4} -\ 5x^2 & +\ 2x & & x+\frac{13}{5} \\ \cline{1-2} & 13x & -\ 4 & \\ & -\ 13x & +\ \frac{26}{5} & \\ \cline{2-3} & & \frac{6}{5} & \end{array}$$

$$5x^2+11x-4=(5x-2)\left(x+\frac{13}{5}\right)+\frac{6}{5}$$

4 División de un polinomio por $(x - a)$

Página 76

1. Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(x^3 - 7x^2 + 9x - 3) : (x - 5)$

b) $(2x^3 + 7x^2 + 2x + 4) : (x + 3)$

c) $(x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6) : (x + 2)$

d) $(4x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 1) : (x - 1)$

e) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 9 & -3 \\ 5 & & 5 & -10 & -5 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{-8} \end{array}$$

$C(x) = x^2 - 2x - 1$

$R = -8$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 2 & 4 \\ -3 & & -6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & \boxed{7} \end{array}$$

$C(x) = 2x^2 + x - 1$

$R = 7$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -5 & 3 & -6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$C(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$

$R = 0$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -3 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & & 4 & 1 & 0 & 5 \\ \hline & 4 & 1 & 0 & 5 & \boxed{4} \end{array}$$

$C(x) = 4x^3 + x^2 + 5$

$R = 4$

e)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

$R = 0$

Página 77

2. Sea el polinomio $M(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 7x + 8$.

a) Calcula $M(4) = 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 8$.

b) Divide, con la regla de Ruffini, $M(x) : (x - 4)$.

c) Comprueba que el resultado del apartado a) coincide con el resto de la división que has realizado en b).

a) $M(4) = 256 - 512 + 240 + 28 + 8 = 20$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -8 & 15 & 7 & 8 \\ 4 & & 4 & -16 & -4 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & 3 & \boxed{20} \end{array}$$

c) El resto de dividir por $(x - 4)$ coincide con el valor del polinomio en $x = 4$.

3. El valor de un polinomio, $A(x)$, para $x = 7$ es 54. ¿Qué puedes decir de la división $A(x) : (x - 7)$?

El resto de la división será 54.

4. Del polinomio $H(x)$ sabemos:

$$H(5) = 18 \qquad H(-5) = 13$$

a) ¿Cuál es el resto de la división $H(x) : (x - 5)$?

b) ¿Y el de la división $H(x) : (x + 5)$?

a) Sabemos entonces que $R = 18$

b) $R = 13$

5. Considera los polinomios siguientes:

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 9x + 3$

$Q(x) = x^4 - 12x^2 - 11x + 9$

Calcula, utilizando la regla de Ruffini:

a) $P(3)$ b) $P(-1)$ c) $Q(3)$ d) $Q(-1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & -9 & 3 \\ 3 & & 9 & 12 & 9 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & \boxed{12} \end{array}$$

$P(3) = 12$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & -9 & 3 \\ -1 & & -3 & 8 & 1 \\ \hline & 3 & -8 & -1 & \boxed{4} \end{array}$$

$P(-1) = 4$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -12 & -11 & 9 \\ 3 & & 3 & 9 & -9 & -60 \\ \hline & 1 & 3 & -3 & -20 & \boxed{-51} \end{array}$$

$Q(3) = -51$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -12 & -11 & 9 \\ -1 & & -1 & 1 & 11 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & -11 & 0 & \boxed{9} \end{array}$$

$Q(-1) = 9$

6. **Calcula, con ayuda de la regla de Ruffini, el valor del polinomio $2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$ para:**

a) $x = -2$

b) $x = -3$

c) $x = 5$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ -2 & & -4 & 22 & -10 \\ \hline & 2 & -11 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(-2) = 0$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ -3 & & -6 & 39 & -66 \\ \hline & 2 & -13 & 22 & \boxed{-56} \end{array}$$

$P(-3) = -56$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ 5 & & 10 & 15 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(5) = 0$

7. **De un polinomio $P(x)$, sabemos que se anula para el valor $x = 8$, es decir, $P(8) = 0$. ¿Qué puedes decir de la división $P(x) : (x - 8)$?**

El resto de la división $P(x) : (x - 8)$ será 0 y, por tanto, la división es exacta.

5 Raíces de un polinomio

Página 79

1. Averigua si alguno de los valores 1, –3, 5, –7 es raíz del polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 4$.

- $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 2 & 5 & -4 \\ 1 & & 1 & -3 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 1$ sí es raíz del polinomio

- $x = -3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 2 & 5 & -4 \\ -3 & & -3 & 21 & -69 & 192 \\ \hline & 1 & -7 & 23 & -64 & \boxed{188} \end{array}$$

$x = -3$ no es raíz del polinomio

- $x = 5$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 2 & 5 & -4 \\ 5 & & 5 & 5 & 35 & 200 \\ \hline & 1 & 1 & 7 & 40 & \boxed{196} \end{array}$$

$x = 5$ no es raíz del polinomio

- $x = -7$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 2 & 5 & -4 \\ -7 & & -7 & 77 & -553 & 3\,836 \\ \hline & 1 & -11 & 79 & -548 & \boxed{3\,832} \end{array}$$

$x = -7$ no es raíz del polinomio

2. ¿Cuáles son las raíces de $P(x) = (x - 2)(x + 5)(x - 6)$?

$x = 2$; $x = -5$ y $x = 6$

3. Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 2, –2 y 3.

$P(x) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

4. Calcula mentalmente alguna raíz de cada uno de estos polinomios:

a) $x^2 - x$ **b)** $x^3 - 1$ **c)** $x^4 + x$

a) $x = 0$
$x = 1$

b) $x = 1$

c) $x = 0$
$x = -1$

5. Busca una raíz entera de cada uno de estos polinomios. Si no la hay, justifica por qué.

$A(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ $B(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

$C(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 7x + 3$ $D(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Las raíces enteras deben ser un divisor del término independiente. En este caso los únicos divisores de 7 son ±1 y ±7 y vemos cuáles son raíz:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & & 4 & 6 & 11 \\ \hline & 4 & 6 & 11 & \boxed{18} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & & -4 & 2 & -7 \\ \hline & 4 & -2 & 7 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = -1$ es raíz de $A(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 2 & 5 & 7 \\ 7 & & 28 & 210 & 1\,505 \\ \hline & 4 & 30 & 215 & \boxed{1\,512} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 2 & 5 & 7 \\ -7 & & -28 & 182 & -1\,309 \\ \hline & 4 & -26 & 187 & \boxed{-1\,302} \end{array}$$

En conclusión, solo tiene una raíz entera, $x = -1$.

$B(x)$ no tiene ninguna raíz entera por la comprobación anterior, ya que deberían ser divisores de 1, luego las únicas posibilidades son 1 y –1, y vemos que ninguna es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & & 1 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & \boxed{7} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{-1} \end{array}$$

$x = 3$ es una raíz de $C(x)$ ya que:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -1 & -7 & 3 \\ 3 & & 3 & 3 & 6 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Ya solo podría tener como raíz ±1, pero ninguno hace que el polinomio resultante valga 0. Solo tiene una raíz entera, $x = 3$.

$x = -1$ es una raíz de $D(x)$ ya que:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Viendo que $x = 1$ no es raíz, concluimos que solo tiene una solución entera, $x = -1$.

6. El polinomio $x^3 + 2x^2 - 8x$ tiene tres raíces enteras.

Calcúlalas por tanteo.

Las raíces de $x^3 + 2x^2 - 8x$ son $x = 0$, $x = 2$ y $x = -4$.

6 Factorización de polinomios

Página 81

1. Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

a) $x^3 + 6x^2 + 9x$ **b)** $2x^3 - 4x^2 + 2x$

c) $3x^4 - 12x^2$ **d)** $8x^5 - 24x^4 + 18x^3$

a) $x(x^2 + 6x + 9) = x \cdot (x + 3)^2$

b) $2x(x^2 - 2x + 1) = 2x(x - 1)^2$

c) $3x^2(x^2 - 4) = 3x^2(x + 2)(x - 2)$

d) $2x^3(4x^2 - 12x + 9) = 2x^3(2x - 3)^2$

2. Factoriza con ayuda de la regla de Ruffini.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ **b)** $2x^3 + 6x^2 - x - 30$

c) $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ **d)** $3x^5 + x^2 - 24x + 36$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 2)$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

b) Después de probar con todos los divisores de 30, deducimos que este polinomio no tiene raíces enteras.

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 14 & 8 \\ -1 & & -1 & -6 & -8 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x + 1) \cdot (x + 4) \cdot (x + 2)$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases}$$

d) Después de probar con todos los divisores de 36, deducimos que este polinomio no tiene raíces enteras.

3. Descompón en el máximo número de factores que sea posible.

a) $2x^4 - 12x^3 + 10x^2$ **b)** $5x^3 + 10x^4 + 25x^2$

c) $x^3 - x^2 - x - 2$ **d)** $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

e) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **f)** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

a) $2x^2(x^2 - 6x + 5) = 2x^2(x - 5)(x - 1)$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

b) $5x^2(x + 2x^2 + 5) \rightarrow$ No se puede seguir factorizando.

$$2x^2 + x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 40}}{4} \quad \text{No tiene solución.}$$

c) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + x + 1 = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ No tiene solución.

d) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9 = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - 9) = (x - 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -8 & 18 & -9 \\ 1 & & 1 & -1 & -9 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & -9 & 9 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 0 & -9 & \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} & \end{array}$$

e) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) = (x + 1) \cdot (x + 1)^2 = (x + 1)^3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

f) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 4) = (x - 2) \cdot (x - 2)^2 = (x - 2)^3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -8 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

4. Simplifica.

a) $\dfrac{5x^3 + 20x^2}{3x^3 - 24x^2 + 48x}$ **b)** $\dfrac{x^2 + 7}{x^3 - 3x^2 + 7x - 21}$

a) $\dfrac{5x^3 + 20x^2}{3x^3 - 24x^2 + 48x} = \dfrac{5x^2(x+4)}{3x(x^2 - 8x + 16)} = \dfrac{5x^2(x+4)}{3x(x-4)^2} = \dfrac{5x(x+4)}{3(x-4)^2}$

b) $\dfrac{x^2 + 7}{x^3 - 3x^2 + 7x - 21} = \dfrac{x^2 + 7}{(x-3)(x^2+7)} = \dfrac{1}{x-3}$

El polinomio de arriba no se puede factorizar. El polinomio del denominador quedará:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 7 & -21 \\ 3 & & 3 & 0 & 21 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & \boxed{0} \end{array}$$

7 Preparación para ecuaciones

Página 82

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3(x-1)+5(x-2)-7x$

b) $2(2x-3)+1-(x-5)$

c) $5x+3(1-x)-12-2(x-5)$

d) $10(x-1)+2(x+9)-4(2+3x)$

e) $3x-1-(2x+1)-1+(x+2)+3$

a) $3x-3+5x-10-7x=x-13$

b) $4x-6+1-x+5=3x$

c) $5x+3-3x-12-2x+10=1$

d) $10x-10+2x+18-8-12x=0$

e) $3x-1-2x-1-1+x+2+3=2x+2$

2. Multiplica por el número indicado y simplifica.

a) $\frac{3(x+2)}{2}+\frac{x-1}{5}-\frac{2(x+1)}{5}-\frac{37}{10}$ **por 10**

b) $\frac{2x-3}{2}-\frac{x+3}{4}+4+\frac{x-1}{2}$ **por 4**

c) $x+\frac{2x-3}{9}+\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$ **por 9**

d) $\frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}-2(x+y)+3$ **por 6**

e) $\frac{2(x+1)}{3}-\frac{y}{2}-1$ **por 6**

a) $10\cdot\frac{3(x+2)}{2}+10\cdot\frac{x-1}{5}-10\cdot\frac{2(x+1)}{5}-10\cdot\frac{37}{10}=$

$=15(x+2)+2(x-1)-4(x+1)-37=15x+30+2x-2-4x-4-37=13x-13$

b) $4\cdot\frac{2x-3}{2}-4\cdot\frac{x+3}{4}+4\cdot4+4\cdot\frac{x-1}{2}=2(2x-3)-(x+3)+16+2(x-1)=$

$=4x-6-x-3+16+2x-2=5x+5$

c) $9\cdot x+9\cdot\frac{2x-3}{9}+9\cdot\frac{x-1}{3}-9\cdot\frac{12x+4}{9}=9x+2x-3+3(x-1)-(12x+4)=$

$=9x+2x-3+3x-3-12x-4=2x-10$

d) $6\cdot\frac{2x}{3}-6\cdot\frac{3y}{2}-6\cdot2(x+y)+6\cdot3=2\cdot2x-3\cdot3y-12(x+y)+18=$

$=4x-9y-12x-12y+18=-8x-21y+18$

e) $6\cdot\frac{2(x+1)}{3}-6\cdot\frac{y}{2}-6\cdot1=2\cdot2(x+1)-3y-6=4x+4-3y-6=4x-3y-2$

3. Expresa algebraicamente y simplifica.

a) La suma de un número más su tercera parte.

b) La suma de las edades de Ana y Raquel, sabiendo que Ana tiene 8 años más que Raquel.

c) Invertí una cantidad, *x*, y ha aumentado un 12%. ¿Qué cantidad tengo ahora?

d) Invertí una cantidad, *x*, y he perdido el 5%. ¿Qué cantidad tengo ahora?

e) La suma de tres números consecutivos.

f) El triple de un número menos su cuarta parte.

g) La suma de las edades de Alberto y su padre, sabiendo que este tiene 28 años más que aquel.

h) Un ciclista va a una velocidad *v*. Otro ciclista viene 10 km/h más rápido. ¿A qué velocidad se acerca el uno al otro?

a) $x + \frac{x}{3} = \frac{4}{3}x$

b) $x + (x + 8) = 2x + 8$

c) $1{,}12x$

d) $0{,}95x$

e) $x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$

f) $3x - \frac{x}{4} = \frac{11}{4}x$

g) $x + (x + 28) = 2x + 28$

h) $v + (v + 10) = 2v + 10$

Página 83

4. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(x-1)(x+1)+(x-2)^2-3$

b) $(x+2)(x-3)+x-3$

c) $(x+1)^2-2x(x+2)+14$

d) $(x+1)^2-(x-1)^2+2-x^2-6$

a) $x^2-1+x^2+4-4x-3=2x^2-4x$

b) $x^2+2x-3x-6+x-3=x^2-9$

c) $x^2+1+2x-2x^2-4x+14=-x^2-2x+15$

d) $x^2+1+2x-x^2-1+2x+2-x^2-6=-x^2+4x-4$

5. Multiplica por el número indicado y simplifica:

a) $x(2x+1)-\frac{(x-1)^2}{2}-3$ **por 2** **b)** $\frac{x(x+3)}{2}-\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{1}{3}$ **por 6**

a) $2\cdot x(2x+1)-2\cdot\frac{(x-1)^2}{2}-2\cdot 3=4x^2+2x-x^2-1+2x-6=3x^2+4x-7$

b) $6\cdot\frac{x(x+3)}{2}-6\cdot\frac{(x+1)^2}{3}+6\cdot\frac{1}{3}=3x^2+9x-2(x^2+1+2x)+2=x^2+5x$

6. Expresa algebraicamente y simplifica.

a) **El producto de dos números naturales consecutivos.**

b) **El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden x y $x+5$.**

c) **El área de un rectángulo cuyas dimensiones (largo y ancho) suman 11 dm.**

d) **El área de un rectángulo de 200 m de perímetro.**

a) $n(n+1)=n^2+n$

b) $x^2+(x+5)^2=2x^2+10x+25$

c) $x(11-x)=11x-x^2$

d) $x(100-x)=100x-x^2$

7. La diferencia de dos números es 20. Si al menor lo llamamos x:

a) **¿Cómo se designa al mayor?**

b) **¿Cómo se designa su producto?**

c) **¿Cómo se designa la suma de sus cuadrados?**

a) $20+x$

b) $x(20+x)=20x+x^2$

c) $x^2+(20+x)^2=x^2+20^2+x^2+40x=2x^2+40x+400$

Ejercicios y problemas

Página 84

Practica

Monomios

1. **Considera los siguientes monomios:**

a) $2x^2$ **b)** $-3x^3$

c) $\frac{1}{2}x^2$ **d)** $\frac{3}{4}x$

e) $-\frac{1}{3}x$ **f)** x^3

- **Indica el grado y el coeficiente en cada caso.**
- **Calcula el valor numérico de cada uno para $x = -1$ y para $x = 1/2$.**

a) $2x^2$

Grado = 2; coeficiente = 2

$x = -1 \to 2 \cdot (-1)^2 = 2 \cdot 1 = 2$

$x = \frac{1}{2} \to 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) $-3x^3$

Grado = 3; coeficiente = -3

$x = -1 \to -3 \cdot (-1)^3 = -3 \cdot (-1) = 3$

$x = \frac{1}{2} \to -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -3 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$

c) $\frac{1}{2}x^2$

Grado = 2; coeficiente = $\frac{1}{2}$

$x = -1 \to \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{3}{4}x$

Grado = 1; coeficiente = $\frac{3}{4}$

$x = -1 \to \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{3}{4}$

$x = \frac{1}{2} \to \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

e) $-\frac{1}{3}x$

Grado = 1; coeficiente = $-\frac{1}{3}$

$x = -1 \to -\frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{2} \to -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

f) x^3

Grado = 3; coeficiente = 1

$x = -1 \to (-1)^3 = -1$

$x = \frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

2. Opera y simplifica todo lo posible.

a) $-2x^3 + x^3 - 3x^3$

b) $-3x^2 - \frac{2}{5}x^2 + 5x^2$

c) $\frac{1}{2}xy - \frac{3}{4}xy + xy$

d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2$

e) $2x \cdot (-3x^2) \cdot (-x)$

f) $\frac{3}{4}x^3 \cdot (-2x^2) \cdot 2x$

g) $-\frac{15x^6}{3x^2} \cdot x$

h) $-\frac{7x^3}{2x^2} \cdot x$

a) $-2x^3 + x^3 - 3x^3 = (-2 + 1 - 3)x^3 = -4x^3$

b) $-3x^2 - \frac{2}{5}x^2 + 5x^2 = \frac{-15}{5}x^2 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{25}{5}x^2 = \frac{8}{5}x^2$

c) $\frac{1}{2}xy - \frac{3}{4}xy + xy = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1\right)xy = \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right)xy = \frac{3}{4}xy$

d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2 = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} + 1\right)x^2 = \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{10} + \frac{10}{10}\right)x^2 = \frac{13}{10}x^2$

e) $6x^4$

f) $\frac{3}{4} \cdot (-4)x^6 = -3x^6$

g) $-5x^5$

h) $-\frac{7}{2}x^2$

3. Expresa mediante un monomio estos enunciados:

a) **La mitad de un número más su tercera parte.**

b) **El área de un círculo de radio r.**

c) **El producto de un número por el triple de otro.**

d) **El volumen de un ortoedro de dimensiones x, $2x$ y 5 cm.**

e) **El volumen de una pirámide de altura h cuya base es un cuadrado de lado l.**

a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{5}{6}x$

b) πr^2

c) $x \cdot 3y = 3xy$

d) $x \cdot 2x \cdot 5 = 10x^2$

e) $\frac{l^2 h}{3}$

Polinomios

4. Reduce e indica el grado de cada polinomio:

a) $2x^4 - 3x^2 + 4x$

b) $x^2 - 3x^3 + 2x$

c) $3x^3 - 2x^2 - 3x^3$

d) $2x + 3$

a) Grado 4

b) Grado 3

c) $-2x^2 \rightarrow$ Grado 2

d) Grado 1

5. **Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1$ y $Q(x) = 6x^3 + 2x^2 - 7$, calcula $P + Q$ y $P - Q$.**

$P + Q = (2x^4 - 5x^3 + 3x - 1) + (6x^3 + 2x^2 - 7) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 8$

$P - Q = (2x^4 - 5x^3 + 3x - 1) - (6x^3 + 2x^2 - 7) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1 - 6x^3 - 2x^2 + 7 =$

$= 2x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 3x + 6$

6. **Efectúa.**

a) $3x(2x^2 - 5x + 1)$ **b)** $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2)$

c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x)$ **d)** $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3)$

a) $3x(2x^2 - 5x + 1) = 6x^3 - 15x^2 + 3x$

b) $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2) = 14x^6 + 21x^5 - 14x^3$

c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x) = -5x^5 + 15x^3 - 25x^2$

d) $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3) = -x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 3x^2$

7. **Opera y simplifica.**

a) $(5x - 2)(3 - 2x)$ **b)** $x(x - 3)(2x - 1)$

c) $(x^2 - 5x)(x^3 + 2x)$ **d)** $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5)$

a) $(5x - 2)(3 - 2x) = 15x - 10x^2 - 6 + 4x = -10x^2 + 19x - 6$

b) $x(x - 3)(2x - 1) = (x^2 - 3x)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x = 2x^3 - 7x^2 + 3x$

c) $(x^2 - 5x)(x^3 + 2x) = x^5 + 2x^3 - 5x^4 - 10x^2 = x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 10x^2$

d) $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5) = 6x^5 - 9x^4 + 15x^3 + 2x^2 - 3x + 5$

8. **Calcula el cociente y el resto en estas divisiones:**

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (3x + 1)$

b) $(4x^3 - x) : (2x + 3)$

c) $(5x^3 - 3x^2 + 8x) : (5x + 2)$

a)
$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & -\ 7x & +\ 5 & 3x + 1 \\ \cline{4-4} -3x^2 & -\ x & & x - \frac{8}{3} \\ \cline{1-2} & -\ 8x & +\ 5 & \\ & 8x & +\ \frac{8}{3} & \\ \cline{2-3} & & \frac{23}{3} & \end{array}$$

Cociente $= x - \dfrac{8}{3}$

Resto $= \dfrac{23}{3}$

b)
$$\begin{array}{rrr|l} 4x^3 & & -\ x & 2x + 3 \\ \cline{4-4} -4x^3 & -\ 6x^2 & & 2x^2 - 3x + 4 \\ \cline{1-2} & -\ 6x^2 & -\ x & \\ & 6x^2 & +\ 9x & \\ \cline{2-3} & & 8x & \\ & & -\ 8x\ -\ 12 & \\ \cline{3-3} & & -\ 12 & \end{array}$$

Cociente $= 2x^2 - 3x + 4$

Resto $= -12$

c)
$$\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & -\,3x^2 & +\,8x & & 5x+2 \\ \cline{5-5}
-5x^3 & -\,2x^2 & & & x^2-x+2 \\ \cline{1-2}
 & -\,5x^2 & +\,8x & & \\
 & 5x^2 & +\,2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 10x & & \\
 & & -\,10x & -\,4 & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,4 &
\end{array}$$

Cociente $= x^2 - x + 2$

Resto $= -4$

9. **Las siguientes divisiones son exactas. Efectúalas y expresa el dividendo como producto de dos factores:**

a) $(x^5 + 2x^4 + x + 2) : (x + 2)$

b) $(3x^3 + 7x^2 + 7x + 4) : (3x + 4)$

c) $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1)$

d) $(2x^3 - 3x^2 + 10x - 15) : (2x - 3)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^5 & +\,2x^4 & +\,x & +\,2 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^5 & -\,2x^4 & & & x^4+1 \\ \cline{1-4}
 & & x & +\,2 & \\
 & & -\,x & -\,2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$x^5 + 2x^4 + x + 2 = (x + 2)(x^4 + 1)$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +\,7x^2 & +\,7x & +\,4 & 3x+4 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & -\,4x^2 & & & x^2+x+1 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & +\,7x & & \\
 & -\,3x^2 & -\,4x & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x & +\,4 & \\
 & & -\,3x & -\,4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 = (3x + 4)(x^2 + x + 1)$

c)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\,x^2 & +\,9x & -\,9 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\,x^2 & & & x^2+9 \\ \cline{1-4}
 & & 9x & -\,9 & \\
 & & -\,9x & +\,9 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$

d)
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\,3x^2 & +\,10x & -\,15 & 2x-3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +\,3x^2 & & & x^2+5 \\ \cline{1-4}
 & & 10x & -\,15 & \\
 & & -\,10x & +\,15 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$2x^3 - 3x^2 + 10x - 15 = (2x - 3)(x^2 + 5)$

10. **Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:**

a) **La suma de los cuadrados de dos números consecutivos.**

b) **El área total de un ortoedro de dimensiones x, $2x$ y 5 cm.**

c) **La cantidad de leche envasada en "x" botellas de 1,5 *l* y en "y" botellas de 1 *l*.**

d) **El área de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide 3 cm más que el otro.**

a) $x^2 + (x + 1)^2 = x^2 + x^2 + 1 + 2x = 2x^2 + 2x + 1$

b) $2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 5 + 2 \cdot 2x \cdot 5 = 4x^2 + 30x$

c) $1{,}5x + y$

d) $\dfrac{x\,(x + 3)}{2} = \dfrac{x^2 + 3x}{2}$

Factor común e identidades notables

11. **Saca factor común en cada polinomio:**

a) $9x^2 + 6x - 3$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c) $10x^3 - 5x^2$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

e) $410x^5 - 620x^3 + 130x$

f) $72x^4 - 64x^3$

g) $5x - 100x^3$

h) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2$

a) $9x^2 + 6x - 3 = 3(3x^2 + 2x - 1)$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x = 2x(x^2 - 3x + 2)$

c) $10x^3 - 5x^2 = 5x^2(2x - 1)$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x^3 - x^2 + x - 1)$

e) $410x^5 - 620x^3 + 130x = 10x(41x^4 - 62x^2 + 13)$

f) $72x^4 - 64x^3 = 8x^3(9x - 8)$

g) $5x - 100x^3 = 5x(1 - 20x^2)$

h) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2 = 15x^2(2x^4 - 5x^2 - 3)$

12. **Completa estas expresiones en tu cuaderno:**

a) $(x - 3)^2 = x^2 - \square x + 9$

b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + \square x + 1$

c) $(x + \square)^2 = x^2 + \square x + 16$

d) $(3x - \square)^2 = \square x^2 - \square x + 4$

a) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

c) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

d) $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

13. **Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio (hazlo en tu cuaderno):**

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b) $49 + 14x + x^2 = (\square + \square)^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

d) $1 + 4x + 4x^2 = (\square + \square)^2$

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

b) $49 + 14x + x^2 = (7 + x)^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$

d) $1 + 4x + 4x^2 = (1 + 2x)^2$

Página 85

14. **Expresa en cada caso como producto de dos binomios (hazlo en tu cuaderno):**

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$ **b)** $x^2 - 1$

c) $9 - x^2$ **d)** $4x^2 - 1$

e) $25 - 9x^2$

a) $(x + 4)(x - 4)$ b) $(x + 1)(x - 1)$

c) $(3 + x)(3 - x)$ d) $(2x - 1)(1 + 2x)$

e) $(5 + 3x)(5 - 3x)$

Expresiones de primer grado

15. **Opera y simplifica.**

a) $6(x + 3) - 2(x - 5)$ **b)** $3(2x + 1) + 7(x - 3) - 4x$

c) $5(3 - 2x) - (x + 7) - 8$ **d)** $4(1 - x) + 6x - 10 - 3(x - 5)$

e) $2x - 3 + 3(x - 1) - 2(3 - x) + 5$ **f)** $2(x + 3) - (x + 1) - 1 + 3(5x - 4)$

a) $6x + 18 - 2x + 10 = 4x + 28$ b) $6x + 3 + 7x - 21 - 4x = 9x - 18$

c) $15 - 10x - x - 7 - 8 = -11x$ d) $4 - 4x + 6x - 10 - 3x + 15 = -x + 9$

e) $2x - 3 + 3x - 3 - 6 + 2x + 5 = 7x - 7$ f) $2x + 6 - x - 1 - 1 + 15x - 12 = 16x - 8$

16. **Multiplica por el número indicado en cada caso y simplifica:**

a) $\frac{1-2x}{9} - 1 + \frac{x+4}{6}$ **por 18**

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} - \frac{x+1}{4}$ **por 40**

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} - \frac{1-9x}{6}$ **por 6**

a) $18\left(\frac{1-2x}{9} - 1 + \frac{x+4}{6}\right) = 2(1 - 2x) - 18 + 3(x + 4) = 2 - 4x - 18 + 3x + 12 = -x - 4$

b) $40\left(\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} - \frac{x+1}{4}\right) = 8(3x + 2) - 4(4x - 1) + 5(5x - 2) - 10(x + 1) =$

$= 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 - 10x - 10 = 23x$

c) $6\left(\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} - \frac{1-9x}{6}\right) = 3(x - 3) - 2(5x + 1) - (1 - 9x) =$

$= 3x - 9 - 10x - 2 - 1 + 9x = 2x - 12$

17. **Multiplica en cada caso por el mínimo común múltiplo de los denominadores y simplifica la expresión resultante:**

a) $\frac{x+1}{2}+\frac{x-3}{5}-2x+6-\frac{x-8}{5}$

b) $\frac{1+12x}{4}-\frac{x-4}{12}-\frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

c) $\frac{3x-2}{6}-\frac{4x+1}{10}+\frac{2}{15}+\frac{2(x-3)}{4}$

a) $10\left(\frac{x+1}{2}+\frac{x-3}{5}-2x+6-\frac{x-8}{5}\right)=5(x+1)+2(x-3)-20x+60-2(x-8)=$

$=5x+5+2x-6-20x+60-2x+16=-15x+75$

b) $\frac{6(1+12x)}{24}-\frac{2(x-4)}{24}-\frac{3[3(x+1)-(1-x)]}{24}=$

$=\frac{6+72x}{24}-\frac{2x-8}{24}-\frac{9x+9-3+3x}{24}=\frac{6+72x-2x+8-9x-9+3-3x}{24}=$

$=\frac{8+58x}{24}=\frac{4+29x}{12}$

c) $60\left(\frac{3x-2}{6}-\frac{4x+1}{10}+\frac{2}{15}+\frac{2(x-3)}{4}\right)=10(3x-2)-6(4x+1)+4\cdot 2+15\cdot 2(x-3)=$

$=30x-20-24x-6+8+30x-90=36x-108$

Expresiones de segundo grado

18. **Opera y simplifica.**

a) $(x-3)(x+3)+(x-4)(x+4)-25$

b) $(x+1)(x-3)+(x-2)(x-3)-(x^2-3x-1)$

c) $2x(x+3)-2(3x+5)+x$

d) $(x+1)^2-3x-3$

e) $(2x+1)^2-1-(x-1)(x+1)$

f) $x(x-3)+(x+4)(x-4)-(2-3x)$

a) $x^2-9+x^2-16-25=2x^2-50$

b) $x^2-3x+x-3+x^2-3x-2x+6-x^2+3x+1=x^2-4x+4$

c) $2x^2+6x-6x-10+x=2x^2+x-10$

d) $x^2+2x+1-3x-3=x^2-x-2$

e) $4x^2+4x+1-1-(x^2-1)=4x^2+4x-x^2+1=3x^2+4x+1$

f) $x^2-3x+x^2-16-2+3x=2x^2-18$

19. **Multiplica por el número indicado y simplifica.**

a) $(3x+1)(3x-1)+\dfrac{(x-2)^2}{2}-1+2x$ **por 2**

b) $\dfrac{x^2+2}{3}-\dfrac{x^2+1}{4}-\dfrac{x+15}{12}$ **por 12**

c) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3}-\dfrac{3x-2}{6}-\dfrac{x^2}{3}$ **por 6**

a) $2\left((3x+1)(3x-1)+\dfrac{(x-2)^2}{2}-1+2x\right)=2(3x+1)(3x-1)+(x-2)^2-2+4x=$

$=2(9x^2-1)+x^2-4x+4-2+4x=18x^2-2+x^2+2=19x^2$

b) $12\left(\dfrac{x^2+2}{3}-\dfrac{x^2+1}{4}-\dfrac{x+5}{12}\right)=4(x^2+2)-3(x^2+1)-(x+5)=$

$=4x^2+8-3x^2-3-x-5=x^2-x$

c) $6\left(\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3}-\dfrac{3x-2}{6}-\dfrac{x^2}{3}\right)=2(2x-1)(2x+1)-(3x-2)-2x^2=$

$=2(4x^2-1)-3x+2-2x^2=8x^2-2-3x+2-2x^2=6x^2-3x$

20. **Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.**

a) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2}+x-\dfrac{x}{4}$

b) $x+\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{x-2}{3}-x^2+2$

c) $\dfrac{x(x-1)}{3}-\dfrac{x(x+1)}{4}-\dfrac{3x+4}{12}$

a) $4\left(\dfrac{(x+1)(x-3)}{2}+x-\dfrac{x}{4}\right)=2(x+1)(x-3)+4x-x=(2x+2)(x-3)+3x=$

$=2x^2-6x+2x-6+3x=2x^2-x-6$

b) $6\left(x+\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{x-2}{3}-x^2+2\right)=6x+3(3x+1)-2(x-2)-6x^2+12=$

$=6x+9x+3-2x+4-6x^2+12=-6x^2+13x+19$

c) $12\left(\dfrac{x(x-1)}{3}-\dfrac{x(x+1)}{4}+\dfrac{3x+4}{12}\right)=4x(x-1)-3x(x+1)+3x+4=$

$=4x^2-4x-3x^2-3x+3x+4=x^2-4x+4$

Regla de Ruffini

21. **Divide aplicando la regla de Ruffini.**

a) $(x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$ **b)** $(x^3 - 3x^2 + 5x + 2) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 15x - 7) : (x - 3)$ **d)** $(3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x + 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 1 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{-5} \end{array}$$

$C(x) = x - 3$

$R = -5$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & 2 \\ -1 & & -1 & 4 & -9 \\ \hline & 1 & -4 & 9 & \boxed{-7} \end{array}$$

$C(x) = x^2 - 4x + 9$

$R = -7$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -15 & -7 \\ 3 & & 6 & 18 & 9 \\ \hline & 2 & 6 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

$C(x) = 2x^2 + 6x + 3$

$R = 2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & & -6 & 2 & 0 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & 0 & 1 & \boxed{-3} \end{array}$$

$C(x) = 3x^3 - x^2 + 1$

$R = -3$

22. **Calcula el cociente y el resto de estas divisiones:**

a) $(5x^2 + 13x + 4) : (x + 3)$ **b)** $(x^3 - x^2 - 15x - 11) : (x - 5)$

c) $(3x^3 - 2x^2 + 8x - 6) : (x + 1)$ **d)** $(x^4 - 2x^3 - 16x^2 - 7x) : (x - 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 5 & 13 & 4 \\ -3 & & -15 & 6 \\ \hline & 5 & -2 & \boxed{10} \end{array}$$

$C(x) = 5x - 2$

$R = 10$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -15 & -11 \\ 5 & & 5 & 20 & 25 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & \boxed{14} \end{array}$$

$C(x) = x^2 + 4x + 15$

$R = 14$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & 8 & -6 \\ -1 & & -3 & 5 & -13 \\ \hline & 3 & -5 & 13 & \boxed{-19} \end{array}$$

$C(x) = 3x^2 - 5x + 13$

$R = -19$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -16 & -7 & 0 \\ 2 & & 2 & 0 & -32 & -78 \\ \hline & 1 & 0 & -16 & -39 & \boxed{-78} \end{array}$$

$C(x) = x^3 - 16x - 39$

$R = -78$

23. **Calcula el valor numérico de cada polinomio para el valor de la incógnita que se indica:**

a) $5x^2 - 4x + 4$ **para** $x = -1$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 9$ **para** $x = 2$

c) $3x^3 - 4x^2 - 16x + 15$ **para** $x = -2$

d) $x^4 - x^3 - 17x^2 - 11x$ **para** $x = 4$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 5 & -4 & 4 \\ -1 & & -5 & 9 \\ \hline & 5 & -9 & \boxed{13} \end{array}$$

Valor numérico = 13

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -3 & 9 \\ 2 & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{3} \end{array}$$

Valor numérico = 7

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & -16 & 15 \\ -2 & & -6 & 20 & -8 \\ \hline & 3 & -10 & 4 & \boxed{7} \end{array}$$

Valor numérico = 7

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -17 & -11 & 0 \\ 4 & & 4 & 12 & -20 & -124 \\ \hline & 1 & 3 & -5 & -31 & \boxed{-124} \end{array}$$

Valor numérico = –124

24. **Busca el valor que debe tomar en cada polinomio el término independiente,** ***m*****, para que la división sea exacta:**

a) $(6x^2 - 5x + m) : (x - 2)$

b) $(2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 9x - m) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 9x^2 - 10x + m) : (x - 1)$

d $(2x^4 - 9x^3 - 18x + m) : (x - 5)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 6 & -5 & m \\ 2 & & 12 & 14 \\ \hline & 6 & 7 & \boxed{m + 14} \end{array}$$

$m + 14 = 0 \rightarrow m = -14$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -2 & -5 & 9 & -m \\ -1 & & -2 & 4 & 1 & -10 \\ \hline & 2 & -4 & -1 & 10 & \boxed{-m - 10} \end{array}$$

$-m - 10 = 0 \rightarrow m = -10$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & -10 & m \\ 1 & & 1 & -8 & -18 \\ \hline & 1 & -8 & -18 & \boxed{m - 18} \end{array}$$

$m - 18 = 0 \rightarrow m = 18$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -9 & 0 & -18 & m \\ 5 & & 10 & 5 & 25 & 35 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & 7 & \boxed{m + 35} \end{array}$$

$m + 35 = 0 \rightarrow m = -35$

Página 86

25. **Observa y contesta.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -13 & 15 \\ 1 & & 1 & -2 & -15 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & 15 & \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{0} & \end{array}$$

a) ¿Cuáles con las raíces del polinomio $P(x)$?

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

b) Factoriza $P(x)$.

a) $x = 1$ $\quad x = -3$ $\quad x = 5$

b) $P(x) = (x-1)(x+3)(x-5)$

Aplica lo aprendido

26. **Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:**

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $x^3 - x$

c) $4x^4 - 81x^2$ **d)** $x^3 + 2x^2 + x$

e) $3x^3 - 27x$ **f)** $3x^2 + 30x + 75$

a) $x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$

b) $x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

c) $x^2(4x^2 - 81) = x^2(2x+9)(2x-9)$

d) $x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

e) $3x(x^2 - 9) = 3x(x+3)(x-3)$

f) $3(x^2 + 10x + 25) = 3(x+5)^2$

27. **Factoriza los polinomios siguientes:**

a) $x^4 - 8x^3 + 16x^2$ **b)** $x^3 - 4x$

c) $9x^3 + 6x^2 + x$ **d)** $4x^2 - 25$

a) $x^2(x^2 - 8x + 16) = x^2(x-4)^2$

b) $x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$

c) $x(9x^2 + 6x + 1) = x(3x+1)$

d) $(2x+5)(2x-5)$

28. **Encuentra las raíces de estos polinomios y factorízalos:**

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $x^3 - 19x^2 + 34x$

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$

b) $x^2 - 19x + 34 = 0 \rightarrow x = \dfrac{19 \pm \sqrt{361 - 136}}{2} = \dfrac{19 \pm 15}{2} = \begin{cases} 17 \\ 2 \end{cases}$

$x^3 - 19x^2 + 34x = x(x - 17)(x - 2)$

c)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x - 3)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 3)$

d)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -9 & -18 \\ -2 & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 2)(x^2 - 9) = (x + 2)(x + 3)(x - 3)$

29. **Simplifica.**

a) $\dfrac{x^2 + 2x}{3x^3 + 6x^2}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$

c) $\dfrac{20x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$ **d)** $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}$

a) $\dfrac{x^2 + 2x}{3x^3 + 6x^2} = \dfrac{x(x + 2)}{3x^2(x + 2)} = \dfrac{1}{3x}$

b) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25} = \dfrac{(x + 5)(x - 5)}{(x - 5)^2} = \dfrac{x + 5}{x - 5}$

c) $20x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 240}}{40} = \dfrac{2 \pm \sqrt{244}}{40} \rightarrow$ No da raíces enteras.

$\dfrac{20x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{20x^2 - 2x - 3}{(x - 3)^2}$

d) • $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Luego $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

• $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x - 1)(x + 3)(x + 4)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 6 & 5 & -12 \\ 1 & & 1 & 7 & 12 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

$x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \dfrac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -4 \end{cases}$

$\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} = \dfrac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 3)(x + 4)} = \dfrac{1}{x + 4}$

30. **En cada caso, desarrolla $A + B$ y simplifica:**

a) $A = 4(x - 3) + y$ $\quad B = 3(x + 3) - y - 18$

b) $A = \frac{x+4}{5} - y + 1$ $\quad B = \frac{x-6}{5} + y + 1$

c) $A = -2\left(\frac{x+1}{3} + y - 1\right)$ $\quad B = \frac{x-3}{4} + 2y - 1$

d) $A = 6(x + 2) - 2(y + 7)$ $\quad B = x + 2(y + 1)$

a) $A + B = 4(x - 3) + y + 3(x + 3) - y - 18 = 4x - 12 + y + 3x + 9 - y - 18 = 7x - 21$

b) $A + B = \frac{x+4}{5} - y + 1 + \frac{x-6}{5} + y + 1 = \frac{2x-2}{5} + 2 = \frac{2x-2+10}{5} = \frac{2x+8}{5}$

c) $A + B = -2\left(\frac{x+1}{3} + y - 1\right) + \frac{x-3}{4} + 2y - 1 = \frac{-2x-2}{3} - 2y + 2 + \frac{x-3}{4} + 2y - 1 =$

$\frac{-2x-2}{3} + \frac{x-3}{4} + 1 = \frac{4(-2x-2) + 3(x-3) + 12}{12} = \frac{-5x-5}{12}$

d) $A + B = 6(x + 2) - 2(y + 7) + x + 2(y + 1) = 6x + 12 - 2y - 14 + x + 2y + 2 = 7x$

31. **Expresa algebraicamente.**

a) La edad de Alberto dentro de 22 años, si hoy tiene x años.

b) La cantidad que se obtiene al invertir x euros y ganar el 11 %.

c) Por un ordenador y un reproductor de música se pagan 2 500 €. Si el ordenador cuesta x euros, ¿cuánto cuesta el reproductor de música?

d) Se compra un artículo por x euros y pierde el 15 % de su valor. ¿Cuánto costaría ahora?

e) El perímetro de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide x cm, un cateto, los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto, 5 cm menos que esta.

f) Los lados iguales de un triángulo isósceles de 24 cm de perímetro, si el desigual mide x cm.

a) x = "Edad actual de Alberto". Dentro de 22 años tendrá $x + 22$.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Inversión} = x \\ \text{Ganancia de un } 11\,\% \;\to\; \text{I.V. es } 1{,}11\end{array}\right\}$ Cantidad obtenida $= 1{,}11x$

c) Ordenador $= x$ €

Equipo de música $= 2\,500 - x$ €

d) $\left.\begin{array}{l}x = \text{“precio de compra”} \\ \text{Pérdida del } 15\,\% \;\to\; \text{I.V. es } 0{,}85\end{array}\right\}$ Precio final $= 0{,}85x$

e) Los lados son: Hipotenusa $= x$; Catetos $= x - 5$ y $\frac{3}{5}x$

Perímetro $= x + x - 5 + \frac{3}{5}x = \frac{13}{5}x - 5$

f) x = "longitud del lado desigual"

Por tanto: $\frac{24 - x}{2}$ medirá cada uno de los lados iguales.

32. **Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:**

a) El área de una lámina rectangular de bronce cuya base mide 5/3 de su altura.

b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $16 - x$ y $9 - x$.

c) El área de un cuadrado de lado $x + 3$.

d) La diferencia de áreas de dos cuadrados de lados x y $x + 3$, respectivamente.

e) La superficie de un jardín rectangular de base x metros y perímetro 70 m.

f) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles si un cateto mide x cm, y el perímetro, 24 cm.

g) El área de un rombo sabiendo que la longitud de una diagonal, x, es el triple de la otra.

a) Base $= \frac{5}{3}x$ Altura $= x \rightarrow$ Área $= \frac{5}{3}x \cdot x = \frac{5}{3}x^2$

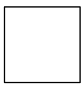
b) Cuadrado de la hipotenusa $= (9 - x)^2 + (16 - x)^2 = 81 - 18x + x^2 + 256 - 32x + x^2 =$

$= 2x^2 - 50x + 337$

c) Área $= (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

d) 

$\rightarrow$ Área $= x^2$



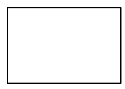
$\rightarrow$ Área $= (x + 3)^2$

Diferencia de áreas $= (x + 3)^2 - x^2 =$

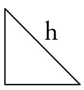
$= x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$

e) Perímetro = 70 m $\rightarrow$ Semiperímetro = 35 m $\rightarrow$ Altura $= 35 - x$

Área $= x(35 - x) = 35x - x^2$



f) Sea h la hipotenusa del triángulo.



Podemos expresar su cuadrado de dos formas distintas:

1. Como el triángulo rectángulo $h^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

2. Además, como el perímetro es 24, $h = 24 - 2x$, luego:

$h^2 = (24 - 2x)^2 = 576 + 4x^2 - 96x$

g) $\left.\begin{array}{l} \text{Diagonal menor} = x \\ \text{Diagonal mayor} = 3x \end{array}\right\} \rightarrow \text{Área} = \frac{x \cdot 3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$

33. **Expresa algebraicamente cada enunciado:**

a) El cuadrado de la diferencia de dos números.

b) La suma de los cuadrados de dos números.

c) La diagonal de un rectángulo de dimensiones x e y.

d) El coste de la mezcla de dos tipos de café, cuyos precios son 8 €/kg y 10 €/kg.

e) El dinero que tengo si llevo monedas de 2 € y de 50 céntimos.

a) $(x - y)^2$

b) $x^2 + y^2$

c) $\sqrt{x^2 + y^2}$

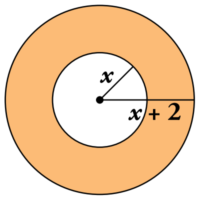
d) $\frac{8x + 10y}{x + y}$

e) $2x + 0{,}50y$

Página 87

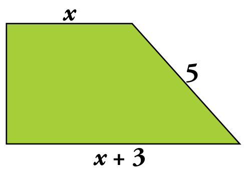
Resuelve problemas

34. **Expresa algebraicamente el área de esta corona circular:**



$A = \pi(x+2)^2 - \pi x^2 = \pi(x^2 + 4 + 4x - x^2) = 4\pi(x+1)$

35. **Expresa algebraicamente el perímetro y el área de este trapecio rectángulo:**



$\text{h} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Perímetro $= x + 5 + x + 3 + 4 = 2x + 12 = 2(x+6)$

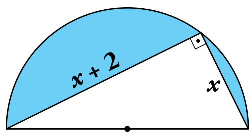
$A = \dfrac{x + 3 + x}{2} \cdot 4 = 2(2x+3) = 4x + 6$

36. **Observa la figura y expresa algebraicamente:**

a) El área del triángulo.

b) El radio de la semicircunferencia.

c) El área de la zona coloreada.



a) $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{x(x+2)}{2} = \dfrac{x^2 + 2x}{2}$

b) El radio de la semicircunferencia es la mitad de la hipotenusa del triángulo rectángulo.

$r = \dfrac{1}{2}\sqrt{(x+2)^2 + x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 4 + 4x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 2}$

c) $A_{\text{ZONA COLOREADA}} = A_{\text{SEMICÍRCULO}} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{2}(x^2 + 2x + 2) - \dfrac{x^2 + 2x}{2} =$

$= \pi\left(\dfrac{x^2 + 2x + 2}{4}\right) - \dfrac{x^2 + 2x}{2}$

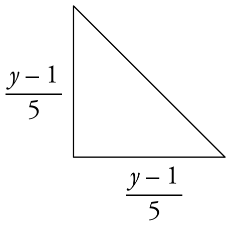
37. **Dos números suman 40. Expresa algebraicamente la suma del menor más la raíz cuadrada del mayor.**

Si un número es x, el otro es $40 - x$.

Consideramos, por ejemplo: x = número mayor, $40 - x$ = número menor

Suma del menor más la raíz cuadrada del mayor $= 40 - x + \sqrt{x}$

38. **El cateto de un triángulo rectángulo isósceles es $\dfrac{y-1}{5}$. Expresa algebraicamente la longitud de la hipotenusa y simplifica.**



$$h^2 = \left(\frac{y-1}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{5}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{y-1}{5}\right)^2$$

$$h = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{y-1}{5}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{y-1}{5}$$

39. **Un grupo de x estudiantes alquilan un piso por 700 € al mes. Se apuntan 2 más para alquilarlo. Expresa algebraicamente la diferencia de precio en ambos casos (con el grupo inicial y con 2 más).**

- x estudiantes alquilan un piso por 700 € al mes $\rightarrow$ cada uno paga $\dfrac{700}{x}$ €.
- Si fueran $x+2$ estudiantes, cada uno pagaría $\dfrac{700}{x+2}$ €.

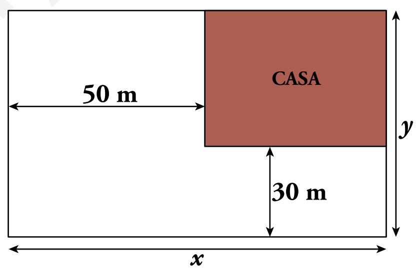
Diferencia de precio $= \dfrac{700}{x} - \dfrac{700}{x+2} = \dfrac{700(x+2) - 700x}{x(x+2)} = \dfrac{1\,400}{x(x+2)}$

40. **Un grupo de x amigos queda para comprar un regalo por 75,60 €. Tres de ellos se presentan sin dinero. Expresa algebraicamente el sobrecoste que eso supone para los demás.**

- x amigos pagan por un regalo 75,60 € $\rightarrow$ cada uno pone $\dfrac{75{,}60}{x}$ €.
- Si fueran 3 menos $(x-3)$, cada uno pondría $\dfrac{75{,}60}{x-3}$ €.

Diferencia de precio $= \dfrac{75{,}60}{x-3} - \dfrac{75{,}60}{x} = \dfrac{75{,}60x - 75{,}60(x-3)}{x(x-3)} = \dfrac{226{,}8}{x(x-3)}$

41. **En una parcela de lados x e y se construye una casa en la zona que se indica en el dibujo.**



Expresa, en función de x e y, el área de la zona no edificada.

$A_{\text{CASA}} = (x-50)(y-30)$

$A_{\text{ZONA NO EDIFICADA}} = xy - (x-50)(y-30) = 50y + 30x - 1\,500$

42. **Completa las tablas en tu cuaderno y expresa algebraicamente, con una igualdad, cada enunciado:**

a) Dentro de dos años, mi padre tendrá el doble de mi edad.

	YO	MI PADRE
HOY	x	y
DENTRO DE 2 AÑOS		

b) Si te doy 4 €, entonces tendrás 1 € más que yo.

	YO	TÚ
TENEMOS	x	y
TE DOY 4 €		

a)

	YO	MI PADRE
HOY	x	y
DENTRO DE 2 AÑOS	$x + 2$	$y + 2$

$y + 2 = 2(x + 2)$

$y + 2 = 2x + 4$

$y = 2x + 2$

b)

	YO	TÚ
TENEMOS	x	y
TE DOY 4 €	$x - 4$	$y + 4$

$y + 4 = (x - 4) + 1$

$y = x - 4 + 1 - 4$

$y = x - 7$

Curiosidades matemáticas

Reflexiona y exprésate utilizando el lenguaje algebraico

Piensa en tres dígitos de forma que, al menos, dos de ellos sean distintos.

Por ejemplo, 5, 8 y 3.
El número mayor 853
El número menor 358
La diferencia ... 853 – 358 = 495

Forma con ellos el mayor número posible.............. $\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z}$

Forma con ellos el menor número posible.............. $\boxed{z}\boxed{y}\boxed{x}$

Réstalos.............. $\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} - \boxed{z}\boxed{y}\boxed{x}$

- **Comprueba que la diferencia es siempre múltiplo de 9 y de 11 y que sus cifras suman 18.**
- **Demuestra, utilizando el lenguaje algebraico, que las observaciones anteriores resultan ciertas para cualquier trío de cifras, x, y, z, siendo $x > z$.**

AYUDA: **Los números de tres cifras se codifican algebraicamente así:**

$$\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} = 100x + 10y + z \qquad \boxed{z}\boxed{y}\boxed{x} = 100z + 10y + x$$

$$\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} - \boxed{z}\boxed{y}\boxed{x} = (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99x - 99z = 99(x - z)$$

La diferencia siempre es múltiplo de 99 y, por tanto, lo es de 9 y de 11.

1 Identidades y ecuaciones

Página 89

1. Las siguientes ecuaciones tienen alguna solución entera. Hállala tanteando.

a) $5^x = 25$ **b)** $(x - 5)^2 = 4$

c) $3^x = 81$ **d)** $3^{x-1} = 81$

e) $\sqrt{x+3} = 4$ **f)** $x^x = 256$

a) $x = 2$

b) $(x-5)^2 = 4 \begin{cases} x - 5 = -2 \to x = 3 \\ x - 5 = 2 \to x = 7 \end{cases}$

c) $3^x = 81 \to 3^x = 3^4 \to x = 4$

d) $3^{x-1} = 81 \to 3^{x-1} = 3^4 \to x = 5$

e) $\sqrt{x+3} = 4 \to x + 3 = 16 \to x = 13$

f) $x^x = 256 \to x^x = 4^4 \to x = 4$

2. Las siguientes ecuaciones no tienen solución entera.

Tanteando, obtén la solución de cada una de ellas aproximando hasta las décimas.

a) $x^5 = 400$ **b)** $x^4 = 5\,000$

c) $4^x = 200$ **d)** $x^x = 1\,000$

a) $3^5 = 243$; $3{,}5^5 = 525{,}22$; $3{,}3^5 = 391{,}35$; $3{,}4^5 = 454{,}35$

$x^5 = 400 \to x \approx 3{,}3$

b) $8{,}3^4 = 4\,745{,}83$; $8{,}4^4 = 4\,978{,}71$; $8{,}5^4 = 5\,220{,}06$

$x^4 = 5\,000 \to x \approx 8{,}4$

c) $4^{3,7} = 168{,}90$; $4^{3,8} = 194{,}01$; $4^{3,9} = 222{,}86$

$4^x = 200 \to x \approx 3{,}8$

d) $4{,}5^{4,5} = 869{,}87$; $4{,}6^{4,6} = 1\,118{,}63$

$x^x = 1\,000 \to x \approx 4{,}6$

2 Resolución de ecuaciones de primer grado

Página 91

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 11 + 2x = 5 + x - 6$

b) $5 - 7x + 2 - 6x = 10x - 7 - 2x$

c) $6x - 15 + 3x = x - 8 + 8x + 1$

d) $5x + 4 - 13x - 9 - 2x = 0$

e) $0 = 4x - 3 - x + 1 - 3x + 2$

a) $3x + 11 + 2x = 5 + x - 6$

$3x + 2x - x = 5 - 6 - 11$

$4x = -12$

$x = -\frac{12}{4} = -3$

b) $5 - 7x + 2 - 6x = 10x - 7 - 2x$

$7 - 13x = 8x - 7$

$14 = 21x$

$x = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

c) $6x - 15 + 3x = x - 8 + 8x + 1$

$9x - 15 = 9x - 7$

$9x - 9x = -7 + 15$

$0 = 8 \rightarrow$ No hay solución.

d) $5x + 4 - 13x - 9 - 2x = 0$

$-10x - 5 = 0$

$-10x = 5$

$x = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

e) $0 = 4x - 3 - x + 1 - 3x + 2$

$0 = 0 \rightarrow$ Infinitas soluciones.

2. Quita paréntesis y resuelve.

a) $8 + (5x - 6) = 3x - (x + 4)$

b) $x - (1 - 4x) - (6x - 5) + 1 = 0$

c) $3x - 1 - (2x + 1) = 1 - (x + 2) - 3$

d) $0 = (1 - x) + 2(x + 1) - 3(1 - x)$

e) $3(5x - 7) + 2(x - 1) = 5x - 3$

f) $5x + 3(1 - x) = 12 + 2(x - 5)$

g) $4(2 + 3x) = 10(x - 1) + 2(x + 9)$

h) $2(x - 3) - 5x + 7 = 11(1 - x) - (1 + 3x) - x$

i) $10[2x - (x - 1)] + 3 = 8x - 5(x + 3)$

j) $2x + 3 = 8 - 3[9 - 2(3x + 5)]$

k) $3x - 5[1 - 3(2x + 4)] = 3[1 - 4(x - 1)]$

a) $8 + (5x - 6) = 3x - (x + 4)$

$8 + 5x - 6 = 3x - x - 4$

$2 + 5x = 2x - 4$

$5x - 2x = -4 - 2$

$3x = -6$

$x = -\frac{6}{3} = -2$

b) $x - (1 - 4x) - (6x - 5) + 1 = 0$

$x - 1 + 4x - 6x + 5 + 1 = 0$

$-x + 5 = 0$

$5 = x$

c) $3x - 1 - (2x + 1) = 1 - (x + 2) - 3$

$3x - 1 - 2x - 1 = 1 - x - 2 - 3$

$x - 2 = -x - 4$

$x + x = -4 + 2$

$2x = -2$

$x = -\frac{2}{2} = -1$

d) $0 = (1 - x) + 2(x + 1) - 3(1 - x)$

$0 = 1 - x + 2x + 2 - 3 + 3x$

$0 = 4x$

$x = \frac{0}{4} = 0$

e) $3(5x - 7) + 2(x - 1) = 5x - 3$

$15x - 21 + 2x - 2 = 5x - 3$

$17x - 23 = 5x - 3$

$17x - 5x = -3 + 23$

$12x = 20$

$x = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

f) $5x + 3(1 - x) = 12 + 2(x - 5)$

$5x + 3 - 3x = 12 + 2x - 10$

$2x + 3 = 2x + 2$

$2x - 2x = 2 - 3$

$0 = -1$ No hay solución.

g) $4(2 + 3x) = 10(x - 1) + 2(x + 9)$

$8 + 12x = 10x - 10 + 2x + 18$

$8 + 12x = 12x + 8$ Infinitas soluciones.

h) $2(x - 3) - 5x + 7 = 11(1 - x) - (1 + 3x) - x$

$2x - 6 - 5x + 7 = 11 - 11x - 1 - 3x - x$

$-3x + 1 = -15x + 10$

$-3x + 15x = 10 - 1$

$12x = 9$

$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

i) $10[2x - (x - 1)] + 3 = 8x - 5(x + 3)$

$10[2x - x + 1] + 3 = 8x - 5x - 15$

$20x - 10x + 10 + 3 = 3x - 15$

$10x + 13 = 3x - 15$

$10x - 3x = -15 - 13$

$7x = -28$

$x = -\frac{28}{7} = -4$

j) $2x + 3 = 8 - 3[9 - 2(3x + 5)]$

$2x + 3 = 8 - 3[9 - 6x - 10]$

$2x + 3 = 8 - 27 + 18x + 30$

$2x + 3 = 11 + 18x$

$3 - 11 = 18x - 2x$

$-8 = 16x$

$x = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$

k) $3x - 5[1 - 3(2x + 4)] = 3[1 - 4(x - 1)]$

$3x - 5[1 - 6x - 12] = 3[1 - 4x + 4]$

$3x - 5 + 30x + 60 = 3 - 12x + 12$

$33x + 55 = -12x + 15$

$33x + 12x = 15 - 55$

$45x = -40$

$x = -\frac{40}{45} = -\frac{8}{9}$

3. **Quita denominadores y resuelve.**

a) $2x - 1 = x - \frac{x}{5}$

b) $5x - \frac{x}{3} + 2 = \frac{2x}{3}$

c) $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{1}{10}$

d) $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{5} - x$

e) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{2} = x + \frac{3}{10}$

f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

a) $2x - 1 = x - \frac{x}{5}$

$5[2x - 1] = 5\left[x - \frac{x}{5}\right]$

$10x - 5 = 5x - x$

$10x - 5x + x = 5$

$6x = 5$

$x = \frac{5}{6}$

b) $5x - \frac{x}{3} + 2 = \frac{2x}{3}$

$3\left[5x - \frac{x}{3} + 2\right] = 3\left[\frac{2x}{3}\right]$

$15x - x + 6 = 2x$

$15x - x - 2x = -6$

$12x = -6$

$x = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

c) $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{1}{10}$

$10\left[1 - \frac{x}{5}\right] = 10\left[x + \frac{1}{10}\right]$

$10 - 2x = 10x + 1$

$10 - 1 = 10x + 2x$

$9 = 12x$

$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{5} - x$

$10\left[\frac{x}{2} + 1\right] = 10\left[\frac{x}{5} - x\right]$

$5x + 10 = 2x - 10x$

$10 = 2x - 10x - 5x$

$10 = -13x$

$x = -\frac{10}{13}$

e) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{2} = x + \frac{3}{10}$

$10\left[\frac{2x}{5} + \frac{x}{2}\right] = 10\left[x + \frac{3}{10}\right]$

$4x + 5x = 10x + 3$

$9x - 10x = 3$

$-x = 3$

$x = -3$

f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

$12\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right] = 12\left[\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right]$

$6x + 2 = 4x + 3$

$6x - 4x = 3 - 2$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

4. **Resuelve.**

a) $2x - \frac{x}{3} = \frac{3x + 1}{5} - 1$

b) $x - \frac{2x + 3}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

c) $\frac{2x - 3}{2} - \frac{x + 3}{4} = \frac{x - 1}{2}$

d) $x + \frac{2x - 3}{9} + \frac{x - 1}{3} = \frac{14x - 6}{9}$

e) $x + \frac{3(x - 2)}{9} = \frac{5(x - 1)}{4} + \frac{7}{12}$

f) $\frac{3(x + 2)}{2} + \frac{x - 1}{5} = \frac{2(x + 1)}{5} + \frac{37}{10}$

g) $\frac{-x - 1}{6} - \frac{3(x + 5)}{12} = \frac{2(11 - x)}{9} - 6$

a) $2x - \frac{x}{3} = \frac{3x+1}{5} - 1$

$15\left[2x - \frac{x}{3}\right] = 15\left[\frac{3x+1}{5} - 1\right]$

$30x - 5x = 3(3x + 1) - 15$

$25x = 9x + 3 - 15$

$25x - 9x = 3 - 15$

$16x = -12$

$x = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$

b) $x - \frac{2x+3}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

$12\left[x - \frac{2x+3}{4}\right] = 12\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right]$

$12x - 3(2x + 3) = 6x + 4$

$12x - 6x - 9 = 6x + 4$

$12x - 6x - 6x = 4 + 9$

$0 = 13$ No hay solución.

c) $\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{2}$

$4\left[\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4}\right] = 4\left[\frac{x-1}{2}\right]$

$2(2x - 3) - (x + 3) = 2(x - 1)$

$4x - 6 - x - 3 = 2x - 2$

$4x - x - 2x = -2 + 6 + 3$

$x = 7$

d) $x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} = \frac{14x-6}{9}$

$\frac{9x + 2x - 3 + 3x - 3}{9} = \frac{14x-6}{9}$

$\frac{14x-6}{9} = \frac{14x-6}{9}$ Infinitas soluciones.

e) $x + \frac{3(x-2)}{9} = \frac{5(x-1)}{4} + \frac{7}{12}$

$36\left[x + \frac{3x-6}{9}\right] = 36\left[\frac{5x-5}{4} + \frac{7}{12}\right]$

$36x + 4(3x - 6) = 9(5x - 5) + 21$

$36x + 12x - 24 = 45x - 45 + 21$

$48x - 24 = 45x - 24$

$48x - 45x = -24 + 24$

$3x = 0$

$x = \frac{0}{3} = 0$

f) $\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5} = \frac{2(x+1)}{5} + \frac{37}{10}$

$10\left[\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5}\right] = 10\left[\frac{2(x+1)}{5} + \frac{37}{10}\right]$

$15(x + 2) + 2(x - 1) = 4(x + 1) + 37$

$15x + 30 + 2x - 2 = 4x + 4 + 37$

$17x + 28 = 4x + 41$

$17x - 4x = 41 - 28$

$13x = 13$

$x = \frac{13}{13} = 1$

g) $\frac{-x-1}{6} - \frac{3(x+5)}{12} = \frac{2(11-x)}{9} - 6$

$36\left[\frac{-x-1}{6} - \frac{3(x+5)}{12}\right] = 36\left[\frac{2(11-x)}{9} - 6\right]$

$6(-x - 1) - 9(x + 5) = 8(11 - x) - 216$

$-6x - 6 - 9x - 45 = 88 - 8x - 216$

$-15x - 51 = -8x - 128$

$-51 + 128 = -8x + 15x$

$77 = 7x$

$x = \frac{77}{7} = 11$

Página 92

5. Si al doble de un número le sumamos la cuarta parte de dicho número, el resultado es 189. ¿Cuál es el número?

Llamamos x a ese número.

$2x + \frac{1}{4}x = 189 \rightarrow 8x + x = 756 \rightarrow 9x = 756 \rightarrow x = 84$

6. Eloisa tiene 26 años menos que su madre. Entre las dos suman medio siglo. ¿Qué edad tiene cada una?

x = edad de Eloisa

$x + 26$ = edad de la madre de Eloisa

$x + x + 26 = 50 \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{2} = 12$

Solución: Eloisa tiene 12 años. Su madre tiene 38 años.

7. Un bote de tomate y un frasco de mostaza pesan 800 gramos. El bote pesa 150 gramos más que el frasco. ¿Cuánto pesa cada uno?

x = peso del bote de tomate (g)

$x - 150$ = peso del frasco de mostaza (g)

$x + x - 150 = 800 \rightarrow 2x = 950 \rightarrow x = \frac{950}{2} = 475$

Solución: el bote de tomate pesa 475 g. El frasco de mostaza pesa 325 g.

8. Tres hermanos se llevan, cada uno al siguiente, un año, y entre los tres suman 48 años. ¿Cuáles son sus edades?

x = edad del hermano pequeño

$x + 1$ = edad del hermano mediano

$x + 2$ = edad del hermano mayor

$x + x + 1 + x + 2 = 48 \rightarrow 3x + 3 = 48 \rightarrow 3x = 45 \rightarrow x = \frac{45}{3} = 15$

Solución: las edades de los hermanos son 15, 16 y 17 años.

9. La suma de tres números consecutivos es cuatro veces el menor de ellos. ¿Qué números son?

Llamamos x al menor de los números.

$x + (x + 1) + (x + 2) = 4x \rightarrow 3x + 3 = 4x \rightarrow x = 3$

Los números son el 3, el 4 y el 5.

10. Entre mi amigo y yo llevamos en los bolsillos 8,20 €. Si yo le diera 80 céntimos, tendríamos los dos lo mismo. ¿Cuánto llevamos cada uno?

x = dinero que llevo (€)

$8,20 - x$ = € que lleva mi amigo

$$x - 0,80 = 8,20 - x + 0,80 \rightarrow x + x = 8,20 + 0,80 + 0,80 \rightarrow 2x = 9,80 \rightarrow x = \frac{9,80}{2} = 4,90$$

Solución: yo llevo 4,90 € y mi amigo lleva 3,30 €.

11. En un concurso de televisión, dotado con un premio total de 1 000 €, el concursante A se llevó el doble que el concursante B pero 100 € menos que el concursante C. ¿Cuánto se llevó cada uno?

x = € que se lleva B

$2x$ = € que se lleva A

$2x + 100$ = € que se lleva C

$$x + 2x + 2x + 100 = 1\,000 \rightarrow 5x = 1\,000 - 100 \rightarrow 5x = 900 \rightarrow x = \frac{900}{5} = 180$$

Solución: A se lleva $180 \cdot 2 = 360$ €. B se lleva 180 €. C se lleva $360 + 100 = 460$ €.

12. Doña Laura lleva una vida muy regular, y duerme todos los días una hora menos de la mitad del tiempo que está despierta. ¿Cuánto tiempo duerme?

x = horas que duerme Laura.

$24 - x$ = horas que está despierta Laura.

$$x = \frac{24 - x}{2} - 1 \rightarrow x + 1 = \frac{24 - x}{2} \rightarrow 2(x + 1) = 24 - x \rightarrow 2x + 2 = 24 - x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x + x = 24 - 2 \rightarrow 3x = 22 \rightarrow x = \frac{22}{3} = 7 + \frac{1}{3}$$

Solución: Laura duerme 7 h y $\frac{1}{3}$ de hora, es decir, 7 horas y 20 minutos.

13. Por tres cafés y dos cruasanes hemos pagado 7,70 €. ¿Cuál es el precio de un cruasán, sabiendo que cuesta 60 céntimos menos que un café?

x = precio de un café (€)

$x - 0,60$ = € que cuesta un cruasán

$$3x + 2(x - 0,60) = 7,70 \rightarrow 3x + 2x - 1,20 = 7,70 \rightarrow 5x = 7,70 + 1,20 \rightarrow 5x = 8,90 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{8,90}{5} = 1,78$$

Solución: un café cuesta 1,78 €. Un cruasán cuesta 1,18 €.

Página 93

14. Moliendo juntas dos clases de café, la primera de 7,50 €/kg y la segunda de 5,70 €/kg, se han obtenido 90 kg de mezcla que sale a 6,50 €/kg. ¿Cuánto café de cada clase se ha utilizado en la mezcla?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	VALOR (€)
CAFÉ CARO	x kg	7,50 €/kg	$7{,}50x$
CAFÉ BARATO	$90 - x$ kg	5,70 €/kg	$5{,}70\,(90 - x)$
MEZCLA	90 kg	6,50 €/kg	$90 \cdot 6{,}50$

$$7{,}50x + 5{,}70\,(90 - x) = 90 \cdot 6{,}50 \;\rightarrow\; 7{,}50x + 513 - 5{,}70x = 585 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 7{,}50x - 5{,}70x = 585 - 513 \;\rightarrow\; 1{,}80x = 72 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \frac{72}{1{,}80} = 40$$

Solución: se han mezclado 40 kg de café caro con 50 kg de café barato.

15. Los ahorros de Adela quintuplican a los de su hermana Beatriz, pero si Adela hiciera a Beatriz una transferencia de 800 €, solo serían el triple. ¿Cuánto tiene cada una?

x = ahorros de Beatriz (€)

$5x$ = ahorros de Adela (€)

$$5x - 800 = 3(x + 800) \;\rightarrow\; 5x - 800 = 3x + 2\,400 \;\rightarrow\; 5x - 3x = 2\,400 + 800 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2x = 3\,200 \;\rightarrow\; x = \frac{3\,200}{2} = 1\,600$$

Solución: Beatriz tiene ahorrados 1 600 €. Adela tiene ahorrados 5 · 1 600 = 8 000 €.

16. Aumentando un número en un 20 % y restándole dos unidades, se obtiene el mismo resultado que sumándole su séptima parte. ¿Qué número es?

x = número buscado

$$120\,\%\text{ de } x - 2 = x + \frac{x}{7} \;\rightarrow\; \frac{120x}{100} - 2 = x + \frac{x}{7} \;\rightarrow\; 1{,}2x - 2 = x + \frac{x}{7} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 7[1{,}2x - 2] = 7\left[x + \frac{x}{7}\right] \;\rightarrow\; 8{,}4x - 14 = 7x + x \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 8{,}4x - 7x - x = 14 \;\rightarrow\; 0{,}4x = 14 \;\rightarrow\; x = \frac{14}{0{,}4} = 35$$

Solución: el número buscado es 35.

17. Hace dos años compré una bicicleta y un equipo de música por 260 €. Los acabo de vender por un total de 162 €, habiendo perdido el 30 % con la bicicleta y el 40 % con el equipo de música.

¿Cuánto me costó cada objeto?

x = precio de la bicicleta (€)

$260 - x$ = precio del equipo de música (€)

70 % de x + 60 % de $(260 - x) = 162$

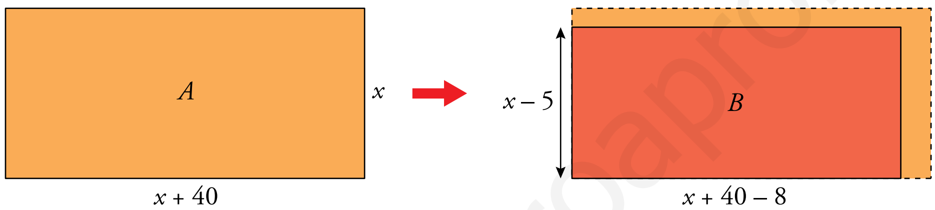
$0{,}7x + 0{,}6(260 - x) = 162 \rightarrow 0{,}7x + 156 - 0{,}6x = 162 \rightarrow 0{,}7x - 0{,}6x = 162 - 156 \rightarrow$

$$\rightarrow 0{,}1x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{0{,}1} = 60$$

Solución: la bicicleta costó 60 €. El equipo de música costó 260 – 60 = 200 €.

18. Una finca rectangular es 40 metros más larga que ancha. Al urbanizar la zona, se le recortan 8 m a lo largo y 5 m a lo ancho. Así, su perímetro se reduce en una décima parte.

¿Cuáles eran las dimensiones primitivas de la finca?



Perímetro de $B = \frac{9}{10}$ de Perímetro de A.

$$2(x + 40 - 8) + 2(x - 5) = \frac{9}{10} \cdot [2(x + 40) + 2x] \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x + 32) + 2(x - 5) = \frac{9[2(x + 40) + 2x]}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10[2(x + 32) + 2(x - 5)] = 9[2(x + 40) + 2x] \rightarrow$$

$$\rightarrow 10[2x + 64 + 2x - 10] = 9[2x + 80 + 2x] \rightarrow 10[4x + 54] = 9[4x + 80] \rightarrow$$

$$\rightarrow 40x + 540 = 36x + 720 \rightarrow 40x - 36x = 720 - 540 \rightarrow 4x = 180 \rightarrow x = \frac{180}{4} = 45$$

Solución: la finca mediá en su origen 45 m de ancho y 85 m de largo.

3 Ecuaciones de segundo grado

Página 94

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 - 20x + 100 = 0$

c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$

d) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

e) $10x^2 - 3x - 1 = 0$

f) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{7+5}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \\[2mm] \dfrac{7-5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x = 6$, $x = 1$

b) $x^2 - 20x + 100 = 0$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} = \frac{20 \pm 0}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Solución: $x = 10$ (doble)

c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 132}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{-107}}{6}$$

No tiene solución.

d) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{-5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \dfrac{-5+1}{12} = -\dfrac{4}{12} = -\dfrac{1}{3} \\[2mm] \dfrac{-5-1}{12} = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluciones: $x = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$

e) $10x^2 - 3x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1)}}{2 \cdot 10} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{20} = \frac{3 \pm 7}{20} = \begin{cases} \dfrac{3+7}{20} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{3-7}{20} = -\dfrac{4}{20} = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Soluciones: $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{5}$

f) $2x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Solución: $x = 2$ (doble)

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $2x^2 - 50 = 0$ **b)** $x^2 - 1 = 0$

c) $3x^2 + 5 = 0$ **d)** $2x^2 + 10x = 0$

e) $4x^2 - 3 = 0$ **f)** $7x^2 - 5x = 0$

a) $2x^2 - 50 = 0 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = \dfrac{50}{2} \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 5,\ x_2 = -5$

b) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

c) $3x^2 + 5 = 0 \rightarrow 3x^2 = -5 \rightarrow x^2 = -\dfrac{5}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{5}{3}}$ No existe solución.

d) $2x^2 + 10x = 0 \rightarrow 2x(x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -5$

e) $4x^2 - 3 = 0 \rightarrow 4x^2 = 3 \rightarrow x^2 = \dfrac{3}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $7x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(7x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 7x - 5 = 0 \rightarrow 7x = 5 \rightarrow x = 5/7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{5}{7}$

Página 95

3. Elimina los paréntesis, si los hay, y resuelve.

a) $2x^2 - 7 = 3x - x^2 - 1$

b) $3(x-1) + 5x^2 = x(x+3) + 1$

c) $3x(2-x) - 2 = 4x(x-1) + x^2$

d) $16 - 5x(2x-3) = x - 2x(3x-1)$

a) $2x^2 - 7 = 3x - x^2 - 1 \rightarrow 2x^2 + x^2 - 3x - 7 + 1 = 0 \rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -1$

b) $3(x-1) + 5x^2 = x(x+3) + 1 \rightarrow 3x - 3 + 5x^2 = x^2 + 3x + 1 \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2 - x^2 + 3x - 3x - 3 - 1 = 0 \rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

c) $3x(2-x) - 2 = 4x(x-1) + x^2 \rightarrow 6x - 3x^2 - 2 = 4x^2 - 4x + x^2 \rightarrow$

$\rightarrow -8x^2 + 10x - 2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} \dfrac{5+3}{8} = 1 \\ \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{4}$

d) $16 - 5x(2x-3) = x - 2x(3x-1) \rightarrow 16 - 10x^2 + 15x = x - 6x^2 + 2x \rightarrow$

$\rightarrow -10x^2 + 6x^2 + 15x - x - 2x + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -4x^2 + 12x + 16 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 4,\ x_2 = -1$

4. Opera y resuelve.

a) $x^2 + 2x = (x + 2)(1 - x)$

b) $(x + 2)(x - 1) + 2 = x(2 - x)$

c) $3x - (x - 2)(x + 2) = 2(x^2 - 1)$

d) $x(x - 5) + x^2 = (3x - 1)(x - 1)$

e) $(3x - 2)(5x + 1) = 4(x - 1)$

f) $15 - (x + 2)^2 = (x - 3)^2 + 2x$

a) $x^2 + 2x = (x + 2)(1 - x) \rightarrow x^2 + 2x = x - x^2 + 2 - 2x \rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 2x - x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$

b) $(x + 2)(x - 1) + 2 = x(2 - x) \rightarrow x^2 + 2x - x - 2 + 2 = 2x - x^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + x^2 + 2x - x - 2x - 2 + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 - x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(2x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

c) $3x - (x - 2)(x + 2) = 2(x^2 - 1) \rightarrow 3x - (x^2 - 4) = 2x^2 - 2 \rightarrow 3x - x^2 + 4 - 2x^2 + 2 = 0$

$\rightarrow -3x^2 + 3x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

d) $x(x - 5) + x^2 = (3x - 1)(x - 1) \rightarrow x^2 - 5x + x^2 = 3x^2 - 3x - x + 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 5x - 3x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow -x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$ No tiene solución.

e) $(3x - 2)(5x + 1) = 4(x - 1) \rightarrow 15x^2 + 3x - 10x - 2 = 4x - 4 \rightarrow$

$\rightarrow 15x^2 - 7x - 2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2}}{2 \cdot 15} = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{30} = \frac{11 \pm 1}{30} = \begin{cases} \dfrac{11+1}{30} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{11-1}{30} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{1}{3}$

f) $15 - (x + 2)^2 = (x - 3)^2 + 2x \rightarrow 15 - (x^2 + 4 + 4x) = x^2 + 9 - 6x + 2x \rightarrow$

$\rightarrow 15 - x^2 - 4 - 4x - x^2 - 9 + 6x - 2x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

5. Elimina los denominadores y resuelve.

a) $x(2x+1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} = 3$

b) $\dfrac{x(x+3)}{2} - \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{1}{3} = 0$

c) $\dfrac{7-x^2}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x^2+1}{4}$

d) $1 - \dfrac{x}{6} = \dfrac{(x-2)x}{2} + \dfrac{2}{3}$

e) $\dfrac{2(x+3)(x-3)}{5} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x(x-2)}{2}$

f) $\dfrac{(x+2)^2}{7} - x = \dfrac{x(x-4)}{2} + 1$

g) $\dfrac{(2x-3)^2}{9} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{(x-1)^2+5}{6}$

a) $x(2x+1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} = 3 \rightarrow 2\left[x(2x+1) - \dfrac{(x-1)^2}{2}\right] = 2 \cdot 3$

$\rightarrow 2x(2x+1) - (x-1)^2 = 6 \rightarrow 4x^2 + 2x - (x^2 + 1 - 2x) - 6 = 0$

$\rightarrow 4x^2 + 2x - x^2 - 1 + 2x - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x - 7 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{6} = \frac{-4 \pm 10}{6} = \begin{cases} \dfrac{-4+10}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\[2mm] \dfrac{-4-10}{6} = \dfrac{-14}{6} = \dfrac{-7}{3} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{-7}{3}$

b) $\dfrac{x(x+3)}{2} - \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{1}{3} = 0 \rightarrow 6\left[\dfrac{x(x+3)}{2} - \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{1}{3}\right] = 6 \cdot 0$

$\rightarrow 3x(x+3) - 2(x+1)^2 + 2 = 0 \rightarrow 3x^2 + 9x - 2(x^2 + 1 + 2x) + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 + 9x - 2x^2 - 2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 5x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(x+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -5$

c) $\dfrac{7-x^2}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x^2+1}{4} \rightarrow 8\left[\dfrac{7-x^2}{8} - \dfrac{1}{2}\right] = 8\left[\dfrac{2x^2+1}{4}\right] \rightarrow$

$\rightarrow 7 - x^2 - 4 = 2(2x^2+1) \rightarrow 3 - x^2 = 4x^2 + 2 \rightarrow -x^2 - 4x^2 = 2 - 3 \rightarrow$

$\rightarrow -5x^2 = -1 \rightarrow x^2 = \dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5},\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

d) $1 - \dfrac{x}{6} = \dfrac{(x-2)x}{2} + \dfrac{2}{3} \rightarrow 6\left[1 - \dfrac{x}{6}\right] = 6\left[\dfrac{(x-2)x}{2} + \dfrac{2}{3}\right] \rightarrow 6 - x = 3x(x-2) + 4 \rightarrow$

$\rightarrow 6 - x = 3x^2 - 6x + 4 \rightarrow 3x^2 - 6x + 4 - 6 + x = 0 \rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \dfrac{5+7}{6} = 2 \\[2mm] \dfrac{5-7}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -\dfrac{1}{3}$

e) $\dfrac{2(x+3)(x-3)}{5}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x(x-2)}{2} \rightarrow 10\left[\dfrac{2(x+3)(x-3)}{5}+\dfrac{x}{2}\right]=10\left[\dfrac{x(x-2)}{2}\right] \rightarrow$

$\rightarrow 4(x+3)(x-3)+5x=5x(x-2) \rightarrow 4(x^2-9)+5x=5x^2-10x \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2-36+5x-5x^2+10x=0 \rightarrow -x^2+15x-36=0$

$$x=\dfrac{-15\pm\sqrt{15^2-4(-1)(-36)}}{2(-1)}=\dfrac{-15\pm\sqrt{225-144}}{-2}=\dfrac{-15\pm 9}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-15+9}{-2}=\dfrac{-6}{-2}=3\\[2mm]\dfrac{-15-9}{-2}=\dfrac{-24}{-2}=12\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=12$

f) $\dfrac{(x+2)^2}{7}-x=\dfrac{x(x-4)}{2}+1 \rightarrow 14\left[\dfrac{(x+2)^2}{7}-x\right]=14\left[\dfrac{x(x-4)}{2}+1\right] \rightarrow$

$\rightarrow 2(x+2)^2-14x=7x(x-4)+14 \rightarrow 2(x^2+4+4x)-14x=7x^2-28x+14 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2+8+8x-14x-7x^2+28x-14=0 \rightarrow -5x^2+22x-6=0$

$$x=\dfrac{-22\pm\sqrt{22^2-4(-5)(-6)}}{2(-5)}=\dfrac{-22\pm\sqrt{484-120}}{-10}=\dfrac{-22\pm\sqrt{364}}{-10}=$$

$$=\dfrac{-22\pm 2\sqrt{91}}{-10}=\begin{cases}\dfrac{-22+2\sqrt{91}}{-10}=\dfrac{11-\sqrt{91}}{5}\\[2mm]\dfrac{-22-2\sqrt{91}}{-10}=\dfrac{11+\sqrt{91}}{5}\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=\dfrac{11-\sqrt{91}}{5},\ x_2=\dfrac{11+\sqrt{91}}{5}$

g) $\dfrac{(2x-3)^2}{9}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{(x-1)^2+5}{6} \rightarrow 18\left[\dfrac{(2x-3)^2}{9}+\dfrac{x}{2}\right]=18\left[\dfrac{(x-1)^2+5}{6}\right] \rightarrow$

$\rightarrow 2(2x-3)^2+9x=3[(x-1)^2+5] \rightarrow 2(4x^2+9-12x)+9x=3[x^2+1-2x+5] \rightarrow$

$\rightarrow 8x^2+18-24x+9x=3x^2+3-6x+15 \rightarrow 8x^2+18-15x-3x^2+6x-18=0 \rightarrow$

$$\rightarrow 5x^2-9x=0 \rightarrow x(5x-9)=0 \rightarrow \begin{cases}x=0\\ 5x-9=0 \rightarrow x=9/5\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=\dfrac{9}{5}$

Página 96

6. El producto de dos números naturales consecutivos es 90. ¿Qué números son?

$x(x + 1) = 90 \rightarrow x^2 + x - 90 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} 9 \\ -10 \end{cases}$$

Como los números son naturales, la solución $x = -10$ no es válida. Los números son 9 y 10.

7. Si multiplico mi edad por la que tenía el año pasado, obtengo el mismo resultado que si multiplico la que tenía hace cuatro años por la que tendré dentro de cuatro. ¿Cuántos años tengo?

x = mi edad actual

$x(x - 1) = (x - 4)(x + 4) \rightarrow x^2 - x = x^2 - 16 \rightarrow x^2 - x - x^2 + 16 = 0 \rightarrow -x + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 16$

Solución: tengo 16 años actualmente.

8. El producto de dos números es 10, y su suma, 6,5. ¿Qué números son?

Si un número es x, el otro es $6{,}5 - x$.

$x \cdot (6{,}5 - x) = 10 \rightarrow 6{,}5x - x^2 = 10 \rightarrow x^2 - 6{,}5x + 10 = 0$

$$x = \frac{6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 40}}{2} = \frac{6{,}5 \pm 1{,}5}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2{,}5 \end{cases}$$

$$6{,}5 - x = \begin{cases} 6{,}5 - 4 = 2{,}5 \\ 6{,}5 - 2{,}5 = 4 \end{cases}$$

Los números son 2,5 y 4.

9. La superficie de un rectángulo es 150 cm², y su perímetro, 50 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Base del rectángulo $\rightarrow x$

Altura del rectángulo $\rightarrow \dfrac{50 - 2x}{2} = 25 - x$

Área $= x \cdot (25 - x) = 150 \rightarrow 25x - x^2 - 150 = 0 \rightarrow x^2 - 25x + 150 = 0$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} = \begin{cases} 15 \\ 10 \end{cases}$$

$$25 - x = \begin{cases} 25 - 15 = 10 \\ 25 - 10 = 15 \end{cases}$$

Las dimensiones del rectángulo son 10 cm y 15 cm.

10. Los tres lados de un triángulo miden 15 cm, 22 cm y 23 cm. Si a los tres les restamos la misma longitud, el triángulo resultante es rectángulo. ¿Qué longitud es esa?

Llamamos x a la cantidad que restamos.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(23 - x)^2 = (15 - x)^2 + (22 - x)^2 \rightarrow$

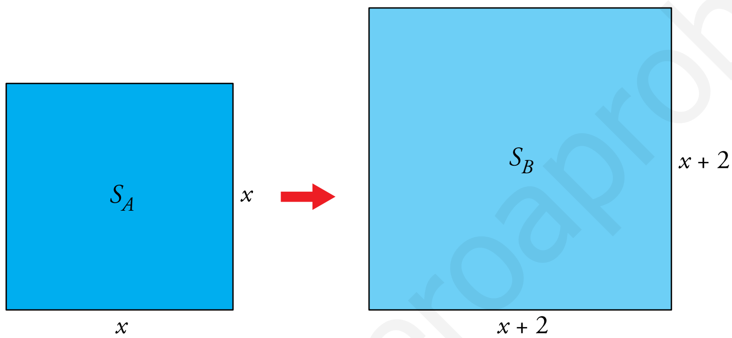
$\rightarrow 529 + x^2 - 46x = 225 + x^2 - 30x + 484 + x^2 - 44x \rightarrow x^2 - 28x + 180 = 0$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 720}}{2} = \frac{28 \pm 8}{2} = \begin{cases} 18 \\ 10 \end{cases}$$

La solución $x = 18$ no es válida, ya que uno de los lados mide 15.

La longitud buscada es 10 cm.

11. Si el lado de un cuadrado aumenta 2 cm, su superficie aumenta 28 cm². ¿Cuánto mide el lado?



$S_B = S_A + 28$

$(x + 2)^2 = x^2 + 28$

$x^2 + 4 + 4x = x^2 + 28$

$x^2 + 4 + 4x - x^2 - 28 = 0$

$4x - 24 = 0$

$4x = 24$

$x = \frac{24}{4} = 6$

Solución: el lado del cuadrado mide 6 cm.

Página 97

12. El área total de un cilindro de 22 m de altura es 1 110π m². Halla su radio.

$A_{TOTAL} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r^2 + rh) = 1\,110\pi \;\rightarrow\; 2(r^2 + rh) = 1\,110 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; r^2 + 22r = 555 \;\rightarrow\; r^2 + 22r - 555 = 0$

$$r = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + 2\,220}}{2} = \frac{-22 \pm 52}{2} = \begin{cases} 15 \\ -37 \;\rightarrow\; \text{No vale.} \end{cases}$$

Radio del cilindro = 15 m

13. Un depósito cilíndrico de combustible, de 22 m de altura, tiene una superficie total de 2 380 m². ¿Cuánto mide su radio?

$2\pi(r^2 + rh) = 2\,380 \;\rightarrow\; \pi(r^2 + 22r) = 1\,190 \;\rightarrow\; \pi r^2 + 22\pi r - 1\,190 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; r^2 + 22r - (1\,190/\pi) = 0$

$$r = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + (4\,760/\pi)}}{2} = \frac{-22 \pm 44{,}71}{2} = \begin{cases} 11{,}36 \\ -33{,}36 \;\rightarrow\; \text{No vale.} \end{cases}$$

El radio mide, aproximadamente, 11,36 m.

14. Un inversor deposita 20 000 € a un cierto porcentaje. Al cabo de un año, añade 10 000 € y mantiene todo el capital al mismo porcentaje. Al finalizar el segundo año le devuelven 35 200 €.

¿A qué porcentaje impuso su capital inicial?

Primer año $\rightarrow$ $20\,000x$

Segundo año $\rightarrow$ $(20\,000x + 10\,000)x$

$20\,000x^2 + 10\,000x = 35\,200 \;\rightarrow\; 200x^2 + 100x - 352 = 0 \;\rightarrow\; 50x^2 + 25x - 88 = 0$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 17\,600}}{100} = \frac{-25 \pm 135}{100} = \begin{cases} 1{,}10 \\ -1{,}60 \;\rightarrow\; \text{No vale.} \end{cases}$$

El índice de crecimiento anual es 1,10. Por tanto, el porcentaje de aumento anual es del 10 %.

4 Otros tipos de ecuaciones

Página 98

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-4)(x-6)=0$

b) $(x+2)(x-3)=0$

c) $(x+1)(3x-5)=0$

d) $(3x+1)(2x-3)=0$

e) $x(x^2-64)=0$

f) $3x(x^2+x-2)=0$

g) $(x+1)(x^2-4)=0$

h) $(2x+1)(x^2+5x-24)=0$

i) $(x+3)\left(\dfrac{1}{x}-4\right)=0$

j) $(x-4)\left(\dfrac{4}{3x-1}-2\right)=0$

a) $(x-4)(x-6)=0 \begin{cases} x-4=0 \ \to \ x_1=4 \\ x-6=0 \ \to \ x_2=6 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=4,\ x_2=6$

b) $(x+2)(x-3)=0 \begin{cases} x+2=0 \ \to \ x_1=-2 \\ x-3=0 \ \to \ x_2=3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-2,\ x_2=3$

c) $(x+1)(3x-5)=0 \begin{cases} x+1=0 \ \to \ x_1=-1 \\ 3x-5=0 \ \to \ x_2=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-1,\ x_2=\dfrac{5}{3}$

d) $(3x+1)(2x-3)=0 \begin{cases} 3x+1=0 \ \to \ x_1=-\dfrac{1}{3} \\ 2x-3=0 \ \to \ x_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-\dfrac{1}{3},\ x_2=\dfrac{3}{2}$

e) $x(x^2-64)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x^2-64=0 \begin{cases} x_2=8 \\ x_3=-8 \end{cases} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=8,\ x_3=-8$

f) $3x(x^2+x-2)=0 \begin{cases} 3x=0 \ \to \ x_1=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases}$

$x^2+x-2=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} x_2=\dfrac{-1+3}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_3=\dfrac{-1-3}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-2$

g) $(x+1)(x^2-4)=0 \begin{cases} x+1=0 \;\rightarrow\; x_1=-1 \\ x^2-4=0 \;\rightarrow\; x^2=4 \;\rightarrow\; x_2=2,\; x_3=-2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-1,\; x_2=2,\; x_3=-2$

h) $(2x+1)(x^2+5x-24)=0 \begin{cases} 2x+1=0 \;\rightarrow\; x_1=-\dfrac{1}{2} \\ x^2+5x-24=0 \end{cases}$

$$x^2+5x-24=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{2}=\frac{-5\pm 11}{2}= \begin{cases} x_2=3 \\ x_3=-8 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1=-\dfrac{1}{2},\; x_2=3,\; x_3=-8$

i) $(x+3)\left(\dfrac{1}{x}-4\right)=0 \begin{cases} x+3=0 \;\rightarrow\; x_1=-3 \\ \dfrac{1}{x}-4=0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{x}=4 \;\rightarrow\; x_2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-3,\; x_2=\dfrac{1}{4}$

j) $(x-4)\left(\dfrac{4}{3x-1}-2\right)=0 \begin{cases} x-4=0 \;\rightarrow\; x_1=4 \\ \dfrac{4}{3x-1}-2 \end{cases}$

$$\frac{4}{3x-1}-2=0 \;\rightarrow\; \frac{4}{3x-1}=2 \;\rightarrow\; \frac{3x-1}{4}=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; 4\left[\frac{3x-1}{4}\right]=4\left[\frac{1}{2}\right] \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 3x-1=2 \;\rightarrow\; 3x=3 \;\rightarrow\; x_2=1$$

Soluciones: $x_1=4,\; x_2=1$

2. Elimina los denominadores y resuelve.

a) $\dfrac{12}{x}+1=x+2$

b) $\dfrac{7}{x}-2=x+\dfrac{4}{x}$

c) $\dfrac{5}{x^2+1}+1=\dfrac{10}{x^2+1}$

d) $\dfrac{2}{3x-1}+x=\dfrac{x+3}{3x-1}$

e) $\dfrac{5}{x-3}-1=x$

f) $\dfrac{8}{x}-3=\dfrac{5}{x+3}$

g) $\dfrac{15}{x-1}=\dfrac{12}{x}+1$

h) $\dfrac{7}{x+2}+2=\dfrac{9}{x-2}$

a) $\dfrac{12}{x}+1=x+2 \;\rightarrow\; x\left[\dfrac{12}{x}+1\right]=x[x+2] \;\rightarrow\; 12+x=x^2+2x \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x^2+2x-x-12=0 \;\rightarrow\; x^2+x-12=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}= \begin{cases} \dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ \dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4 \end{cases}$$

Comprobamos si $x=3$ y $x=-4$ son soluciones:

- Si $x=3$

  $\dfrac{12}{3}+1=3+2$

  $4+1=5$ (Sí es solución)

- Si $x=-4$

  $\dfrac{12}{-4}+1=-4+2$

  $-3+1=-2$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1=3,\; x_2=-4$

b) $\dfrac{7}{x} - 2 = x + \dfrac{4}{x} \rightarrow x\left[\dfrac{7}{x} - 2\right] = x\left[x + \dfrac{4}{x}\right] \rightarrow 7 - 2x = x^2 + 4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 4 + 2x - 7 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\[2mm] \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Comprobamos si son válidos los valores:

- Si $x = 1$

  $\dfrac{7}{1} - 2 = 1 + \dfrac{4}{1}$

  $7 - 2 = 1 + 4$ (Sí es solución)

- Si $x = -3$

  $\dfrac{7}{-3} - 2 = -3 + \dfrac{4}{-3}$

  $\dfrac{-7-6}{3} = \dfrac{-9-4}{3}$

  $\dfrac{-13}{3} = \dfrac{-13}{3}$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -3$

c) $\dfrac{5}{x^2+1} + 1 = \dfrac{10}{x^2+1} \rightarrow (x^2+1)\left[\dfrac{5}{x^2+1} + 1\right] = (x^2+1)\left[\dfrac{10}{x^2+1}\right] \rightarrow$

$\rightarrow 5 + x^2 + 1 = 10 \rightarrow x^2 = 10 - 1 - 5 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Comprobamos si son válidos:

- Si $x = 2$

  $\dfrac{5}{2^2+1} + 1 = \dfrac{10}{2^2+1}$

  $\dfrac{5}{5} + 1 = \dfrac{10}{5}$

  $2 = 2$ (Sí es solución)

- Si $x = -2$

  $\dfrac{5}{(-2)^2+1} + 1 = \dfrac{10}{(-2)^2+1}$

  $\dfrac{5}{5} + 1 = \dfrac{10}{5}$

  $2 = 2$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) $\dfrac{2}{3x-1} + x = \dfrac{x+3}{3x-1} \rightarrow (3x-1)\left[\dfrac{2}{3x-1} + x\right] = (3x-1)\left[\dfrac{x+3}{3x-1}\right] \rightarrow$

$\rightarrow 2 + x(3x-1) = x + 3 \rightarrow 2 + 3x^2 - x - x - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\[2mm] \dfrac{2-4}{6} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Comprobamos si son válidos los valores:

- Si $x = 1$

  $\dfrac{2}{3 \cdot 1 - 1} + 1 = \dfrac{1+3}{3 \cdot 1 - 1}$

  $\dfrac{2}{2} + 1 = \dfrac{4}{2}$

  $1 + 1 = 2$ (Sí es solución)

- Si $x = -\dfrac{1}{3}$

  $\dfrac{2}{3(-1/3) - 1} + 1 = \dfrac{-1/3 + 3}{3(-1/3) - 1}$

  $\dfrac{2}{-1-1} + 1 = \dfrac{-8/3}{-1-1}$

  $0 = \dfrac{-8/3}{-2}$ (No es solución)

Solución: $x = 1$

e) $\dfrac{5}{x-3} - 1 = x \;\rightarrow\; \dfrac{5}{x-3} = x + 1 \;\rightarrow\; 5 = (x+1)(x-3) \;\rightarrow\; 5 = x^2 - 3x + x - 3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\[2ex] \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Comprobamos si son valores válidos:

- Si $x = 4$

  $\dfrac{5}{4-3} - 1 = 4$

  $5 - 1 = 4$ (Sí es solución)

- Si $x = -2$

  $\dfrac{5}{-2-3} - 1 = -2$

  $-1 - 1 = -2$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$

f) $\dfrac{8}{x} - 3 = \dfrac{5}{x+3} \;\rightarrow\; \dfrac{8-3x}{x} = \dfrac{5}{x+3} \;\rightarrow\; (8-3x)(x+3) = 5x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 8x + 24 - 3x^2 - 9x - 5x = 0 \;\rightarrow\; -3x^2 - 6x + 24 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2-6}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \\[2ex] \dfrac{-2+6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Comprobamos si son valores válidos:

- Si $x = -4$

  $\dfrac{8}{-4} - 3 = \dfrac{5}{-4+3}$

  $-2 - 3 = -5$ (Sí es solución)

- Si $x = 2$

  $\dfrac{8}{2} - 3 = \dfrac{5}{2+3}$

  $1 = 1$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

g) $\dfrac{15}{x-1} = \dfrac{12}{x} + 1 \;\rightarrow\; \dfrac{15}{x-1} = \dfrac{12+x}{x} \;\rightarrow\; 15x = (x-1)(12+x) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 15x = 12x + x^2 - 12 - x \;\rightarrow\; x^2 + 12x - x - 12 - 15x = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+8}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \\[2ex] \dfrac{4-8}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Comprobamos si son valores válidos:

- Si $x = 6$

  $\dfrac{15}{6-1} = \dfrac{12}{6} + 1$

  $\dfrac{15}{5} = 2 + 1$ (Sí es solución)

- Si $x = -2$

  $\dfrac{15}{-2-1} = \dfrac{12}{-2} + 1$

  $-5 = -6 + 1$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$

h) $\dfrac{7}{x+2} + 2 = \dfrac{9}{x-2} \rightarrow \dfrac{7+2(x+2)}{x+2} = \dfrac{9}{x-2} \rightarrow (x-2)[7+2(x+2)] = 9(x+2) \rightarrow$

$\rightarrow (x-2)[7+2x+4] = 9x+18 \rightarrow (x-2)(2x+11) - 9x - 18 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 + 11x - 4x - 22 - 9x - 18 = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x - 40 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - x - 20 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+9}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\[2ex] \dfrac{1-9}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Comprobamos si son valores válidos:

- Si $x = 5$

  $\dfrac{7}{5+2} + 2 = \dfrac{9}{5-2}$

  $\dfrac{7}{7} + 2 = \dfrac{9}{3}$

  $1 + 2 = 3$ (Sí es solución)

- Si $x = -4$

  $\dfrac{7}{-4+2} + 2 = \dfrac{9}{-4-2}$

  $-\dfrac{7}{2} + 2 = -\dfrac{9}{6}$

  $-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ (Sí es solución)

Soluciones: $x_1 = 5$, $x_2 = -4$

Página 99

3. Resuelve.

a) $\sqrt{x}-3=0$ **b)** $\sqrt{x}+2=x$

c) $\sqrt{4x+5}=x+2$ **d)** $\sqrt{x+1}-3=x-8$

e) $3\sqrt{x-1}=2x-11$ **f)** $x=\sqrt{2x^2-1}$

g) $\sqrt{2x^2-2}=1-x$ **h)** $\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{5x+6}$

a) $\sqrt{x}-3=0 \to \sqrt{x}=3 \to x=9$

b) $\sqrt{x}+2=x \to \sqrt{x}=x-2 \to x=(x-2)^2 \to x=x^2-4x+4 \to$

$$\to x^2-5x+4=0 \to x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$$

Comprobación:

Si $x=4 \to \sqrt{4}+2=2+2=4$ $x_1=4$ es válida.

Si $x=1 \to \sqrt{1}+2=1+2=3\neq 1$ $x_2=1$ no es válida.

Solución: $x=4$

c) $\sqrt{4x+5}=x+2$

$\left(\sqrt{4x+5}\right)^2=(x+2)^2 \to 4x+5=x^2+4x+4 \to x^2+4x+4-4x-5=0 \to$

$\to x^2-1=0 \to x^2=1 \to x=\pm 1$

Comprobación:

Si $x=1 \to \left.\begin{array}{r}\sqrt{4x+5}=\sqrt{9}=3\\ 1+2=3\end{array}\right\}$ Coinciden $\to x=1$ es solución.

Si $x=-1 \to \left.\begin{array}{r}\sqrt{4x+5}=\sqrt{1}=1\\ -1+2=1\end{array}\right\}$ Coinciden $\to x=-1$ es solución.

Soluciones: $x_1=1,\ x_2=-1$

d) $\sqrt{x+1}=x-8+3 \to \sqrt{x+1}=x-5 \to \left(\sqrt{x+1}\right)^2=(x-5)^2 \to$

$\to x+1=x^2-10x+25 \to x^2-11x+24=0$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{11\pm 5}{2}=\begin{cases}8\\3\end{cases}$$

Comprobación:

Si $x=8 \to \left.\begin{array}{r}\sqrt{8+1}-3=\sqrt{9}-3=3-3=0\\ 8-8=0\end{array}\right\}$ Coinciden $\to x=8$ es válida.

Si $x=3 \to \left.\begin{array}{r}\sqrt{3+1}-3=\sqrt{4}-3=2-3=-1\\ 3-8=-5\end{array}\right\}$ No coinciden $\to x=3$ no es válida.

Solución: $x=8$

e) $3\sqrt{x-1} = 2x - 11 \rightarrow \left(3\sqrt{x-1}\right)^2 = (2x-11)^2 \rightarrow 9(x-1) = 4x^2 + 121 - 44x \rightarrow$

$\rightarrow 9x - 9 = 4x^2 + 121 - 44x \rightarrow 4x^2 - 53x + 130 = 0$

$$x = \frac{-(-53) \pm \sqrt{2\,809 - 2\,080}}{8} = \frac{53 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{53 \pm 27}{8} = \begin{cases} 10 \\ 26/8 = 13/4 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\text{Si } x = 10 \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\sqrt{10-1} = 3 \cdot 3 = 9 \\ 2 \cdot 10 - 11 = 9 \end{array}\right\} \text{ Coinciden} \rightarrow x = 10 \text{ es solución.}$$

$$\text{Si } x = 13/4 \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\sqrt{13/4 - 1} = 3 \cdot 3/2 = 9/2 \\ 2 \cdot 13/4 - 11 = -9/2 \end{array}\right\} \text{ No coinciden} \rightarrow x = 13/4 \text{ no es solución.}$$

Solución: $x = 10$

f) $x = \sqrt{2x^2 - 1} \rightarrow x^2 = \left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2 \rightarrow x^2 = 2x^2 - 1 \rightarrow 2x^2 - 1 - x^2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Comprobación:

Si $x = 1 \rightarrow 1 = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 1} \rightarrow 1 = 1$ $\quad x_1 = 1$ es solución.

Si $x = -1 \rightarrow -1 = \sqrt{2 \cdot (-1)^2 - 1} \rightarrow -1 \neq 1$ $\quad x_2 = -1$ no es solución.

Solución: $x = 1$

g) $\left(\sqrt{2x^2 - 2}\right)^2 = (1-x)^2 \rightarrow 2x^2 - 2 = 1 - 2x + x^2 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\text{Si } x = -3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{2 \cdot 9 - 2} = \sqrt{18 - 2} = \sqrt{16} = 4 \\ 1 - (-3) = 1 + 3 = 4 \end{array}\right\} \text{ Coinciden} \rightarrow x = -3 \text{ es solución.}$$

$$\text{Si } x = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{2 \cdot 1 - 2} = \sqrt{2 - 2} = 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{ Coinciden} \rightarrow x = 1 \text{ es solución.}$$

Soluciones: $x_1 = -3,\ x_2 = 1$

h) $\left(\sqrt{3x^2 + 4}\right)^2 = \left(\sqrt{5x + 6}\right)^2 \rightarrow 3x^2 + 4 = 5x + 6 \rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\text{Si } x = 2 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot 4 + 4} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{5 \cdot 2 + 6} = \sqrt{10 + 6} = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right\} \text{ Coinciden} \rightarrow x = 2 \text{ es solución.}$$

$$\text{Si } x = -\frac{1}{3} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9} + 4} = \sqrt{\frac{1}{3} + 4} = \sqrt{\frac{13}{3}} \\ \sqrt{5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 6} = \sqrt{-\frac{5}{3} + 6} = \sqrt{\frac{13}{3}} \end{array}\right\} \text{ Coinciden} \rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ es solución.}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{3}$

4. Un comerciante de un mercadillo ha obtenido 240 € por la venta de cierta cantidad de camisas. Habría obtenido lo mismo vendiendo 6 unidades menos, pero dos euros más caras. ¿Cuántas camisas ha vendido?

x = número de camisas vendidas

$\frac{240}{x}$ = precio de una camisa (€)

$$240 = (x-6)\left(\frac{240}{x}+2\right) \to 240 = 240 + 2x - \frac{1440}{x} - 12 \to 2x - \frac{1440}{x} - 12 = 0 \to$$

$$\to 2x^2 - 1\,440 - 12x = 0 \to x^2 - 6x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-720)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 2\,880}}{2} = \frac{6 \pm 54}{2} = \begin{cases} \frac{6+54}{2} = \frac{60}{2} = 30 \\ \frac{6-54}{2} \end{cases}$$

La solución negativa no es solución del problema, ya que el número de camisas vendidas no puede ser negativo.

Solución: se han vendido 30 camisas.

5. Piensa en un triángulo rectángulo y escribe el enunciado de un problema que se resuelva con la ecuación $\sqrt{x^2+8^2} = x + 2$. Da la solución.

POSIBLE ENUNCIADO: De un triángulo rectángulo conocemos la medida de uno de sus catetos, 8 cm, y sabemos que la hipotenusa mide 2 cm más que el otro cateto. Calcula la medida de los tres lados.

$$\sqrt{x^2+8^2} = x + 2 \to \left(\sqrt{x^2+8^2}\right)^2 = (x+2)^2 \to x^2 + 64 = x^2 + 4x + 4 \to 64 - 4 = 4x \to$$

$$\to 60 = 4x \to x = \frac{60}{4} = 15$$

Solución: Los catetos miden 8 y 15 cm. La hipotenusa mide 17 cm.

Ejercicios y problemas

Página 100

Practica

Ecuaciones: soluciones por tanteo

1. **Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{x+3} = 32$ **b)** $\sqrt{2x+1} = 9$

c) $x^{x+1} = 8$ **d)** $(x-1)^3 = 27$

a) $2^{x+3} = 32 \rightarrow 2^{x+3} = 2^5 \rightarrow x+3 = 5 \rightarrow x = 2$

b) $\sqrt{2x+1} = 9 \rightarrow 2x+1 = 81 \rightarrow 2x = 80 \rightarrow x = 40$

c) $x^{x+1} = 8 \rightarrow x = 2$ (porque $2^{2+1} = 2^3 = 8$)

d) $(x-1)^3 = 27 \rightarrow (x-1)^3 = 3^3 \rightarrow x-1 = 3 \rightarrow x = 4$

2. **Las siguientes ecuaciones tienen más de una solución entera. Búscalas tanteando.**

a) $(x+1)^2 = 4$ **b)** $(x+1)(x-3) = 0$

c) $x^2 = 2x$ **d)** $3(x-2)^2 = 3$

a) $(x+1)^2 = 4 \rightarrow x+1$ puede ser 2 o –2, esto es $x_1 = 1$ o $x_2 = -3$

b) $(x+1)(x-3) = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

c) $x^2 = 2x \rightarrow x_1 = 0$ o $x_2 = 2$

d) $3(x-2)^2 = 3 \rightarrow (x-2)^2 = 1 \rightarrow x-2$ es 1 o –1, esto es, $x_1 = 3$ o $x_2 = 1$

3. **Busca por tanteo, con la calculadora, una solución aproximada hasta las décimas.**

a) $x^3 + x^2 = 20$ **b)** $x^x = 35$

c) $3^x = 1\,000$ **d)** $x^3 = 30$

a) $\left.\begin{array}{l} 2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12 \\ 3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36 \end{array}\right\}$ Por tanto, la solución está entre 2 y 3. Probemos con 2,4; 2,5; 2,6; …

$\left.\begin{array}{l} 2,4^3 + 2,4^2 = 19,584 \\ 2,5^3 + 2,5^2 = 21,875 \end{array}\right\}$ Por tanto, la solución es $x = 2,4$.

b) $\left.\begin{array}{l} 3^3 = 27 \\ 4^4 = 256 \end{array}\right\}$ La solución está entre 3 y 4. Probemos con 3,1; 3,2; …

$\left.\begin{array}{l} 3,1^{3,1} = 33,36 \\ 3,2^{3,2} = 41,35 \end{array}\right\}$ La solución más próxima es $x = 3,1$.

c) $\left.\begin{array}{l}3^6 = 729\\ 3^7 = 2187\end{array}\right\}$ La solución está entre 6 y 7. Probemos con 6,2; 6,3; …

$\left.\begin{array}{l}3^{6,2} = 908,14\\ 3^{6,3} = 1013,59\end{array}\right\}$ La solución más próxima es $x = 6{,}3$.

d) $\left.\begin{array}{l}3^3 = 27\\ 4^3 = 64\end{array}\right\}$ La solución está entre 3 y 4. Probemos con 3,1; 3,2; …

$\left.\begin{array}{l}3,1^3 = 29,791\\ 3,2^3 = 32,768\end{array}\right\}$ La solución es $x = 3{,}1$.

Ecuaciones de primer grado

4. **Quita paréntesis y resuelve.**

a) $\mathbf{5(x - 1) - 6x + 2 = 3(1 - x) - (1 - 3x)}$

b) $\mathbf{7[x - 2(x + 1)] - 4 = 3x - 4(x + 3)}$

c) $\mathbf{x + 5 = 3x - 2[1 - 3(2x - 1)]}$

d) $\mathbf{2x - 3[8 - 4(x - 1)] = 2[14 - 3(x - 1)]}$

a) $5x - 5 - 6x + 2 = 3 - 3x - 1 + 3x \rightarrow -x - 3 = 2 \rightarrow -3 - 2 = x \rightarrow x = -5$

b) $7[x - 2x - 2] - 4 = 3x - 4x - 12 \rightarrow 7x - 14x - 14 - 4 = -x - 12 \rightarrow$

$\rightarrow -7x - 18 = -x - 12 \rightarrow -7x + x = -12 + 18 \rightarrow -6x = 6 \rightarrow x = -\frac{6}{6} = -1$

c) $x + 5 = 3x - 2 + 6(2x - 1) \rightarrow x + 5 = 3x - 2 + 12x - 6 \rightarrow$

$\rightarrow x - 3x - 12x = -2 - 6 - 5 \rightarrow -14x = -13 \rightarrow x = \frac{-13}{-14} = \frac{13}{14}$

d) $2x - 3[8 - 4x + 4] = 2[14 - 3x + 3] \rightarrow 2x - 24 + 12x - 12 = 28 - 6x + 6 \rightarrow$

$\rightarrow 2x + 12x + 6x = 28 + 6 + 24 + 12 \rightarrow 20x = 70 \rightarrow x = \frac{70}{20} = \frac{7}{2}$

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{\frac{1-2x}{9} = 1 - \frac{x+4}{6}}$

b) $\mathbf{\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}}$

c) $\mathbf{\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} = \frac{1-9x}{6}}$

d) $\mathbf{\frac{2x-5}{4} - \frac{x-1}{5} = 1 - \frac{2x+1}{20}}$

a) Multiplicamos ambos miembros por 18 y simplificamos:

$2(1 - 2x) = 18 - 3(x + 4) \rightarrow 2 - 4x = 6 - 3x \rightarrow 2 - 6 = 4x - 3x \rightarrow x = -4$

b) Multiplicamos la expresión por 40 y simplificamos:

$8(3x + 2) - 4(4x - 1) + 5(5x - 2) = 10(x + 1) \rightarrow$

$\rightarrow 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0$

c) Multiplicamos ambos miembros por 6 y simplificamos:

$3(x - 3) - 2(5x + 1) = 1 - 9x \rightarrow 3x - 9 - 10x - 2 = 1 - 9x \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

d) Multiplicamos la expresión por 20 y simplificamos:

$5(2x - 5) - 4(x - 1) = 20 - 2x - 1 \rightarrow 10x - 25 - 4x + 4 = 19 - 2x \rightarrow 8x = 40 \rightarrow x = 5$

6. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{3-x}{2} - \frac{2(x-2)}{3} = 4 - \frac{7(2x-1)}{9}$

b) $\frac{1+12x}{4} + \frac{x-4}{2} = \frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

c) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} = \frac{-2}{15} - \frac{2(x-3)}{4}$

d) $\frac{2x-3}{6} - \frac{3(x-1)}{4} - \frac{2(3-x)}{6} + \frac{5}{8} = 0$

a) Multiplicamos la ecuación por 18:

$9(3-x) - 12(x-2) = 72 - 14(2x-1) \rightarrow 27 - 9x - 12x + 24 = 72 - 28x + 14 \rightarrow$

$\rightarrow -9x - 12x + 28x = 72 + 14 - 27 - 24 \rightarrow 7x = 35 \rightarrow x = \frac{35}{7} = 5$

b) Multiplicamos toda la ecuación por 8:

$2(1 + 12x) + 4(x-4) = 3(x+1) - (1-x) \rightarrow 24x - 16 = 0 \rightarrow x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

c) Multiplicamos la ecuación por 60:

$10(3x-2) - 6(4x+1) = -2 \cdot 4 - 30(x-3) \rightarrow 30x - 20 - 24x - 6 = -8 - 30x + 90 \rightarrow$

$\rightarrow 36x = 108 \rightarrow x = \frac{108}{36} = 3$

d) Multiplicamos toda la ecuación por 24:

$4(2x-3) - 18(x-1) - 8(3-x) + 3 \cdot 5 = 0 \rightarrow 8x - 12 - 18x + 18 - 24 + 8x + 15 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2x = 3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

7. **Las siguientes ecuaciones son de primer grado. Compruébalo y resuélvelas:**

a) $(x+1)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^2$

b) $4(x-3)(x+3) - (2x+1)^2 = 3$

c) $\frac{x+3}{5} + \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{x^2+1}{4}$

d) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$

Para comprobar que son ecuaciones de primer grado, simplificamos las ecuaciones al máximo antes de resolverlas:

a) $x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 \rightarrow$

$\rightarrow -2x + 5 = 2x + 5$ (es de primer grado) $\rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $4(x^2 - 9) - 4x^2 - 4x - 1 = 3 \rightarrow 4x^2 - 36 - 4x^2 - 4x - 1 = 3 \rightarrow$

$\rightarrow -4x = 40$ (es de primer grado) $\rightarrow x = \frac{40}{-4} = -10$

c) Multiplicamos la ecuación por 20:

$4(x+3) + 5(x-1)^2 = 5(x^2+1) \rightarrow 4x + 12 + 5(x^2 - 2x + 1) = 5x^2 + 5 \rightarrow$

$\rightarrow 4x + 12 + 5x^2 - 10x + 5 = 5x^2 + 5 \rightarrow -6x = -12$ (es de primer grado) $\rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$

d) $4(x^2 + 9 - 6x) - (4x^2 + 1 - 4x) = 35 \rightarrow 4x^2 + 36 - 24x - 4x^2 - 1 + 4x = 35 \rightarrow$

$\rightarrow 20x = 0$ (es de primer grado) $\rightarrow x = 0$

Ecuaciones de segundo grado

8. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{x^2 - 2x - 3 = 0}$ **b)** $\mathbf{2x^2 - 7x - 4 = 0}$

c) $\mathbf{2x^2 - 5x - 3 = 0}$ **d)** $\mathbf{x^2 + x + 2 = 0}$

a) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -1$

b) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \dfrac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2/4 = -1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 4,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$

c) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2/4 = -1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$

d) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

No tiene solución.

9. **Resuelve.**

a) $\mathbf{4x^2 - 64 = 0}$ **b)** $\mathbf{3x^2 - 9x = 0}$

c) $\mathbf{2x^2 + 5x = 0}$ **d)** $\mathbf{2x^2 - 8 = 0}$

a) $4x^2 = 64 \rightarrow x^2 = \dfrac{64}{4} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 4,\ x_2 = -4$

b) $3x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

c) $x(2x+5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow x = -5/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{5}{2}$

d) $2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \dfrac{8}{2} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

10. **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:**

a) $-2x^2 - x + 3 = 0$ **b)** $25 - 100x^2 = 0$

c) $\frac{5}{2}x^2 + 3x = 0$ **d)** $-x^2 + 3x + 10 = 0$

a) $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} x = -6/4 = -3/2 \\ x = 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 1$

b) Despejamos $x^2 \rightarrow x^2 = \frac{25}{100} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{100}} = \pm\frac{5}{10} \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$

c) Sacamos x factor común $\rightarrow x\left(\frac{5}{2}x + 3\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \frac{5}{2}x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{6}{5} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{6}{5}$

d) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{-2} = \frac{-3 \pm 7}{-2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$

11. **Resuelve.**

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) = 25$ **b)** $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 1$

c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$ **d)** $3x(x+4) - x(x-1) = 13x + 8$

a) $x^2 - 9 + x^2 - 16 = 25 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$

b) $x^2 + x - 3x - 3 + x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 1 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2$

c) $x^2 - 3x + x^2 - 16 = 2 - 3x \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

d) $3x^2 + 12x - x^2 + x = 13x + 8 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

12. **Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general.**

a) $(3x+1)(3x-1)+\dfrac{(x-2)^2}{2}=1-2x$

b) $\dfrac{x^2+2}{3}-\dfrac{x^2+1}{4}=\dfrac{x+5}{12}$

c) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3}=\dfrac{3x-2}{6}+\dfrac{x^2}{3}$

a) $9x^2-1+\dfrac{x^2-4x+4}{2}=1-2x \to 18x^2-2+x^2-4x+4=2-4x \to$

$\to 19x^2=0 \to x=0$

b) Multiplicamos toda la ecuación por 12:

$4(x^2+2)-3(x^2+1)=x+5 \to 4x^2+8-3x^2-3=x+5 \to x^2-x=0 \to$

$\to x(x-1)=0$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=1$

c) Multiplicamos la ecuación por 6:

$2(2x-1)(2x+1)=3x-2+2x^2 \to 2(4x^2-1)=3x-2+2x^2 \to 6x^2-3x=0 \to$

$\to 3x(2x-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \to x=1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{2}$

13. **Resuelve.**

a) $(2x-3)^2-19=3x(x-5)$

b) $x(1-2x)=(1-2x)^2$

c) $(x-4)^2+8(x+1)=17$

d) $(x-2)^2+(2x+1)^2=0$

e) $(x-3)^2+17=(2x+5)^2-28x$

a) $(2x-3)^2-19=3x(x-5) \to 4x^2+9-12x-19=3x^2-15x \to$

$\to 4x^2+9-12x-19-3x^2+15x=0 \to x^2+3x-10=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm7}{2}=\begin{cases}\dfrac{-3+7}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2mm] \dfrac{-3-7}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=2,\ x_2=-5$

b) $x(1-2x)=(1-2x)^2 \to x-2x^2=1+4x^2-4x \to 4x^2-4x+1+2x^2-x=0 \to$

$\to 6x^2-5x+1=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot6\cdot1}}{2\cdot6}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12}=\begin{cases}\dfrac{5+1}{12}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{5-1}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=\dfrac{1}{3}$

c) $(x-4)^2 + 8(x+1) = 17 \rightarrow x^2 + 16 - 8x + 8x + 8 - 17 = 0 \rightarrow x^2 + 7 = 0 \rightarrow x^2 = -7$

No existe solución.

d) $(x-2)^2 + (2x+1)^2 = 0 \rightarrow x^2 + 4 - 4x + 4x^2 + 1 + 4x = 0 \rightarrow 5x^2 + 5 = 0 \rightarrow 5x^2 = -5$

No existe solución.

e) $(x-3)^2 + 17 = (2x+5)^2 - 28x \rightarrow x^2 + 9 - 6x + 17 = 4x^2 + 25 + 20x - 28x \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 + 25 - 8x - x^2 - 9 + 6x - 17 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{6} = 1 \\[2ex] \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$

Página 101

14. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $(2x+1)^2 = 1 + (x-1)(x+1)$ **b)** $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \dfrac{x}{4}$

c) $x + \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} = x^2 - 2$ **d)** $\dfrac{x(x-1)}{3} - \dfrac{x(x+1)}{4} + \dfrac{3x+4}{12} = 0$

a) $4x^2 + 1 + 4x = 1 + x^2 - 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x = -1/3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{1}{3},\ x_2 = -1$

b) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2} + x = \dfrac{x}{4} \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 + 4x = x \rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -3/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -\dfrac{3}{2}$

c) $6x + 9x + 3 - 2x + 4 = 6x^2 - 12 \rightarrow 6x^2 - 13x - 19 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169+456}}{12} = \frac{13 \pm 25}{12} = \begin{cases} x = 19/6 \\ x = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{19}{6},\ x_2 = -1$

d) $4x(x-1) - 3x(x+1) + 3x + 4 = 0 \rightarrow 4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

Solución: $x = 2$

Otros tipos de ecuaciones

15. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(2x-5)(x+7) = 0$ **b)** $(x-2)(4x+6) = 0$

c) $(x+2)(x^2+4) = 0$ **d)** $(3x+1)(x^2+x-2) = 0$

a) Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2} \\ x + 7 = 0 \rightarrow x = -7 \end{array}\right\} \text{Soluciones: } x_1 = -7,\ x_2 = \frac{5}{2}$$

b) Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ 4x + 6 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \text{Soluciones: } x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 2$$

c) Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$$\left.\begin{array}{l} x+2=0 \;\rightarrow\; x=-2 \\ x^2+4=0 \;\rightarrow\; x^2=-4 \;\text{ No tiene solución.} \end{array}\right\} \text{Solución: } x=-2$$

d) Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+1=0 \;\rightarrow\; x=-\dfrac{1}{3} \\ x^2+x-2=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{array}{l}1\\-2\end{array} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Soluciones:}\\ x_1=-2,\; x_2=\dfrac{-1}{3},\; x_3=1\end{array}$$

16. **Di cuáles son las soluciones de estas ecuaciones:**

a) $(x-2)(x+3)(2x-5)=0$ **b)** $x^2(x-6)(3x-1)=0$

c) $(2-x)(x-7)(x^2-9)=0$ **d)** $x(x^2+1)(6x-3)=0$

a) $(x-2)(x+3)(2x-5)=0 \left< \begin{array}{l} x-2=0 \;\rightarrow\; x=2 \\ x+3=0 \;\rightarrow\; x=-3 \\ 2x-5=0 \;\rightarrow\; x=5/2 \end{array}\right.$

Soluciones: $x_1=2,\; x_2=-3,\; x_3=\dfrac{5}{2}$

b) $x^2(x-6)(3x-1)=0 \left< \begin{array}{l} x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \\ x-6=0 \;\rightarrow\; x=6 \\ 3x-1=0 \;\rightarrow\; x=1/3 \end{array}\right.$

Soluciones: $x_1=0,\; x_2=\dfrac{1}{3},\; x_3=6$

c) $(2-x)(x-7)(x^2-9)=0 \left< \begin{array}{l} 2-x=0 \;\rightarrow\; x=2 \\ x-7=0 \;\rightarrow\; x=7 \\ x^2-9=0 \;\rightarrow\; x^2=9 \;\rightarrow\; x=\pm 3 \end{array}\right.$

Soluciones: $x_1=-3,\; x_2=2,\; x_3=3,\; x_4=7$

d) $x(x^2+1)(6x-3)=0 \left< \begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=0 \;\rightarrow\; x^2=-1 \;\text{ No tiene solución.} \\ 6x-3=0 \;\rightarrow\; x=3/6=1/2 \end{array}\right.$

Soluciones: $x_1=0,\; x_2=\dfrac{1}{2}$

17. **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{3x}{2}$ **b)** $\dfrac{800}{x}-50=\dfrac{600}{x+4}$ **c)** $\dfrac{1}{x^2}-2=\dfrac{3-x}{3x^2}$ **d)** $\dfrac{x}{2}=1+\dfrac{2x-4}{x+4}$

a) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{3x}{2}$. Multiplicamos la ecuación por $2x$:

$4-1=3x^2 \;\rightarrow\; 3x^2=3 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm 1$

Comprobación: Si $x=-1 \;\rightarrow\; \dfrac{2}{-1}-\dfrac{1}{2(-1)}=\dfrac{3(-1)}{2} \;\rightarrow\; -2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$ Solución válida.

Si $x=1 \;\rightarrow\; 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ Solución válida.

Soluciones: $x_1=-1,\; x_2=1$

b) $\dfrac{800}{x} - 50 = \dfrac{600}{x+4}$. Multiplicamos la ecuación por $x(x+4)$:

$800(x+4) - 50x(x+4) = 600x \rightarrow 800x + 3\,200 - 50x^2 - 200x = 600x \rightarrow$

$\rightarrow -50x^2 + 3\,200 = 0 \rightarrow x^2 - 64 = 0 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = \pm 8$

Comprobación: Si $x = -8 \rightarrow \dfrac{800}{-8} - 50 = \dfrac{600}{-8+4} \rightarrow -150 = \dfrac{600}{-4}$ Solución válida.

Si $x = 8 \rightarrow 100 - 50 = \dfrac{600}{12} \rightarrow 50 = 50$ Solución válida.

Soluciones: $x_1 = -8,\ x_2 = 8$

c) $\dfrac{1}{x^2} - 2 = \dfrac{3-x}{3x^2}$. Multiplicamos la ecuación por $3x^2$:

$3 - 6x^2 = 3 - x \rightarrow 6x^2 - x = 0 \rightarrow x(6x-1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ 6x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/6 \end{array} \right.$

Comprobación: Si $x = 0 \rightarrow \dfrac{1}{0}$ no existe, luego no es válida.

Si $x = \dfrac{1}{6} \rightarrow \dfrac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} - 2 = \dfrac{3 - \frac{1}{6}}{3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2} \rightarrow 36 - 2 = \dfrac{\frac{17}{6}}{\frac{3}{36}} \rightarrow$

$\rightarrow 34 = 17 \cdot 2$ Solución válida.

Solución: $x = \dfrac{1}{6}$

d) $\dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{2x-4}{x+4}$. Multiplicamos la ecuación por $2(x+4)$:

$x(x+4) = 2(x+4) \cdot 2(2x+4) \rightarrow x^2 + 4x = 2x + 8 + 4x - 8 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x-2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{array} \right.$

Comprobación: Si $x = 0 \rightarrow \dfrac{0}{2} = 1 + \dfrac{0-4}{0+4} \rightarrow 0 = 1 - 1$ Solución válida.

Si $x = 2 \rightarrow \dfrac{2}{2} = 1 + \dfrac{4-4}{2+4} \rightarrow 1 = 1 + 0$ Solución válida.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 2$

18. **Resuelve.**

a) $\dfrac{100}{x} + 5 = \dfrac{90}{x-4}$

b) $\dfrac{250}{x+1} - 5 = 3(4x-1)$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{5}{9}$

d) $\dfrac{2-x}{2} + \dfrac{4}{2+x} = 1$

a) $\dfrac{100}{x} + 5 = \dfrac{90}{x-4}$. Multiplicamos la ecuación por $x(x-4)$:

$100(x-4) + 5x(x-4) = 90x \rightarrow 100x - 400 + 5x^2 - 20x = 90x \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2 - 10x - 400 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} = \begin{cases} 10 \\ -8 \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = -8 \rightarrow \dfrac{100}{-8} + 5 = \dfrac{90}{-8-4} \rightarrow -\dfrac{15}{2} = -\dfrac{15}{2}$ Solución válida.

Si $x = 10 \rightarrow 10 + 5 = \dfrac{90}{10-4} \rightarrow 15 = 15$ Solución válida.

Soluciones: $x_1 = -8,\ x_2 = 10$

b) $\dfrac{250}{x+1} - 5 = 3(4x - 1)$. Multiplicamos la ecuación por $x + 1$:

$250 - 5(x + 1) = 3(4x - 1)(x + 1) \rightarrow 250 - 5x - 5 = 3(4x^2 + 4x - x - 1) \rightarrow$

$\rightarrow 250 - 5x - 5 = 12x^2 + 9x - 3 \rightarrow 12x^2 + 14x - 248 = 0 \rightarrow 6x^2 + 7x - 124 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 2976}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{3025}}{12} = \frac{-7 \pm 55}{12} = \begin{cases} \dfrac{48}{12} = 4 \\ -\dfrac{62}{12} = -\dfrac{31}{6} \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = \dfrac{-31}{6} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{250}{-\dfrac{31}{6} + 1} - 5 = \dfrac{250}{-\dfrac{25}{6}} - 5 = -65 \\ 3\left(4 \cdot \left(-\dfrac{31}{6}\right) - 1\right) = 3 \cdot \left[\left(-\dfrac{62}{3}\right) - 1\right] = 3 \cdot \left(-\dfrac{65}{3}\right) = -65 \end{array}\right\}$ Coincide.

Si $x = 4 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{250}{5} - 5 = 50 - 5 = 45 \\ 3 \cdot (4 \cdot 4 - 1) = 3 \cdot 15 = 45 \end{array}\right\}$ Coincide.

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{31}{6},\ x_2 = 4$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{5}{9}$. Multiplicamos la ecuación por $9x^2$:

$9x + 18 = 5x^2 \rightarrow 5x^2 - 9x - 18 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 360}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{441}}{10} = \frac{9 \pm 21}{10} = \begin{cases} \dfrac{30}{10} = 3 \\ -\dfrac{12}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = -\dfrac{6}{5} \rightarrow \dfrac{1}{-\dfrac{6}{5}} + \dfrac{2}{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^2} = -\dfrac{5}{6} + \dfrac{50}{36} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$ Solución válida.

Si $x = 3 \rightarrow \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{3+2}{9} = \dfrac{5}{9}$ Solución válida.

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{6}{5},\ x_2 = 3$

d) $\dfrac{2-x}{2}+\dfrac{4}{2+x}=1$. Multiplicamos la ecuación por $2(2+x)$:

$(2-x)(2+x)+4\cdot 2=2(2+x) \;\rightarrow\; 4-x^2+8=4+2x \;\rightarrow\; x^2+2x-8=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\dfrac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}2\\-4\end{cases}$

Comprobación: Si $x=-4 \rightarrow \dfrac{6}{2}+\dfrac{4}{-2}=3-2=1$ Solución válida.

Si $x=2 \rightarrow \dfrac{0}{2}+\dfrac{4}{4}=0+1=1$ Solución válida.

Soluciones: $x_1=-4,\ x_2=2$

19. **Resuelve.**

a) $x-\sqrt{x}=2$

b) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

c) $x-\sqrt{169-x^2}=17$

d) $x+\sqrt{5x+10}=8$

e) $\sqrt{2x^2+7}=\sqrt{5-4x}$

f) $\sqrt{x+2}+3=x-1$

a) $(x-2)=\sqrt{x} \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2-4x+4=x \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=1\end{cases}$

Comprobación:

$\left.\begin{array}{l}x_1=4 \rightarrow 4-\sqrt{4}=2\\ x_2=1 \rightarrow 1-\sqrt{1}=0\neq 2\end{array}\right\}$ Solución: $x=4$

b) $(x-1)^2=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2-2x+1=25-x^2 \rightarrow 2x^2-2x-24=0 \rightarrow x^2-x-12=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=-3\end{cases}$

Comprobación:

$\left.\begin{array}{l}x_1=4 \rightarrow 4-\sqrt{25-16}=4-3=1\\ x_2=-3 \rightarrow -3-\sqrt{25-9}=-3-4=-7\neq 1\end{array}\right\}$ Solución: $x=4$

c) $(x-17)^2=\left(\sqrt{169-x^2}\right)^2 \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2+289-34x=169-x^2 \rightarrow 2x^2-34x+120=0 \rightarrow x^2-17x+60=0$

$x=\dfrac{17\pm\sqrt{289-240}}{2}=\dfrac{17\pm 7}{2}=\begin{cases}x_1=12\\x_2=5\end{cases}$

Comprobación:

$\left.\begin{array}{l}x_1=12 \rightarrow 12-\sqrt{169-144}=12-5=7\neq 17\\ x_2=5 \rightarrow 5-\sqrt{169-25}=5-12=-7\neq 17\end{array}\right\}$ No tiene solución.

d) $\left(\sqrt{5x+10}\right)^2 = (8-x)^2 \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$5x + 10 = 64 + x^2 - 16x \rightarrow x^2 - 21x + 54 = 0$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441-216}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} = \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 18 \rightarrow 18 + \sqrt{5 \cdot 18 + 10} = 28 \neq 8 \\ x_2 = 3 \rightarrow 3 + \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 3 + 5 = 8 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 3$$

e) Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos: $2x^2 + 7 = 5 - 4x$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Comprobación: Si $x = -1 \rightarrow \sqrt{2 \cdot (-1)^2 + 7} = \sqrt{5 - 4 \cdot (-1)} \rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{9}$ Solución válida.

Solución: $x = -1$

f) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x + 2 = (x-4)^2 \rightarrow x + 2 = x^2 + 8x + 16 \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 7 \rightarrow \sqrt{7+2} + 3 = 6 = 7 - 1 \\ x_2 = 2 \rightarrow \sqrt{2+2} + 3 = 5 \neq 2 - 1 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 7$$

20. **Busca una solución en cada caso:**

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{5}{\sqrt{x+2}}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3\sqrt{x-1}}$

d) $\dfrac{6}{\sqrt{x-2}} - 1 = \dfrac{x-22}{\sqrt{x-2}}$

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{6}{\sqrt{x}} \rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \dfrac{6}{\sqrt{x}} = 1 \rightarrow \dfrac{x-6}{\sqrt{x}} = 1 \rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow (x-6)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 36 - 12x = x \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{13+5}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \\[2mm] \dfrac{13-5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Comprobación:

- Si $x = 9$

  $\dfrac{9}{\sqrt{9}} - 1 = \dfrac{6}{\sqrt{9}}$

  $\dfrac{9}{3} - 1 = \dfrac{6}{3}$

  $3 - 1 = 2$ (Sí es solución)

- Si $x = 4$

  $\dfrac{4}{\sqrt{4}} - 1 = \dfrac{6}{\sqrt{4}}$

  $\dfrac{4}{2} - 1 = \dfrac{6}{2}$

  $2 - 1 \neq 3$ (No es solución)

Solución: $x = 9$

b) $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{5}{\sqrt{x} + 2} \to \left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right) = 5 \to x - 4 = 5 \to x = 9$

Comprobación: $\sqrt{9} - 2 = \dfrac{5}{\sqrt{9} + 2}$ (Sí es válido) $\to$ Solución: $x = 9$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3\sqrt{x-1}} \to \dfrac{6 + \sqrt{x-1}}{3\sqrt{x-1}} = \dfrac{8}{3\sqrt{x-1}} \to 6 + \sqrt{x-1} = 8 \to$

$\to \sqrt{x-1} = 8 - 6 \to \sqrt{x-1} = 2 \to \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 2^2 \to x - 1 = 4 \to x = 5$

Comprobación:

$\dfrac{2}{\sqrt{5-1}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3\sqrt{5-1}} \to \dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3 \cdot 2} \to \dfrac{6+2}{6} = \dfrac{8}{6}$ (Sí es válido)

Solución: $x = 5$

d) $\dfrac{6}{\sqrt{x} - 2} - 1 = \dfrac{x - 22}{\sqrt{x} - 2} \to \left(\sqrt{x} - 2\right)\left[\dfrac{6}{\sqrt{x} - 2} - 1\right] = \left(\sqrt{x} - 2\right)\left[\dfrac{x - 22}{\sqrt{x} - 2}\right] \to$

$\to 6 - 1\left(\sqrt{x} - 2\right) = x - 22 \to 6 - \sqrt{x} + 2 = x - 22 \to 8 - x + 22 = \sqrt{x} \to$

$\to 30 - x = \sqrt{x} \to (30 - x)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \to 900 + x^2 - 60x = x \to x^2 - 61x + 900 = 0$

$$x = \frac{-(-61) \pm \sqrt{(-61)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 900}}{2 \cdot 1} = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{2} = \frac{61 \pm 11}{2} = \begin{cases} \dfrac{61 + 11}{2} = \dfrac{72}{2} = 36 \\[2mm] \dfrac{61 - 11}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

Comprobación:

- Si $x = 36$

  $\dfrac{6}{\sqrt{36} - 2} - 1 = \dfrac{36 - 22}{\sqrt{36} - 2}$

  $\dfrac{6}{6 - 2} - 1 = \dfrac{14}{6 - 2}$

  $\dfrac{6}{4} - 1 = \dfrac{14}{4}$

  $\dfrac{3}{2} - 1 \neq \dfrac{7}{2}$ (No es solución)

- Si $x = 25$

  $\dfrac{6}{\sqrt{25} - 2} - 1 = \dfrac{25 - 22}{\sqrt{25} - 2}$

  $\dfrac{6}{5 - 2} - 1 = \dfrac{3}{5 - 2}$

  $2 - 1 = \dfrac{3}{3}$ (Sí es solución)

Solución: $x = 25$

Aplica lo aprendido

21. **Traduce a lenguaje algebraico y resuelve.**

a) El triple de un número menos 18 unidades es igual que su mitad más 7. ¿Qué número es?

b) El cuadrado de un número es igual que su doble más 15. ¿De qué número se trata?

a) $3x - 18 = \dfrac{x}{2} + 7 \to 2[3x - 18] = 2\left[\dfrac{x}{2} + 7\right] \to 6x - 36 = x + 14 \to$

$\to 6x - x = 14 + 36 \to 5x = 50 \to x = \dfrac{50}{5} = 10$

Solución: el número buscado es 10.

b) $x^2 = 2x + 15 \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \dfrac{2-8}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Solución: hay dos soluciones posibles. Los números buscados son 5 y –3.

22. **Reflexiona y busca todas las soluciones.**

a) ¿Qué número natural multiplicado por su siguiente da 182?

b) ¿Qué número entero multiplicado por su siguiente da 182?

c) La suma de tres números pares consecutivos es 102. ¿Cuáles son esos números?

a) $x(x + 1) = 182 \rightarrow x^2 + x - 182 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-182)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-1 \pm 27}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+27}{2} = 13 \\ \dfrac{-1-27}{2} = -14 \ \text{ No es válido.} \end{cases}$$

El número natural buscado es 13.

b) Hay dos soluciones posibles: 13 y –14. (Ver ecuación resuelta en el apartado anterior).

c) $2x$ = primer número par

$2x + 2$ = siguiente número par a $2x$

$2x + 4$ = siguiente número par a $2x + 2$

$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 102 \rightarrow 6x = 102 - 2 - 4 \rightarrow 6x = 96 \rightarrow x = \frac{96}{6} = 16$

Los números buscados son 16, 18 y 20.

23. **Observa la tabla:**

ECUACIÓN	SOLUCIONES
$x(x - 1) = 42$	7 y (–6)
$2x(2x - 2) = 24$	
$3x(3x + 3) = 54$	

La primera ecuación resuelve el problema: "¿Qué número multiplicado por su anterior da 42?".

Escribe un enunciado para cada una de las otras dos ecuaciones y resuélvelas.

Posibles enunciados:

2ª ec.: El producto de un número par y el anterior número par es 24. Halla los números.

3ª ec.: El producto de un múltiplo de 3 y el siguiente múltiplo de 3 es 54. Halla los números.

2ª ec.: $2x(2x - 2) = 24 \rightarrow 4x^2 - 4x - 24 = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \ \text{ (esta solución no es válida)} \end{cases}$$

Los números son 4 y 6.

3ª ec.: $3x(3x + 3) = 54 \rightarrow 9x^2 + 9x - 54 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \ \text{(esta solución no es válida)} \end{cases}$$

Los números son 6 y 9.

24. **La suma de dos números consecutivos es menor que 27. ¿Cuáles pueden ser esos números si sabemos que son de dos cifras?**

$x + x + 1 < 27 \rightarrow 2x < 26 \rightarrow x < 13$ y además $x > 9$

Los números pueden ser 10 y 11, 11 y 12 o 12 y 13.

25. **Calcula la edad de Alberto sabiendo que dentro de 22 años tendrá el triple de su edad actual.**

x = "Edad actual de Alberto"

Dentro de 22 años tendrá $x + 22$ años.

$$\underbrace{\text{Edad dentro de 22 años}}_{x + 22} = 3 \cdot \underbrace{\text{Edad actual}}_{x} \rightarrow x + 22 = 3x \rightarrow 22 = 2x \rightarrow x = 11$$

Alberto tiene 11 años.

26. **Una tostada cuesta el doble que un café. Por tres cafés y dos tostadas hemos pagado 9,80 €. ¿Cuánto cuesta el café y cuánto la tostada?**

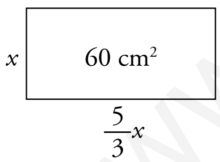
$x \rightarrow$ precio de un café

$2x \rightarrow$ precio de una tostada

$3x + 2 \cdot 2x = 9{,}80 \rightarrow 3x + 4x = 9{,}80 \rightarrow 7x = 9{,}80 \rightarrow x = \dfrac{9{,}80}{7} = 1{,}40$

Un café cuesta 1,40 €, y una tostada, 2,80 €.

27. **El área de una lámina rectangular de bronce es de 60 cm^2 y su base mide 5/3 de su altura. Halla las dimensiones de la lámina.**



Área del rectángulo: $\dfrac{5}{3}x \cdot x = \dfrac{5}{3}x^2$

La ecuación que hay que resolver es: $\dfrac{5}{3}x^2 = 60 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6$ (la solución negativa $x = -6$ no es válida, por ser x una longitud).

$\dfrac{5}{3}x = \dfrac{5}{3} \cdot 6 = 10$

Las dimensiones de la lámina son: altura 6 cm y base 10 cm.

28. **Una persona compra un reproductor de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,50 €. Con el reproductor de música perdió el 10 % de su valor, y con el ordenador, el 15 %. ¿Cuánto le costó cada uno?**

Llamamos x = precio de compra del equipo de música.

El ordenador costó, pues, $2\,500 - x$.

Con el equipo de música perdió un 10 % $\rightarrow$ el precio de venta fue el 90 % de $x = 0{,}9x$.

Con el ordenador perdió un 15 % $\rightarrow$ el precio de venta fue $0{,}85(2\,500 - x)$.

La ecuación que hay que resolver es:

$0{,}9x + 0{,}85(2\,500 - x) = 2\,157{,}50$ € $\rightarrow$ $0{,}9x + 2\,125 - 0{,}85x = 2\,157{,}50$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $0{,}05x = 32{,}50$ $\rightarrow$ $x = 650$

El equipo de música costó 650 €, y el ordenador, $2\,500 - 650 = 1\,850$ €.

Página 102

29. **En una papelería, el precio de una copia en color es 0,75 € y el de una en blanco y negro es 0,20 €. En una semana, el número de copias en color fue la décima parte que en blanco y negro y se recaudaron 110 €. Calcula cuántas copias se hicieron de cada tipo.**

$$\left.\begin{array}{l} 0,75x + 0,20y = 110 \\ x = \dfrac{1}{10}y \end{array}\right\} \; 0,75 \cdot \frac{1}{10}y + 0,20y = 110 \;\to\; y = 400;\; x = 40$$

Se hicieron 400 copias en blanco y negro y 40 en color.

30. **Se mezclan 8 *l* de aceite de 4 €/*l* con otro más barato para obtener 20 *l* a 2,50 €/*l*. ¿Cuál es el precio del aceite barato?**

Se mezclaron 20 – 8 = 12 litros de aceite barato.

$$\frac{8 \cdot 4 + 12 \cdot x}{20} = 2,5 \;\to\; 12x = 18 \;\to\; x = 1,5$$

El precio del aceite barato era de 1,50 €/*l*.

Resuelve problemas

31. **Hoy, la edad de Alberto cuadruplica la de su hija Marta, pero dentro de cinco años solo la triplicará. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

	HOY	DENTRO DE 5 AÑOS
MARTA	x	$x + 5$
ALBERTO	$4x$	$4x + 5$

$x \to$ edad de Marta hoy

$4x \to$ edad de Alberto hoy

$4x + 5 = 3 \cdot (x + 5) \;\to\; 4x + 5 = 3x + 15 \;\to\; x = 10$

Marta tiene 10 años, y Alberto, 40 años.

32. **Tengo 3 600 euros en el banco, repartidos en dos cuentas. Si hiciera una transferencia de la que más tiene a la que menos tiene, la primera aún seguiría teniendo el doble. ¿Cuánto hay en cada cuenta?**

x = Dinero que tengo en la cuenta A.

$3\,600 - x$ = Dinero que tengo en la cuenta B.

y = Dinero que transfiero.

$x - y = 2 \cdot (3\,600 - x + y) \;\to\; x - y = 7\,200 - 2x + 2y \;\to\; 3x - 3y = 7\,200 \;\to$

$\to\; x - y = 2\,400$

$x = 2\,400 + y \;\to\;$ En la cuenta A tengo más de 2 400 €.

$3\,600 - y - 2\,400 = 1\,200 - y \;\to\;$ En la cuenta B tengo menos de 1 200 €.

Por ejemplo:

Pueden haberse transferido 1 000 €, en cuyo caso, en A había 3 400 €, y en B, 200 €.

Pueden haberse transferido 400 € y, en este caso, en A había 2 800 €, y en B, 800 €.

33. **Problema resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

34. **Un granjero quiere vender una partida de botellas de leche a 0,50 € la botella. Se le rompen 60 botellas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,05 € el precio de cada botella. ¿Cuántas botellas tenía? ¿Cuánto dinero pretende ganar?**

Llamamos x = n.º de botellas de leche con las que salió de la granja.

x botellas a 0,50 € cada una $\rightarrow$ $0{,}50x$ es el dinero obtenido.

Se rompen 60 botellas. Le quedan para vender $x - 60$ a $0{,}50 + 0{,}05 = 0{,}55$ € cada una $\rightarrow$
$\rightarrow$ $0{,}55(x - 60)$ es el dinero obtenido.

El dinero conseguido vendiendo x o $x - 60$ botellas es el mismo.

$0{,}50x = 0{,}55(x - 60) \rightarrow 0{,}50x = 0{,}55x - 33 \rightarrow 33 = 0{,}55x - 0{,}50x \rightarrow$

$\rightarrow 33 = 0{,}05x \rightarrow x = 660$

Salió de la granja con 660 botellas y pretende ganar $0{,}50 \cdot 660 = 330$ €.

35. **Un grupo de estudiantes alquila un piso por 700 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 40 € menos. ¿Cuántos son?**

Si hubiese x estudiantes, cada uno pagaría $\frac{700}{x}$.

Si hubiese $x + 2$ estudiantes, cada uno pagaría 40 € menos $\rightarrow \frac{700}{x} - 40$

$(x + 2)\left(\frac{700}{x} - 40\right) = 700 \rightarrow 700 - 40x + \frac{1400}{x} - 80 = 700 \rightarrow$

$\rightarrow -40x^2 - 80x + 1400 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \quad \text{No válida.} \end{cases}$

Han alquilado el piso 5 estudiantes.

36. **Un tipo de aceite de 3,20 €/*l* se obtiene mezclando un 60 % de aceite virgen de 4 €/*l* y el resto con otro más barato. ¿Cuál es el precio de ese otro?**

Precio aceite barato $\rightarrow x$

$0{,}6 \cdot 4 + 0{,}4 \cdot x = 3{,}2 \rightarrow 2{,}4 + 0{,}4x = 3{,}2 \rightarrow x = 2$

El precio del aceite barato es de 2 €/*l*.

37. **El gerente de cierto negocio familiar, al cerrar el balance del mes, hace cuentas y concluye: si durante el próximo trimestre consiguiera, cada mes, un aumento progresivo del 10 % respecto al mes anterior, obtendría unos beneficios de 7 289 €. ¿Cuánto ha ganado este mes?**

x = beneficio de este mes.

110 % de [110 % de (110 % de x)] = 7 289

$1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot x = 7289 \rightarrow 1{,}331x = 7289 \rightarrow x = \frac{7289}{1{,}331} \approx 5476{,}34$

Este mes ha ganado 5 476,34 €.

38. **Problema resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

39. **Un profesor de lengua calcula la nota final de sus estudiantes mediante un examen escrito, que es el 75 % de la nota final, y otro de expresión oral, que es el 25 %. Ana obtiene en el segundo un 6.**

¿Qué tiene que sacar en el escrito para obtener como nota final al menos un notable (a partir de 7)?

Llamamos x = nota obtenida en el examen escrito.

$$\text{Nota final} = 75\,\%\ \underbrace{\text{ESCRITO}}_{x} + 25\,\%\ \underbrace{\text{LECTURA}}_{6} \to 0{,}75x + 0{,}25 \cdot 6 \geq 7$$

$0{,}75x + 1{,}5 \geq 7 \to 0{,}75x \geq 5{,}5 \to x \geq 7{,}33$

En el examen escrito tiene que sacar al menos un 7,33.

40. **Algunos de los miembros de un equipo de atletismo deciden regalar a su entrenador un cronómetro que cuesta 150 €. Al conocer la idea, se apuntan cinco atletas más, con lo que a cada uno le toca pagar 5 € menos. ¿Cuántos participan finalmente en la compra del regalo?**

x = número de atletas originales $\qquad x + 5$ = número de atletas finales

y = dinero que iba a poner cada uno $\qquad y - 5$ = dinero que pone cada uno al final

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 150 \\ (x+5)(y-5) = 150 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{150}{y} \\ \left(\dfrac{150}{y} + 5\right)(y-5) = 150 \end{array}\right\}$$

$$(150 + 5y)(y - 5) = 150y \to 150y + 5y^2 - 750 - 25y = 150y \to 5y^2 - 25y - 750 = 0 \to$$

$$\to y^2 - 5y - 150 = 0 \to y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 600}}{2} = \frac{5 \pm 25}{2}$$

De las dos soluciones que se obtienen para y, solo es válida la positiva, $y = 15$. Para este valor, se obtiene $x = 10$.

En el regalo participan $10 + 5 = 15$ atletas y cada uno pone $15 - 5 = 10$ €.

Página 103

41. **Un vendedor del mercadillo lleva un cierto número de relojes, por los que piensa sacar 200 €, pero comprueba que dos de ellos están deteriorados. Aumentando el precio de los restantes en 5 €, consigue recaudar la misma cantidad. ¿Cuántos relojes lleva?**

x = número de relojes que lleva el vendedor

$\frac{200}{x}$ = dinero por el que vende, inicialmente, cada reloj

$$(x-2)\left(\frac{200}{x}+5\right) = 200 \;\rightarrow\; (x-2)(200+5x) = 200x \;\rightarrow\; 200x + 5x^2 - 400 - 10x = 200x \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 5x^2 - 10x - 400 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 80 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2}$$

De las dos soluciones que se obtienen, 10 y –8, solo es válida la positiva.

El vendedor llevaba 10 relojes.

42. **En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto mide 5 cm menos que esta. Halla su perímetro.**

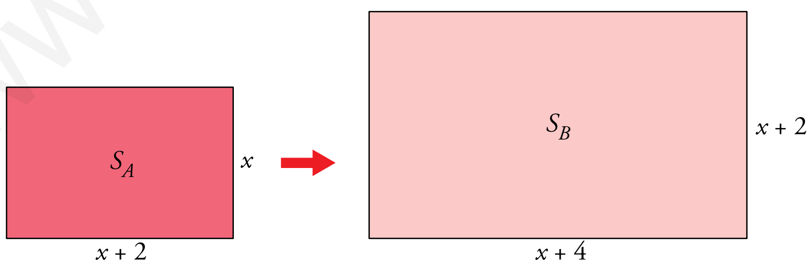
$$x^2 = \left(\frac{3}{5}x\right)^2 + (x-5)^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{9}{25}x^2 + x^2 + 25 - 10x \;\rightarrow\; 9x^2 - 250x + 625 = 0$$

$$x = \frac{250 \pm \sqrt{62\,500 - 22\,500}}{18} = \frac{250 \pm 200}{18} = \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = \frac{50}{18} = \frac{25}{9} < 5 \end{cases}$$

Para que la longitud de los lados sea positiva, se ha de tener $x > 5$, luego la solución es $x = 25$.

$$\text{Perímetro} = \frac{3}{5} \cdot 25 + 25 - 5 + 25 = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$

43. **La base de un rectángulo es 2 cm mayor que la altura, y si se hace 2 cm más largo y otros 2 cm más ancho, se dobla su superficie. ¿Cuáles son las dimensiones de ese rectángulo?**



$S_B = 2 \cdot S_A$

$$(x+4)(x+2) = 2x(x+2) \;\rightarrow\; x^2 + 6x + 8 = 2x^2 + 4x \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 8 = 0$$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$. De las dos soluciones, 4 y –2, solo es válida la positiva.

El rectángulo inicial tiene 4 m de altura y 6 m de base.

Problemas "+"

44. **Un pilón de riego se abastece mediante dos bombas que extraen el agua de sendos pozos. La primera, actuando sola, tarda cinco horas en llenar el pilón, y conectadas ambas a la vez, el pilón se llena en tan solo dos horas. ¿Cuánto tarda la segunda bomba actuando en solitario?**

Llamamos x a las horas que tarda la 2.ª bomba.

— La 1.ª bomba, en una hora, llena 1/5 del pilón.

— La 2.ª bomba, en una hora, llena 1/x del pilón.

— Las dos juntas, en una hora, llenan 1/2 del pilón.

x = número de horas que tarda la segunda bomba en llenar el pilón.

En una hora, la primera bomba llena 1/5 del pilón, y la segunda, $1/x$.

Actuando juntas, en una hora llenan 1/2 del pilón. Por tanto:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \;\to\; 2x+10=5x \;\to\; 3x=10 \;\to\; x=\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$$

La segunda bomba tarda en llenar el pilón $\left(3+\frac{1}{3}\right)$ h = 3 h 20 min.

45. **Una persona tarda 4 horas más que otra en hacer un trabajo. Si lo hacen entre las dos, tardan una hora y media en acabarlo. ¿Cuánto tarda cada una por separado?**

En una hora, la primera persona hace $\frac{1}{x+4}$ del trabajo, y la otra, $\frac{1}{x}$ del trabajo (suponiendo que la segunda hace el trabajo en x horas). Juntas, en una hora, hacen $\frac{1}{1,5}$ del trabajo. Por tanto:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{1,5} \;\to\; \frac{x+4+x}{x(x+4)}=\frac{1}{1,5} \;\to\; 3x+6=x^2+4x \;\to\; x^2+x-6=0 \;\to$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}= \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

La única solución válida es $x_1 = 2$

La primera persona tarda 6 horas en hacer el trabajo, y la segunda, 2 horas.

46. **Un camión ha salido de A hacia B a la vez que una furgoneta sale de B hacia A. Han tardado en cruzarse una hora y 12 minutos (6/5 de hora) y ambos vehículos han marchado a una velocidad constante. ¿Cuánto tiempo ha invertido cada vehículo en su recorrido sabiendo que el camión ha tardado una hora más que la furgoneta?**

x = Tiempo que tarda la furgoneta en ir de B hasta A (horas).

En una hora, la furgoneta recorre $\frac{1}{x}$ de esa distancia.

$(x+1)$ = Tiempo que tarda el camión de ir de A hasta B (horas).

En una hora, el camión recorre $\frac{1}{x+1}$ de esa distancia.

La fracción de la distancia AB que recorren entre los dos en una hora es $\frac{1}{6/5} = \frac{5}{6}$.

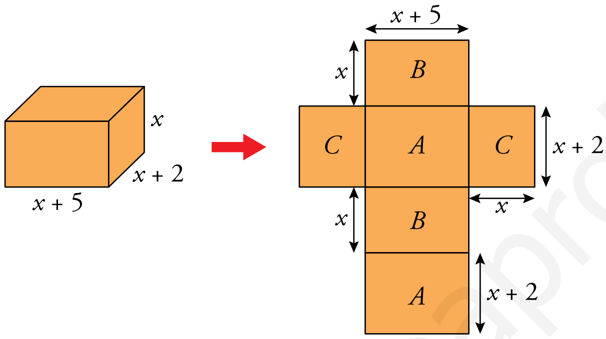
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{5}{6} \rightarrow 6(2x+1) = 5x^2 + 5x \rightarrow 5x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+120}}{10} = \frac{7 \pm 13}{10}$$

De las dos soluciones que se obtienen, 2 y $-6/10$, solo es válida la solución positiva.

La furgoneta ha tardado 2 horas en recorrer la distancia que hay de A a B, y el camión, 3 horas.

47. Una caja de embalaje es 2 cm más ancha que alta y 3 cm más larga que ancha. En su construcción se han empleado 900 cm² de plancha de cartón, de los que el 20 % se usa para las solapas. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?



$$2(x+5)(x+2) + 2(x+2)x + 2x(x+5) = 80\,\% \text{ de } 900 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x^2 + 2x + 5x + 10) + 2x^2 + 4x + 2x^2 + 10x = 0{,}8 \cdot 900 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 4x + 10x + 20 + 4x^2 + 14x = 720 \rightarrow 6x^2 + 28x - 700 = 0 \rightarrow 3x^2 + 14x - 350 = 0$$

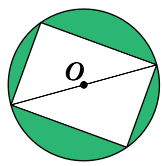
$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-350)}}{2 \cdot 3} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 4\,200}}{6} =$$

$$= \frac{-14 \pm 66{,}3}{6} = \begin{cases} \frac{-14+66{,}3}{6} = \frac{52{,}3}{6} \approx 8{,}71 \text{ cm} \\ \frac{-14-66{,}3}{6} \rightarrow \text{No vale por ser negativa.} \end{cases}$$

Las dimensiones de la caja son: 8,71 cm de alto; 10,71 cm de ancho y 13,71 cm de largo.

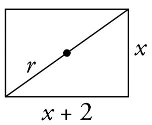
48. En un terreno circular se quiere construir un polideportivo rectangular de 2 600 m² de área y en el que uno de los lados mida 2 m más que el otro.

¿Cuál es la superficie de la zona que quedará sin edificar?



La zona rectangular tiene dimensiones x y $x + 2$.

El radio del círculo es la mitad de la longitud de la diagonal del rectángulo:

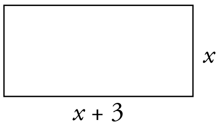


$$r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + (x+2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{SIN EDIFICAR}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2) - 2\,600 \\ A_{\text{RECTÁNGULO}} = x(x+2) = x^2 + 2x = 2\,600 \end{array}\right\} A_{\text{SIN EDIFICAR}} = \pi \cdot \frac{1}{2}(2\,600 + 2) - 2\,600 =$$

$$= 1\,301\pi - 2\,600 \approx 1\,487 \text{ m}^2$$

49. **En un rectángulo en el que la base mide 3 cm más que la altura, el perímetro es mayor que 50 pero no llega a 54. ¿Qué puedes decir de la medida de la base?**



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2x + 6 > 50 \\ 2x + 2x + 6 < 54 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4x > 44 \;\to\; x > 11 \;\to\; x + 3 > 14 \\ 4x < 48 \;\to\; x < 12 \;\to\; x + 3 < 15 \end{array}$$

La base mide entre 14 y 15 cm, sin incluir ninguna de estas dos medidas. Por tanto, no puede medir un número natural.

Curiosidades matemáticas

Sabías que…

Ecuación viene del término latino *aequatio*, que, a su vez, se deriva de *aequare* (igualar) o *aequus* (igual).

Aquí tienes otras palabras del castellano con la misma raíz:

ECUADOR: Circunferencia máxima a *igual* distancia de los polos.

EQUILÁTERO: Con los lados *iguales*.

EQUIDISTANTE: Que está a *igual* distancia.

ECUANIMIDAD: *Igualdad* o constancia de ánimo.

EQUIVALENTES: Que tienen *igual* valor.

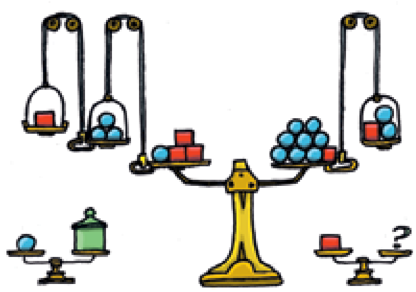
- **Busca otras cuatro palabras que tengan la misma raíz que *ecuación*.**

Ejemplos de palabras con la misma raíz:

Adecuado, equilibrio, igual, equinocio, equiparar, equivocación, equidiferente, ecualizador.

En equilibrio

Observa la balanza. Si cada bola pesa un gramo, ¿cuánto pesa cada caja?



Llamamos x al peso de una caja.

Nos queda la siguiente ecuación:

$$3x + 1 - (3 - x) = 8 + x - (2 + x) \;\to\; 3x + 1 - 3 + x = 8 + x - 2 - x \;\to\; 4x - 2 = 6 \;\to$$
$$\to\; 4x = 8 \;\to\; x = 2$$

Cada caja pesa 2 gramos.

Ingéniatelas como puedas

Encuentra una solución a esta ecuación:

$$7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=8$$

$$7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=8 \rightarrow \sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=8-7 \rightarrow \sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=1$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}=1 \rightarrow \sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}=0$$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$$5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}=0 \rightarrow \sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}=5$$

Elevamos al cuadrado nuevamente:

$$30-\sqrt{13+\sqrt{x}}=25 \rightarrow \sqrt{13+\sqrt{x}}=5$$

Elevamos al cuadrado:

$$13+\sqrt{x}=25 \rightarrow \sqrt{x}=12 \rightarrow x=144$$

Comprobamos:

$$7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{144}}}}}=7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+12}}}}=$$

$$=7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{25}}}}=7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-5}}}=$$

$$=7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{25}}}=7+\sqrt{1+\sqrt{5-5}}=7+\sqrt{1+0}=7+1=8$$

1 Ecuaciones lineales con dos incógnitas

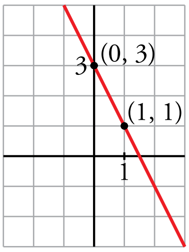
Página 105

1. Obtén dos soluciones de cada ecuación y representa las rectas correspondientes.

a) $2x + y = 3$ **b)** $x + y = 4$

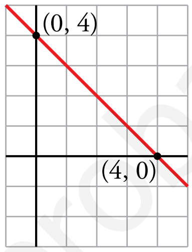
a) $2x + y = 3$

Dos soluciones son (0, 3) y (1, 1).



b) $x + y = 4$

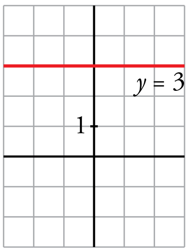
(0, 4) y (4, 0) son soluciones de la ecuación.



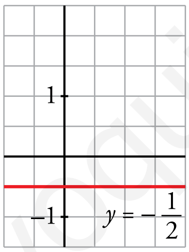
2. Representa gráficamente.

a) $y = 3$ **b)** $y = -\frac{1}{2}$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = \frac{3}{2}$

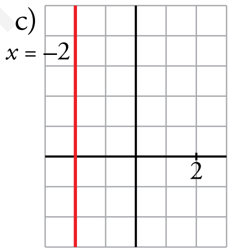
a)



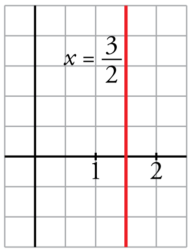
b)



c)



d)



2 Sistemas de ecuaciones lineales

Página 106

1. Representa las rectas en cada caso y di si el sistema tiene una solución, si es indeterminado (tiene infinitas) o si es incompatible (no tiene solución). En el caso de que tenga solución, di cuál es:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

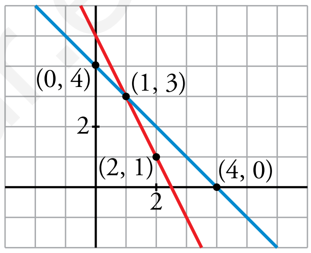
a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$

$2x + y = 5$

x	y
2	1
1	3

$x + y = 4$

x	y
0	4
4	0

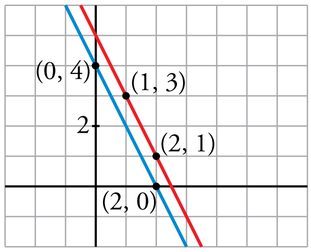


El sistema tiene una solución, $x = 1$, $y = 3$, punto de corte de ambas rectas.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

$4x + 2y = 8$

x	y
0	4
2	0

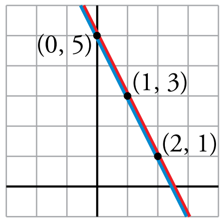


Las dos rectas son paralelas. El sistema no tiene solución.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{array}\right\}$ Antes de representarlas observamos que la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2.

$4x + 2y = 10$

x	y
0	5
2	1



Se trata de la misma recta. El sistema tiene infinitas soluciones.

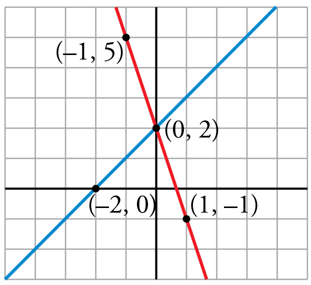
d) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{array}\right\}$

$-x + y = 2$

x	y
0	2
–2	0

$3x + y = 2$

x	y
1	–1
–1	5



Las dos rectas se cortan en el punto (0, 2).

El sistema tiene una solución: $x = 0$, $y = 2$.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones

Página 108

1. Resuelve por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 4x + \ \ y = 9 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 4y = \ \ 1 \\ \ \ x + 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = \ \ 9 \\ 3x - \ \ y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y + 2 = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + \ \ y = 9 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 9 - 4x$

$\left.\begin{array}{l} 3x + 2(9 - 4x) = 8 \ \rightarrow \ 3x + 18 - 8x = 8 \ \rightarrow \ x = 2 \\ y = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 2, \ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} -x + 4y = \ \ 1 \\ \ \ x + 2y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $x = 4y - 1$

$\left.\begin{array}{l} 4y - 1 + 2y = -1 \ \rightarrow \ 6y = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \\ x = 4 \cdot 0 - 1 = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = -1, \ y = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = \ \ 9 \\ 3x - \ \ y = 10 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y = 3x - 10$

$\left.\begin{array}{l} 2x - 3(3x - 10) = 9 \ \rightarrow \ 2x - 9x + 30 = 9 \ \rightarrow \ x = 3 \\ y = 3 \cdot 3 - 10 = 9 - 10 = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 3, \ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} y + 2 = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la 1.ª ecuación, $y = 5 - 2 = 3$.
Sustituimos en la 2.ª ecuación: $3x + 4 \cdot 3 = 0 \ \rightarrow \ 3x = -12 \ \rightarrow \ x = -4$

Solución: $x = -4, \ y = 3$

2. Resuelve aplicando el método de igualación.

a) $\begin{cases} x + 5y = \ \ 4 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x + 1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = \ \ 3 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 5y = \ \ 4 \\ x - 3y = -4 \end{array}\right\}$ Despejamos x de ambas ecuaciones e igualamos:

$\left.\begin{array}{l} x = \ \ 4 - 5y \\ x = -4 + 3y \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 4 - 5y = -4 + 3y \ \rightarrow \ 8 = 8y \ \rightarrow \ y = 1 \\ \text{Luego } \ x = 4 - 5 \cdot 1 = 4 - 5 = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = -1, \ y = 1$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ Despejamos y de la segunda ecuación y la igualamos con la primera:

$y = 4 - 2x$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x+1}{2} = 4 - 2x \;\to\; 3x + 1 = 8 - 4x \;\to\; 7x = 7 \;\to\; x = 1 \\ y = 4 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 1,\; y = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} 5x + y = 3 \\ 2x - y = -3 \end{array}\right\}$ Despejamos y de ambas ecuaciones e igualamos:

$\left.\begin{array}{l} y = 3 - 5x \\ y = 2x + 3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3 - 5x = 2x + 3 \;\to\; -7x = 0 \;\to\; x = 0 \\ y = 3 - 5 \cdot 0 = 3 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 0,\; y = 3$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3-3y}{4} \\ x = \dfrac{3-6y}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{3-3y}{4} = \dfrac{3-6y}{2} \;\to\; 3 - 3y = 6 - 12y \;\to\; 9y = 3 \;\to\; y = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{3 - 3 \cdot (1/3)}{4} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

Solución: $x = \dfrac{1}{2},\; y = \dfrac{1}{3}$

3. Resuelve por reducción.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos el valor de x:

$\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \;\to\; x = 3 \\ 3 + y = 4 \;\to\; y = 1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 3,\; y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos el valor de x:

$\left.\begin{array}{l} 9x = 18 \;\to\; x = 2 \\ 4 \cdot 2 + 3y = 5 \;\to\; 8 + 3y = 5 \;\to\; 3y = -3 \;\to\; y = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 2,\; y = -1$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{array}\right\}$ Multiplicamos la primera ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{l} 4x - 6y = 22 \\ 5x + 6y = 14 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9x \qquad = 36 \;\rightarrow\; x = 4 \\ 2 \cdot 4 - 3y = 11 \;\rightarrow\; 8 - 3y = 11 \;\rightarrow\; -3 = 3y \;\rightarrow\; y = -1 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 4,\; y = -1$$

d) $\left.\begin{array}{r} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{array}\right\}$ Multiplicamos la primera ecuación por 5, la segunda por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{l} 35x + 10y = 125 \\ \;\;6x - 10y = -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 41x \qquad = 123 \;\rightarrow\; x = \dfrac{123}{41} = 3 \\ 7 \cdot 3 + 2y = 25 \;\rightarrow\; 2y = 4 \;\rightarrow\; y = 2 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 3,\; y = 2$$

4. Representa gráficamente cada par de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 4} \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - 3y = 13} \\ \mathbf{3x - 5y = 21} \end{array}\right.$

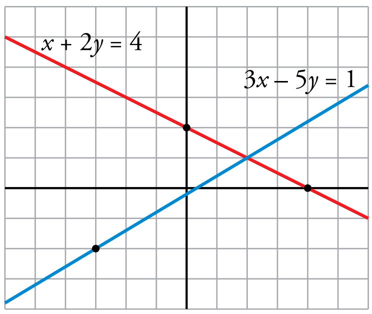
Resuelve los sistemas por alguno de los métodos algebraicos que conoces y comprueba que la solución coincide con el punto de corte del par de rectas.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$ Aplicamos el método de sustitución: $\rightarrow\; x = 4 - 2y$

$3(4 - 2y) - 5y = 1 \;\rightarrow\; 12 - 6y - 5y = 1 \;\rightarrow\; -11y = -11 \;\rightarrow\; y = 1$

Si $y = 1 \;\rightarrow\; x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

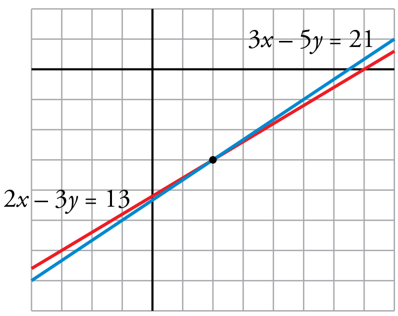
Solución: $x = 2,\; y = 1$



b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 5y = 21 \end{array}\right\}$ Aplicamos reducción: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 5y = 21 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot (-2)} \end{array} \begin{array}{r} 6x - 9y = 39 \\ -6x + 10y = -42 \\ \hline y = -3 \end{array}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 5y = 21 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 5} \\ \xrightarrow{\cdot (-3)} \end{array} \begin{array}{r} 10x - 15y = 65 \\ -9x + 15y = -63 \\ \hline x \qquad = 2 \end{array}$$

Solución: $x = 2,\; y = -3$



4 Sistemas de ecuaciones lineales más complejos

Página 109

1. Resuelve simplificando previamente.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 3 \\ \dfrac{x+y}{8} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5(y-1) = \dfrac{x-1}{2} \\ \dfrac{4(x+1)}{5} = 6y + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x - y + 3) - 3x = 0 \\ \dfrac{2(x+1)}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{2} = 2(x+y) + 3 \\ \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 3 \\ \dfrac{x+y}{8} = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \ 3x - 2y = 18 \\ \to \ x + y = 16 \end{array} \Bigg\}$ Método de sustitución: $\to \ x = 16 - y$

$3(16 - y) - 2y = 18 \ \to \ 48 - 3y - 2y = 18 \ \to \ -5y = -30 \ \to \ y = 6$

Si $y = 6 \ \to \ x = 16 - 6 = 10$

Solución: $x = 10, \ y = 6$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 5(y-1) = \dfrac{x-1}{2} \\ \dfrac{4(x+1)}{5} = 6y + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \ 2x + 10(y-1) = x - 1 \\ \to \ 4(x+1) = 5(6y+1) \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} \to \\ \to \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 2x + 10y - 10 = x - 1 \\ 4x + 4 = 30y + 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \ x + 10y = 9 \\ \to \ 4x - 30y = 1 \end{array} \Bigg\}$

Método de reducción:

$\left.\begin{array}{r} x + 10y = 9 \\ 4x - 30y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{array}{r} 3x + 30y = 27 \\ 4x - 30y = 1 \\ \hline 7x \qquad = 28 \end{array} \ \to \ x = 4$

$\left.\begin{array}{r} x + 10y = 9 \\ 4x - 30y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot (-4)} \begin{array}{r} -4x - 40y = -36 \\ 4x - 30y = 1 \\ \hline -70y = -35 \end{array} \ \to \ y = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = 4, \ y = \dfrac{1}{2}$

c) Simplificamos cada una de las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 2y + 6 - 3x = 0 \\ 4(x+1) - 3y = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x - 2y = -6 \\ 4x + 4 - 3y = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ 4x - 3y = 2 \end{array}\right\}$$

Despejamos x de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$x = 6 - 2y$

$$\left.\begin{array}{l} 4(6 - 2y) - 3y = 2 \;\rightarrow\; 24 - 8y - 3y = 2 \;\rightarrow\; -11y = -22 \;\rightarrow\; y = 2 \\ x = 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Solución:} \\ x = 2,\;\; y = 2 \end{array}$$

d) Simplificamos previamente cada una de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 9y = 12(x+y) + 18 \\ x - y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x - 9y = 12x + 12y + 18 \\ x - y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -8x - 21y = 18 \\ x - \;\;\, y = \;\;5 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 8 y sumamos:

$$\begin{array}{r} -8x - 21y = 18 \\ 8x - \;\;8y = 40 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -29y = 58 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-58}{29} \;\rightarrow\; y = -2 \\ x - (-2) = 5 \;\rightarrow\; x + 2 = 5 \;\rightarrow\; x = 3 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 3,\;\; y = -2$$

5 Sistemas no lineales

Página 110

1. Resuelve simplificando previamente.

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 7 = y^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{xy} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 15 \;\rightarrow\; x = 15 + y \\ x \cdot y = 100 \;\rightarrow\; (15 + y)y = 100 \;\rightarrow\; 15y + y^2 = 100 \;\rightarrow\; y^2 + 15y - 100 = 0 \end{cases}$

$$y = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} = \frac{-15 \pm 25}{2} = \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -20 \end{cases}$$

$y_1 = 5 \;\rightarrow\; x_1 = 20 \;\rightarrow$ Solución: $x_1 = 20,\ y_1 = 5$

$y_2 = -20 \;\rightarrow\; x_2 = -5 \;\rightarrow$ Solución: $x_2 = -5,\ y_2 = -20$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 2x - 2$

$x^2 + x(2x - 2) = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 2x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 \;\rightarrow\; y = -2 \\ \text{Si } x = \dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; y = 2 \cdot \dfrac{2}{3} - 2 = \dfrac{4}{3} - 2 = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\}$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 0,\ y_1 = -2 \\ x_2 = \dfrac{2}{3},\ y_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

Igualamos ambas ecuaciones y resolvemos la ecuación radical que nos queda:

$\sqrt{x+1} = 5 - x \;\rightarrow\; \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (5 - x)^2 \;\rightarrow\; x + 1 = 25 - 10x + x^2 \;\rightarrow\; x^2 - 11x + 24 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$$

Si $x = 8 \;\rightarrow\; y = 5 - 8 = -3$. Si $x = 3 \;\rightarrow\; y = 5 - 3 = 2$

Comprobación:

$x = 8,\ y = -3$ no verifica la primera ecuación: $\sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3; -3$. No es solución.

$x = 3,\ y = 2$ cumple ambas ecuaciones: $\sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2;\ 5 - 3 = 2$.

Solución: $x = 3,\ y = 2$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 = 3 + y^2$

$3 + y^2 + y^2 = 5 \rightarrow 2y^2 = 2 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

Si $y = 1 \rightarrow x^2 = 3 + 1^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $y = -1 \rightarrow x^2 = 3 + (-1)^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = -2,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = -1;\ x_4 = -2,\ y_4 = -1$

e) $\left.\begin{array}{l} x + 7 = y^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{xy} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y^2 - 7 \\ y + x = 5 \end{array}\right\} \rightarrow y + y^2 - 7 = 5$

$y^2 + y - 12 = 0$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1 + 7}{2} = 3 \\[2ex] \dfrac{-1 - 7}{2} = -4 \end{cases}$$

Si $y = 3 \rightarrow x = 3^2 - 7 = 2 \rightarrow x = 2$

Si $y = -4 \rightarrow x = (-4)^2 - 7 = 9 \rightarrow x = 9$

Comprobamos:

Si $x_1 = 2,\ y_1 = 3$

$\left.\begin{array}{l} 2 + 7 = 3^2 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{2 \cdot 3} \end{array}\right\}$ Sí

Si $x_2 = 9,\ y_2 = -4$

$\left.\begin{array}{l} 9 + 7 = (-4)^2 \\ \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{-4} = \dfrac{5}{9 \cdot (-4)} \end{array}\right\}$ Sí

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 9,\ y_2 = -4$

6 Resolución de problemas mediante sistemas

Página 111

1. La suma de dos números es 323, y su diferencia, 47. ¿Cuáles son esos números?

$x \rightarrow$ número mayor

$y \rightarrow$ número menor

$$\left.\begin{array}{l} x+y=323 \\ x-y=\ \ 47 \end{array}\right\} \text{ Sumando: } \begin{array}{r} x+y=323 \\ x-y=\ \ 47 \\ \hline 2x \quad =370 \end{array} \rightarrow x=\frac{370}{2}=185$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=323 \\ x-y=\ \ 47 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{array}{r} -x-y=-323 \\ x-y=\ \ 47 \\ \hline -2y=-276 \end{array} \rightarrow y=\frac{-276}{-2}=138$$

Los números buscados son 185 y 138.

2. Tres kilos de peras y dos de naranjas cuestan 6,70 €; un kilo de peras y cinco de naranjas cuestan 7 €. ¿A cómo está el kilo de peras? ¿Y el de naranjas?

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow \text{precio de un kilo de peras} \\ y \rightarrow \text{precio de un kilo de naranjas} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x+2y=6,70 \\ x+5y=7 \end{array}\right\}$$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$\left.\begin{array}{l} x=7-5y \\ 3(7-5y)+2y=6,70 \end{array}\right\} \rightarrow 21-15y+2y=6,70 \rightarrow -13y=-14,30 \rightarrow y=1,1$$

$x = 7 - 5 \cdot 1,1 = 7 - 5,5 = 1,5$

Solución: Un kilo de peras cuesta 1,50 €, y uno de naranjas, 1,10 €.

3. En un test de 50 preguntas se suman dos puntos por cada acierto y se resta medio punto por cada fallo. ¿Cuántos aciertos y cuántos fallos dan un resultado de 65 puntos?

x = número de aciertos

y = número de fallos

$$\left.\begin{array}{l} x+y=50 \\ 2x-0,5y=65 \end{array}\right\} \rightarrow x=50-y$$

Sustituyendo:

$$2(50-y)-0,5y=65 \rightarrow 100-2y-0,5y=65 \rightarrow -2,5y=-35 \rightarrow y=\frac{-35}{-2,5}=14$$

Si $y = 14 \rightarrow x = 50 - 14 = 36$

Tiene 36 aciertos y 14 fallos.

4. **En un cine, tres entradas y dos bolsas de palomitas nos han costado 23 €. Si hubiera venido también Andrea, habrían sido una entrada y una bolsa de palomitas más, y habríamos pagado 31,50 €. ¿Cuánto cuesta cada entrada y cada bolsa de palomitas?**

x = precio de una entrada (€)

y = precio de unas palomitas (€)

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 23 \\ 4x + 3y = 31,50 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x = \dfrac{23-2y}{3} \\ \to x = \dfrac{31,50-3y}{4} \end{array}$$

Igualamos las variables:

$$\frac{23-2y}{3} = \frac{31,50-3y}{4} \to 4(23-2y) = 3(31,50-3y) \to 92 - 8y = 94,50 - 9y \to$$

$$\to 9y - 8y = 94,50 - 9y \to y = 2,50$$

Si $y = 2,50 \to x = \dfrac{23 - 2 \cdot 2,50}{3} = \dfrac{23-5}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$

La entrada de cine cuesta 6 €. Las palomitas cuestan 2,50 €.

5. **Un empresario aceitero ha envasado 10 000 litros de aceite en 12 000 botellas, unas de litro y otras de tres cuartos de litro. ¿Cuántas botellas de cada clase ha utilizado?**

x = número de botellas de 1 l que ha usado.

y = número de botellas de 3/4 l que ha usado.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12\,000 \\ x + \dfrac{3}{4}y = 10\,000 \end{array}\right\} \to x = 12\,000 - y$$

Sustituimos:

$$12\,000 - y + \frac{3}{4}y = 10\,000 \to 12\,000 - 10\,000 = \frac{y}{4} \to \frac{y}{4} = 2\,000 \to y = 8\,000$$

Si $y = 8\,000 \to x = 12\,000 - 8\,000 = 4\,000$

Usó 4 000 botellas de 1 l y 8 000 botellas de 3/4 l.

6. **Dos números se diferencian en 35 unidades. Si al mayor se le resta la quinta parte del menor, se obtiene la misma cantidad que si al menor se le suma la quinta parte del mayor. ¿Qué números son?**

x = número mayor

y = número menor

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 35 \\ x - \dfrac{y}{5} = y + \dfrac{x}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 35 \\ 5x - y = 5y + x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 35 \\ 4x = 6y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 35 \\ 2x = 3y \end{array}\right\} \to x = 35 + y$$

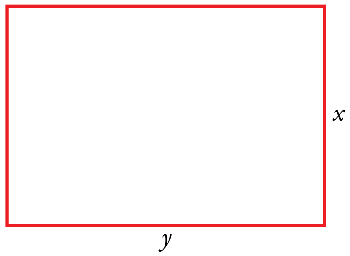
Sustituimos:

$2(35 + y) = 3y \to 70 + 2y = 3y \to 70 = y$

Si $y = 70 \to x = 35 + 70 = 105$

Los números buscados son 105 y 70.

7. **La base de un rectángulo mide 13 cm más que la altura, y el perímetro mide 142 m. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**



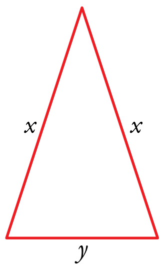
$$\left.\begin{array}{l} y = x + 13 \\ 2x + 2y = 142 \end{array}\right\}$$

$2x + 2(x + 13) = 142 \;\rightarrow\; 2x + 2x + 26 = 142 \;\rightarrow\; 4x = 116 \;\rightarrow\; x = \dfrac{116}{4} = 29$

Si $x = 29 \;\rightarrow\; y = 29 + 13 = 42$

Solución: la base mide 42 cm, y la altura, 29 cm.

8. **En un triángulo isósceles, el perímetro mide 21 cm y el lado desigual es 3 cm más corto que cada uno de los lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?**



$$\left.\begin{array}{l} y = x - 3 \\ 2x + y = 21 \end{array}\right\}$$

$2x + x - 3 = 21 \;\rightarrow\; 3x = 24 \;\rightarrow\; x = 8$

Si $x = 8 \;\rightarrow\; y = 8 - 3 = 5$

Solución: el lado desigual mide 5 cm. Cada lado igual mide 8 cm.

Página 112

9. Un bodeguero mezcla un tonel de vino de 4,80 €/*l* con otro tonel de un vino inferior, de 3,50 €/*l*, obteniendo 1 300 litros que salen a 4 € el litro. ¿Cuánto vino de cada clase hay en la mezcla?

x = litros de vino de 4,80 €/*l*

y = litros de vino de 3,50 €/*l*

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1300 \\ 4,80x + 3,50y = 4 \cdot 1300 \end{array}\right\} \to x = 1300 - y$$

$$4,80(1\,300 - y) + 3,50y = 5\,200 \to 6\,240 - 4,80y + 3,50y = 5\,200 \to$$

$$\to 1\,040 = 1,30y \to y = \frac{1040}{1,30} = 800$$

Si $y = 800 \to x = 1\,300 - 800 = 500$

Usa 500 *l* de vino caro y 800 *l* de vino barato.

10. Dos ciudades, A y B, distan 113 km. Un coche sale de A hacia B a 100 km/h, y media hora después sale de B hacia A un camión a 80 km/h. ¿Qué distancia recorre cada uno hasta que se cruzan?

x = kilómetros que recorre el coche hasta encontrarse con el camión.

y = kilómetros que recorre el camión hasya encontrarse con el coche.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 113 \\ \dfrac{x}{100} = \dfrac{y}{80} + \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + y = 113 \\ 4x = 5y + 200 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 113 - y \\ 4(113 - y) = 5y + 200 \end{array}\right\}$$

$$4(113 - y) = 5y + 200 \to 452 - 4y = 5y + 200 \to 9y = 252 \to y = 28$$

Si $y = 28 \to x = 113 - 28 = 85$

Hasta que se cruzan, el coche recorre 85 km, y el camión, 28 km.

11. Jaime tiene 20 000 €. Coloca una parte, en un banco, al 7 %, y el resto, al 3 %. Gana 760 € en un año. ¿A cuánto ascendía cada parte?

Llamamos x al dinero que puso al 7 % e y, al que puso al 3 %.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20\,000 \\ 0,07x + 0,03y = 760 \end{array}\right\} \to y = 20\,000 - x$$

$$0,07x + 0,03(20\,000 - x) = 760 \to 0,07x + 600 - 0,03x = 760 \to 0,04x = 160 \to$$

$$\to x = \frac{160}{0,04} \to x = 4\,000$$

Si $x = 4\,000 \to y = 20\,000 - 4\,000 = 16\,000$

Jaime puso 4 000 € al 7 % y 16 000 € al 3 %.

12. Sofía tenía un capital de 200 000 €. Depositó una parte en un banco al 4 % anual. El resto lo invirtió en acciones, con las que perdió el 11 %. Al final del año ganó 4 250 €.

¿Cuánto destinó a cada inversión?

Llamamos x al capital que depositan en el banco e y al que invierte en acciones.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 200\,000 \\ 0,04x - 0,11y = 4\,250 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ y = 200\,000 - x \\ \to\ 0,04x - 0,11\,(200\,000 - x) = 4\,250\ \to \end{array}$$

$$\to\ 0,04x - 22\,000 + 0,11x = 4\,250\ \to\ 0,15x = 26\,250\ \to\ x = \frac{26\,250}{0,15}\ \to\ x = 175\,000$$

$y = 200\,000 - 175\,000 = 25\,000$

Sofía invirtió 175 000 € en el banco y 25 000 € en acciones.

13. Un inversor reparte su capital en dos fondos de riesgo medio y un tiempo después los rescata, ganando un 3,25 % en el primero y perdiendo un 0,75 % en el segundo.

¿Qué tanto por ciento colocó en cada fondo si, en total, obtuvo un beneficio del 2,85 %?

Por cada 100 euros, coloca x euros en el primer fondo y $100 - x$ en el segundo.

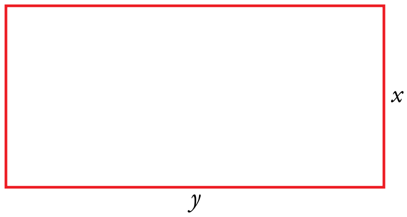
$1,0325x + 0,9925(100 - x) = 100 \cdot 1,0285\ \to\ 1,0325x + 99,25 - 0,9925x = 102,85\ \to$

$\to\ 0,04x = 102,85 - 99,25\ \to\ 0,04x = 3,6\ \to\ x = 90$

Colocó el 90 % en el primer fondo, y el 10 %, en el segundo.

Página 113

14. La valla de una finca rectangular mide 148 m, y su superficie, 1 200 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 148 \\ x \cdot y = 1\,200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 74 \\ x \cdot y = 1\,200 \end{array}\right\} \rightarrow x = 74 - y$$

$(74 - y) \cdot y = 1\,200 \rightarrow 74y - y^2 - 1\,200 = 0 \rightarrow y^2 - 74y + 1\,200 = 0$

$$y = \frac{-(-74) \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1\,200}}{2 \cdot 1} = \frac{74 \pm \sqrt{5\,476 - 4\,800}}{2} = \frac{74 \pm 26}{2} = \begin{cases} \dfrac{74 + 26}{2} = 50 \\[2mm] \dfrac{74 - 26}{2} = 24 \end{cases}$$

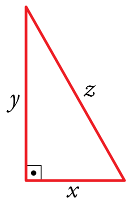
Si $y = 50 \rightarrow x = 74 - 50 = 24$

Si $y = 24 \rightarrow x = 74 - 24 = 50$

Solución: Largo de la finca: 50 m

Ancho de la finca: 24 m

15. Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que un cateto es 10 cm más largo que el otro y que el área mide 150 cm².



$$\left.\begin{array}{l} y = x + 10 \\ \dfrac{x \cdot y}{2} = 150 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x(x+10)}{2} = 150 \rightarrow x(x+10) = 300$$

$x^2 + 10x - 300 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 1\,200}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{1\,300}}{2} \approx$$

$$\approx \frac{-10 \pm 36{,}06}{2} = \begin{cases} \dfrac{-10 + 36{,}06}{2} = 13{,}03 \\[2mm] \dfrac{-10 - 36{,}06}{2} \rightarrow \text{No es solución del problema.} \end{cases}$$

Si $x = 13{,}03 \rightarrow y = 13{,}03 + 10 = 23{,}03$

Por el teorema de Pitágoras:

$z^2 = 13{,}03^2 + 23{,}03^2 = 169{,}7809 + 530{,}3809 = 700{,}1618 \rightarrow z = \sqrt{700{,}1618} \approx 26{,}46$ cm

Solución:

Perímetro del triángulo = 13,03 + 23,03 + 26,46 = 62,52 cm

16. Un depósito dispone de dos grifos de llenado. Si se abre solo el primero, el depósito tarda en llenarse el doble que si se abre solo el segundo. Pero si se abren los dos a la vez, se llena en 10 minutos. ¿Cuánto tarda cada grifo en llenar el depósito actuando en solitario?

x = número de horas que tarda el grifo 1 en llenar el pilón.

y = número de horas que tarla el grifo 2 en llenar el pilón.

El grifo 1 en 1 hora llena $\frac{1}{x}$ del pilón.

El grifo 2 en 1 hora llena $\frac{1}{y}$ del pilón.

Los grifos 1 y 2 juntos en 1 hora llenan 6 pilones.

$$\left.\begin{aligned} x &= 2y \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 6 \end{aligned}\right\} \to \frac{1}{2y} + \frac{1}{y} = 6 \to 1 + 2 = 12y \to 12y = 3 \to y = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$x = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Solución: el grifo 1 tarda $\frac{1}{2}$ hora = 30 minutos en llenar el pilón, y el grifo 2 tarda $\frac{1}{4}$ hora = 15 minutos en llenar el pilón.

Ejercicios y problemas

Página 114

Practica

Sistemas lineales

1. Comprueba si el par (3, –1) es solución de alguno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$

El par (3, –1) es solución de un sistema si al sustituir x por 3 e y por –1, se verifican ambas igualdades:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 9 + 2 = 11 \end{array}\right\} \to$ (3, –1) es solución del sistema.

b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5 \\ 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 8 \end{array}\right\} \to$ La segunda ecuación no se cumple. (3, –1) no es solución del sistema.

2. Completa en tu cuaderno para que los siguientes sistemas tengan como solución $x = -1$, $y = 2$:

a) $\begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = \dots \\ \dots + y/2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{array}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} -1 - 3 \cdot 2 = -1 - 6 = -7 \\ 2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$

Así, $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ es el sistema buscado.

b) $\left.\begin{array}{l} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{array}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \end{cases}$

El sistema que tiene como solución $x = -1$, $y = 2$ es: $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y + x = 3 \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = \dots \\ \dots + \dfrac{y}{2} = 0 \end{array}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} 3 \cdot (-1) + 2 = -3 + 2 = -1 \\ \dots + \dfrac{2}{2} = 0 \to \dots = -1 \text{ luego } \dots \text{ es } x \end{cases}$

El sistema buscado es $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + \dfrac{y}{2} = 0 \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r} \ldots - 2x = 4 \\ 3y + \ldots = 1 \end{array}\right\}$ Si $x = -1,\ y = 2 \to \begin{cases} \ldots - 2 \cdot (-1) = 4 \to \ldots + 2 = 4 \to \ldots = 2 = y \\ 3 \cdot 2 + \ldots = 1 \to \ldots = -5 \text{ luego} \ldots \text{ es } 5x \end{cases}$

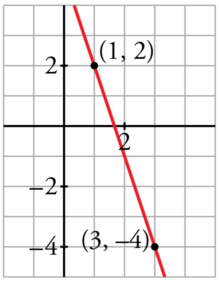
El sistema buscado es: $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 3y + 5x = 1 \end{cases}$

3. **Busca dos soluciones para cada una de estas ecuaciones y representa las rectas correspondientes:**

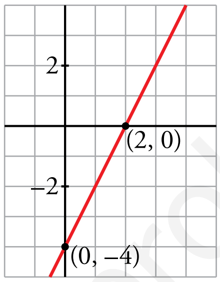
a) $\mathbf{3x + y = 5}$

b) $\mathbf{2x - y = 4}$

a) Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: (1, 2) y (3, –4).



b) Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: (0, –4) y (2, 0).



4. **Resuelve gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + y = 5} \\ \mathbf{x + y = 1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{4x - y = 7} \\ \mathbf{y - 1 = 0} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{2x - y = 4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = 1} \\ \mathbf{x + 3 = 0} \end{cases}$

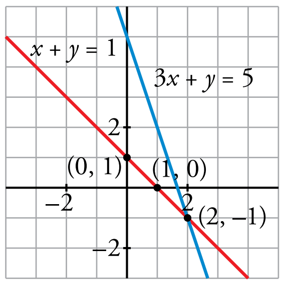
a) Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$3x + y = 5$

x	*y*
0	5
2	–1

$x + y = 1$

x	*y*
0	1
1	0

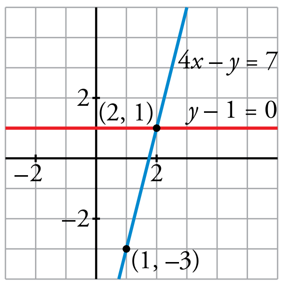


Las rectas se cortan en el punto (2, –1) $\to$ La solución del sistema es $x = 2,\ y = -1$.

b) La segunda ecuación representa a una recta paralela al eje X, $y = 1$.

La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, –3) y (2, 1).

La solución del sistema es $x = 2,\ y = 1$, punto de intersección de ambas rectas.



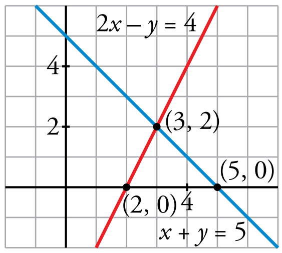
c) Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

$2x - y = 4$

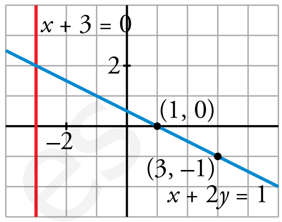
x	y
2	0
3	2



Las dos rectas se cortan en el punto (3, 2), luego $x = 3$, $y = 2$ es la solución del sistema.

d) La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, 0) y (3, –1). La segunda ecuación es la de una recta al eje Y, $x = -3$.

Las dos rectas se cortan en el punto (–3, 2) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = -3$, $y = 2$.



5. **Dos de los siguientes sistemas tienen solución única; uno de ellos es incompatible (no tiene solución) y otro es indeterminado (tiene infinitas soluciones). Intenta averiguar de qué tipo es cada uno, simplemente observando las ecuaciones. Después, resuélvelos gráficamente para comprobarlo:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \ \ x + \ \ y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = \ \ 2 \\ \ \ x - y = -2 \end{cases}$

- El sistema c) tiene infinitas soluciones, pues la segunda ecuación es la primera multiplicada por 3. Por tanto, las dos ecuaciones dicen lo mismo.
- El sistema b) es incompatible, sin solución, ya que las ecuaciones son contradictorias:

$$\left.\begin{aligned} 2x + \ \ y &= 3 \\ 4x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ Imposible que se cumplan ambas a la vez.}$$

- Los sistemas a) y d) tienen solución.

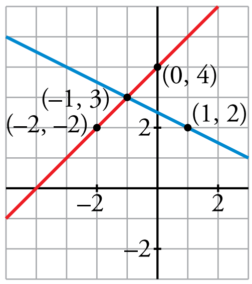
Resolvemos gráficamente todos los sistemas para comprobarlo:

a) $x + 2y = 5$

x	y
1	2
–1	3

$y - x = 4$

x	y
–2	2
0	4



Las dos rectas se cortan en (–1, 3).

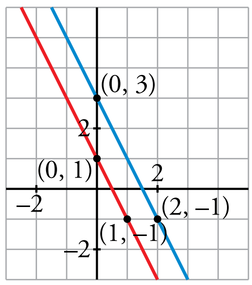
La solución del sistema es $x = -1$, $y = 3$.

b) $2x + y = 3$

x	y
0	3
2	–1

$4x + 2y = 2$

x	y
0	1
1	–1

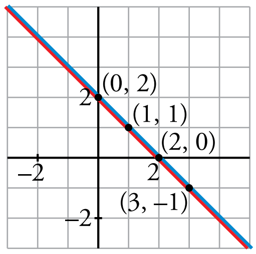


Las rectas son paralelas $\rightarrow$ El sistema no tiene solución.

c) $x + y = 2$ $\qquad$ $3x + 3y = 6$

x	y
0	2
2	0

x	y
1	1
3	–1

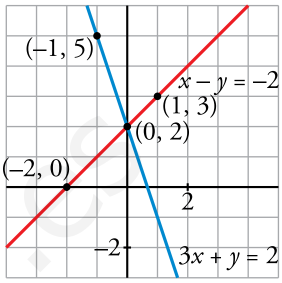


Se trata de la misma recta $\rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones.

d) $3x + y = 2$ $\qquad$ $x - y = -2$

x	y
0	2
–1	5

x	y
–2	0
1	3



El sistema tiene solución única $x = 0,\ y = 2$, punto de corte de ambas rectas.

6. **Dada la ecuación $x + 3y = 1$, busca otra ecuación que forme con ella un sistema cuya única solución sea $x = -2,\ y = 1$. Busca también otra ecuación que forme con ella un sistema incompatible y otra que forme con ella un sistema indeterminado.**

$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \end{array}\right\}$ Es un sistema que tiene como solución $x = -2,\ y = 1$.

$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -1 \end{array}\right\}$ Es un sistema que no tiene solución, es incompatible.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & - & 6y & = & -2 \\ 2x & + & 6y & = & -1 \\ \hline & & 0 & = & -3 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ \dfrac{x}{3} + y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$ Es un sistema que tiene infinitas soluciones, es indeterminado (la 2.ª ecuación es la tercera parte de la primera).

7. **Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ $\qquad$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la 2.ª ecuación y sustituimos en la 1.ª: $y = -1 - 4x$

$\left.\begin{array}{l} 3x - 5(-1 - 4x) = 5 \rightarrow 3x + 5 + 20x = 5 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0 \\ y = -1 - 4 \cdot 0 = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 0,\ y = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la 2.ª ecuación y sustituimos en la 1.ª: $x = -5 - 6y$

$\left.\begin{array}{l} 8(-5 - 6y) - 7y = 15 \rightarrow -55y = 55 \rightarrow y = -1 \\ x = -5 - 6 \cdot (-1) = -5 + 6 = 1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 1,\ y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la 2.ª ecuación y sustituimos en la 1.ª: $y = 3x - 7$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5(3x - 7) = -1 \to 2x + 15x - 35 = -1 \to 17x = 34 \to x = 2 \\ y = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 2,\ y = -1$$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la 1.ª ecuación y sustituimos en la 2.ª: $y = \dfrac{3x - 2}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 4 \cdot \left(\dfrac{3x - 2}{2}\right) = 7 \to 5x + 6x - 4 = 7 \to x = 1 \\ y = \dfrac{3 \cdot 1 - 2}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 1,\ y = \frac{1}{2}$$

8. **Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:**

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{array}\right\}$ $2x - 3 = \dfrac{x - 3}{2} \to 4x - 6 = x - 3 \to 3x = 3 \to x = 1$

$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

b) Despejamos y de cada una de las ecuaciones e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} y = 8 - 5x \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} 8 - 5x = 2x + 1 \to 7 = 7x \to x = 1 \\ y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{array}$$

Solución: $x = 1,\ y = 3$

c) Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 - 6y \\ x = 1 + 3y \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} -2 - 6y = 1 + 3y \to -3 = 9y \to y = -1/3 \\ x = -2 - 6 \cdot (-1/3) = -2 + 2 = 0 \end{array}$$

Solución: $x = 0,\ y = -\dfrac{1}{3}$

d) Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5y - 2}{4} \\ x = \dfrac{10 - 2y}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{5y - 2}{4} = \dfrac{10 - 2y}{3} \to 3(5y - 2) = 4(10 - 2y) \to 23y = 46 \to y = 2 \\ x = \dfrac{5 \cdot 2 - 2}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \end{array}$$

Solución: $x = 2,\ y = 2$

9. **Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} &\text{Sumando ambas ecuaciones obtenemos } 8x = 8 \to x = 1 \\ &3 \cdot 1 + 2y = 4 \to 2y = 1 \to y = 1/2 \end{aligned}\right\}$

Solución: $x = 1,\ y = \dfrac{1}{2}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{aligned} -4x - 10y &= -22 \\ 4x - 3y &= -4 \\ \hline -13y &= -26 \to y = 2 \end{aligned}$

$2x + 5 \cdot 2 = 11 \to 2x = 1 \to x = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = \dfrac{1}{2},\ y = 2$

c) $\left.\begin{aligned} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{aligned} -3x - 18y &= 12 \\ 3x - 5y &= 11 \\ \hline -23y &= 23 \to y = -1 \end{aligned}$

$x + 6 \cdot (-1) = -4 \to x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

d) $\left.\begin{aligned} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{aligned} -10x + 4y &= -6 \\ 10x + 3y &= -1 \\ \hline 7y &= -7 \to y = -1 \end{aligned}$

$5x - 2 \cdot (-1) = 3 \to 5x + 2 = 3 \to x = \dfrac{1}{5}$

Solución: $x = \dfrac{1}{5},\ y = -1$

10. **Resuelve por el método que consideres más adecuado:**

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - 3 = 2y + 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{aligned}\right\}$ Despejamos y de la 2.ª ecuación y la sustituimos en la 1.ª: $y = -2$

$7x + 6 \cdot (-2) = 2 \to 7x - 12 = 2 \to 7x = 14 \to x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \begin{array}{r} 10x - 6y = 2 \\ 12x + 6y = 42 \\ \hline 22x \quad = 44 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 22x = 44 \to x = 2 \\ 5 \cdot 2 - 3y = 1 \to 9 = 3y \to y = 3 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 2,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} 3(x+2) = y + 7 \\ x + 2(y+1) = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3x + 6 = y + 7 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 3x - 1$

$\left.\begin{array}{l} x + 2(3x-1) = -2 \to x + 6x - 2 = -2 \to 7x = 0 \to x = 0 \\ y = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 0,\ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x+y) = 16 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 18 \\ x + y = 8 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = 8 - y$

$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot (8 - y) + 3y = 18 \to 16 - 2y + 3y = 18 \to y = 2 \\ x = 8 - 2 = 6 \end{array}\right\}$ Solución: $x = 6,\ y = 2$

e) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3 = 2y - 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4x - 2y = -18 \\ x + 6y = 15 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = 15 - 6y$

$\left.\begin{array}{l} 4(15 - 6y) - 2y = -18 \to 60 - 24y - 2y = -18 \to 78 = 26y \to y = 3 \\ x = 15 - 6 \cdot 3 = 15 - 18 = -3 \end{array}\right\}$ Solución: $x = -3,\ y = 3$

f) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} -x + 7 = 2(y+4) \\ 10x = 3y - 10 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -x - 2y = 1 \\ 10x - 3y = -10 \end{array}\right\}$

Aplicamos el método de reducción: multiplicamos la primera ecuación por 10 y sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -10x - 20y = 10 \\ 10x - 3y = -10 \\ \hline -23y = 0 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} -23y = 0 \to y = 0 \\ -x - 2 \cdot 0 = 1 \to -x = 1 \to x = -1 \end{array}\right\}$ Solución: $x = -1,\ y = 0$

11. **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que consideres oportuno y comprueba la solución que obtengas:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1,25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

a) Por reducción. Multiplicamos la 1.ª ecuación por –2 y sumamos:

$$\begin{array}{r} -4x + 2y = -8 \\ 4x + 3y = -7 \\ \hline 5y = -15 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5y = -15 \;\rightarrow\; y = -3 \\ x = \dfrac{4+y}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = \frac{1}{2},\; y = -3$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{2} - (-3) = 1 + 3 = 4 \\ 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot (-3) = 2 - 9 = -7 \end{cases}$$

b) Por reducción. Multiplicamos la 2.ª ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{r} x + 2y = -1 \\ 6x - 2y = -2,5 \\ \hline 7x \quad = -3,5 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x = -3,5 \;\rightarrow\; x = -0,5 \\ y = \dfrac{-1-x}{2} \;\rightarrow\; y = -0,25 \end{array}\right\} \text{Solución: } x = -0,5,\; y = -0,25$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} -0,5 + 2(-0,25) = -1 \\ 3(-0,5) - (-0,25) = -1,25 \end{cases}$$

c) Por reducción. Multiplicamos la 2.ª ecuación por –3 y sumamos:

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = 2 \\ -3x - 12y = 5 \\ \hline -14y = 7 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -14y = 7 \;\rightarrow\; y = -1/2 \\ x = \dfrac{-5}{3} - 4y \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = \frac{1}{3},\; y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} 3 \cdot \dfrac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 \\ \dfrac{1}{3} + 4 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2 - 3y = 7 - 8y \;\rightarrow\; y = 1 \\ x = 7 - 8 \cdot 1 \;\rightarrow\; x = -1 \end{array}$$

Solución: $x = -1,\; y = 1$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} \dfrac{-1+1}{3} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \dfrac{-1-3}{4} + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

Página 115

Sistemas no lineales

12. **Halla las soluciones de estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 1 - y \\ (1 - y)y + 2y = 2 \;\rightarrow\; y - y^2 + 2y = 2 \;\rightarrow\; -y^2 + 3y - 2 = 0 \end{cases}$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} y_1 = 1 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \\ y_2 = 2 \;\rightarrow\; x_2 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\; y_1 = 1;\; x_2 = -1,\; y_2 = 2$

b) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x^2 + (3 - 2x)^2 = 2 \;\rightarrow\; x^2 + 9 + 4x^2 - 12x = 2 \;\rightarrow\; 5x^2 - 12x + 7 = 0 \end{cases}$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2 \cdot 5} = \frac{12 \pm 2}{10} = \begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} \;\rightarrow\; y_1 = 3 - 2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{1}{5} \\ x_2 = 1 \;\rightarrow\; y_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{7}{5},\; y_1 = \frac{1}{5};\; x_2 = 1,\; y_2 = 1$

c) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \;\rightarrow\; (3 - 2x)(x - (3 - 2x)) = 0 \end{cases}$

$$(3 - 2x) \cdot (3x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; y_1 = 0 \\ x_2 = 1 \;\rightarrow\; y_2 = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{3}{2},\; y_1 = 0;\; x_2 = 1,\; y_2 = 1$

d) $\begin{cases} y = 3x - 3 \\ 2x^2 + (3x - 3)^2 = 9 \;\rightarrow\; 2x^2 + 9x^2 + 9 - 18x = 9 \;\rightarrow\; 11x^2 - 18x = 0 \end{cases}$

$$x(11x - 18) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = -3 \\ x_2 = \frac{18}{11} \;\rightarrow\; y_2 = \frac{21}{11} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\; y_1 = -3;\; x_2 = \frac{18}{11},\; y_2 = \frac{21}{11}$

13. **Resuelve los sistemas siguientes por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array}\right\}$ Multiplicamos por –2 la 1.ª ecuación y sumamos:

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 2y^2 = -148 \\ 2x^2 - 3y^2 = \quad 23 \\ \hline -5y^2 = -125 \end{array} \to y^2 = \frac{125}{5} = 25 \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

Si $y_1 = 5 \to x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

Si $y_2 = -5 \to x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_3 = 7 \\ x_4 = -7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 7,\ y_1 = 5;\ x_2 = -7,\ y_2 = 5;\ x_3 = 7,\ y_3 = -5;\ x_4 = -7,\ y_4 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{array}\right\}$ Lo resolvemos por el método de reducción multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y la 2.ª por –3.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 10y^2 = 14 \\ -6x^2 + 33y^2 = 9 \\ \hline 23y^2 = 23 \end{array} \to y^2 = 1$$

$3x^2 - 5 \cdot 1 = 7 \to 3x^2 = 7 + 5 \to 3x^2 = 12 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$

Si $y = 1 \to x = \pm 2$. Si $y = -1 \to x = \pm 2$.

Las soluciones son: $x_1 = -2,\ y_1 = -1;\ x_2 = -2,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = -1;\ x_4 = 2,\ y_4 = 1$

14. **Resuelve los siguientes sistemas (no olvides comprobar las soluciones):**

a) $\begin{cases} y = \sqrt{x + 2} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} y = \sqrt{x + 2} \\ x - 2y = 1 \end{array}\right\} \to x = 1 + 2y$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = \sqrt{1 + 2y + 2} \to y = \sqrt{3 + 2y}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $y^2 = 3 + 2y \to y^2 - 2y - 3 = 0$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \to x = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ -1 \to x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \end{cases}$$

Comprobamos si las soluciones obtenidas cumplen la primera ecuación del sistema:

$x_1 = 7,\ y_1 = 3 \to 3 = \sqrt{7 + 2} \to 3 = \sqrt{9} \to 3 = 3 \to$ Solución válida.

$x_2 = -1,\ y_2 = -1 \to -1 = \sqrt{-1 + 2} \to -1 = \sqrt{1} \to -1 \neq 1 \to$ Solución no válida.

Por tanto, la solución es $x = 7,\ y = 3$.

b) $\left.\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 1 = \sqrt{x} + 7 \;\to\; x - 6 = \sqrt{x} \;\to\; (x-6)^2 = x \;\to \\ \to\; x^2 - 12x + 36 = 0 \;\to\; x^2 - 13x + 36 = 0 \end{array}$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \;\to\; y = 9 + 1 = 10 \\ 4 \;\to\; y = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

Comprobación (de la 2.ª ecuación):

$x_1 = 9,\; y_1 = 10 \;\to\; \sqrt{9} + 7 = 3 + 7 = 10 \;\to$ Solución válida.

$x_2 = 4,\; y_2 = 5 \;\to\; \sqrt{4} + 7 = 9 \neq 5 \;\to$ Solución no válida.

Solución: $x = 9,\; y = 10$.

c) $\left.\begin{array}{l} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{array}\right\} \;\to\; x = \dfrac{25y}{2}$

$$xy = 2 \;\to\; \frac{25}{2}y \cdot y = 2 \;\to\; \frac{25}{2}y^2 = 2 \;\to\; y^2 = \frac{4}{25} \;\to\; y = \pm\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm\frac{2}{5}$$

Si $y = \dfrac{2}{5} \;\to\; x = \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 5$

$y = -\dfrac{2}{5} \;\to\; x = -5$

Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 5,\; y_1 = \dfrac{2}{5} \\ x_2 = -5,\; y_2 = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \;\to\; x = 4 - 2y \end{array}\right\} \; 2(4 - 2y) \cdot y = 3 \;\to\; 8y - 4y^2 = 3 \;\to\; 4y^2 - 8y + 3 = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = \begin{cases} \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \;\to\; x = 4 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 1 \\ \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \;\to\; x = 4 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1,\; y_1 = \dfrac{3}{2};\; x_2 = 3,\; y_2 = \dfrac{1}{2}$

15. **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 1 + y \\ (1 + y)^2 + y^2 = 11 - 3(1 + y) \;\to\; 1 + y^2 + 2y + y^2 = 11 - 3 - 3y \end{cases}$

$$2y^2 + 5y - 7 = 0 \;\to\; y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 9}{4} = \begin{cases} y_1 = 1 \;\to\; x_1 = 2 \\ y_2 = -7/2 \;\to\; x_2 = -5/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\; y_1 = 1;\; x_2 = -\dfrac{5}{2},\; y_2 = -\dfrac{7}{2}$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{-3x}{2} \\ x^2 - x\left(\dfrac{-3x}{2}\right) = 2\left(\dfrac{9x^2}{4} - 4\right) \end{cases} \to x^2 + \dfrac{3x}{2} - \dfrac{9x^2}{2} = -8$

$2x^2 + 3x^2 - 9x^2 = -16 \to 4x^2 = 16$

$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \to y_1 = -3 \to \text{Solución: } x_1 = 2,\ y_1 = -3 \\ x_2 = -2 \to y_2 = 3 \to \text{Solución: } x_2 = -2,\ y_2 = 3 \end{cases}$

Aplica lo aprendido

16. **La suma de dos números es 15. La mitad de uno de ellos más la tercera parte del otro es 6. ¿De qué números se trata?**

Llamamos x e y a los números buscados.

La suma es 15 $\to x + y = 15$

La mitad de x + tercera parte de y es 6 $\to \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6$

$\left.\begin{aligned} x + y &= 15 \\ 3x + 2y &= 36 \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} &y = 15 - x \to y = 15 - 6 = 9 \\ &3x + 2(15 - x) = 36 \to 3x + 30 - 2x = 36 \to x = 6 \end{aligned}$

Los números buscados son 6 y 9.

17. **La suma de dos números es 14. Añadiendo una unidad al mayor se obtiene el doble del menor. Halla los dos números.**

x = número mayor $\quad$ y = número menor

$\left.\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + 1 &= 2y \end{aligned}\right\} \to x = 2y - 1$

$2y - 1 + y = 14 \to 3y = 15 \to y = 5 \to x = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

Los números son 5 y 9.

18. **Encuentra dos números tales que añadiendo tres unidades al primero se obtenga el segundo y, en cambio, añadiendo dos unidades al segundo se obtenga el doble del primero.**

Llamamos x e y a los números pedidos: x es el primero e y el segundo.

$\left.\begin{aligned} x + 3 &= y \\ y + 2 &= 2x \end{aligned}\right\} x + 3 + 2 = 2x \to 5 = x \to y = 5 + 3 = 8$

Los números son 5 y 8.

19. **Un número es triple que otro. Pero si al menor se le suman 7 unidades y al mayor se le resta su quinta parte, quedan igualados. ¿Qué números son?**

x = número mayor $\quad$ y = número menor

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ y + 7 = x - \dfrac{x}{5} \end{array}\right\} \to y + 7 = 3y - \frac{3y}{5}$$

$$5y + 35 = 15y - 3y \to 35 = 7y \to y = \frac{35}{7} = 5$$

Si $y = 5 \to x = 3 \cdot 5 = 15$

Solución: los números buscados son 15 y 5.

20. **Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,80 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,70 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?**

$x \to$ precio de una barra de pan (€)

$y \to$ precio de un litro de leche (€)

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 6{,}8 \\ 3x + 4y = 4{,}7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot (-4)} \end{array} \begin{array}{r} 12x + 18y = 20{,}4 \\ -12x - 16y = -18{,}8 \\ \hline 2y = 1{,}6 \end{array} \to y = 0{,}8$$

$$4x + 6 \cdot 0{,}8 = 6{,}8 \to 4x + 4{,}8 = 6{,}8 \to 4x = 2 \to x = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Una barra de pan cuesta 0,50 €, y un litro de leche, 0,80 €.

21. **Una empresa aceitera ha envasado 3 000 *l* de aceite en 1 200 botellas de 2 *l* y de 5 *l*. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?**

x = número de botellas de aceite de 2 *l*

y = número de botellas de aceite de 5 *l*

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1\,200 \\ 2x + 5y = 3\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot (-2)} \\ \end{array} \begin{array}{r} -2x - 2y = -2\,400 \\ 2x + 5y = 3\,000 \\ \hline 3y = 600 \end{array} \to y = 200 \to x = 1\,200 - 200 = 1\,000$$

Se han utilizado 1 000 botellas de 2 *l* y 200 de 5 *l*.

22. **Un test consta de 48 preguntas. Por cada acierto se suman 0,75 puntos y por cada error se restan 0,25. Mi puntuación fue de 18 puntos. ¿Cuántos aciertos y errores tuve, si contesté a todas las preguntas?**

x = número de aciertos $\quad$ y = número de errores

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 48 \\ 0{,}75x - 0{,}25y = 18 \end{array}\right\} \to x = 48 - y$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}75\,(48 - y) - 0{,}25y = 18 \\ 36 - 0{,}75y \;\; 0{,}25y = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 18 = y \\ x = 48 - 18 = 30 \end{array}$$

Tuve 30 aciertos y 18 errores.

23. **Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0,80 € por cada pieza que sale de su taller para la venta, pero sufre una pérdida de 1 € por cada pieza defectuosa que debe retirar. En un día ha fabricado 2 255 bombillas, obteniendo unos beneficios de 1 750 €. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se fabricaron ese día?**

x = número de bombillas válidas

y = número de bombillas defectuosas

$$\begin{array}{lcl} \text{En un día fabrica 2 255 bombillas} & \to & \left.\begin{array}{r} x + y = 2\,255 \\ 0{,}80x - y = 1750 \end{array}\right\} \\ \text{En un día obtiene 1750 € de beneficio} & \to & \\ \hline & & 1{,}80x \quad = 4\,005 \;\to\; x = 2\,225 \end{array}$$

$y = 2\,255 - 2\,225 = 30$

Hay 2 225 bombillas válidas y 30 defectuosas.

24. **En una pescadería, un cliente se lleva una pescadilla de kilo y medio y tres cuartos de kilo de boquerones. Tras él, una señora pide media pescadilla que pesa 600 gramos y un kilo de boquerones. El primero paga 21 € por su compra, y la señora, 12,60 € por la suya. ¿A cómo está el kilo de pescadilla? ¿Y el de boquerones?**

x = precio de la pescadilla (€/kg)

y = precio de los boquerones (€/kg)

$$\begin{array}{lcl} \text{El cliente se gasta} & \to & 1{,}5x + 0{,}75y = 21 \\ \text{La señora paga} & \to & 0{,}6x + y = 12{,}6 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-4)} \\ \xrightarrow{\cdot 10} \end{array} \left.\begin{array}{r} -6x - 3y = -84 \\ 6x + 10y = 126 \end{array}\right\}$$

$$7y = 42 \to y = 6 \to x = 11$$

Solución: la pescadilla cuesta 11 €/kg y los boquerones 6 €/kg.

25. **En un aparcamiento cobran un fijo por entrar y un tanto a la hora. Hoy, por hora y media, he pagado 2,60 € y ayer pagué 3,40 € por dos horas y diez minutos. ¿Cuál es el fijo y cuál es el coste por hora?**

x = precio por entrar (€)

y = precio por hora (€)

$$\left.\begin{array}{r} x + 1{,}5y = 2{,}6 \\ x + (2 + 1/6)y = 3{,}4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-6)} \\ \xrightarrow{\cdot 6} \end{array} \left.\begin{array}{r} -6x - 9y = -15{,}6 \\ 6x + 13y = 20{,}4 \end{array}\right\}$$

$$4y = 4{,}80 \to y = 1{,}20 \to x = 0{,}80$$

Solución: se cobra por entrar 0,80 € y 1,20 €/h.

26. **Andrés tiene dos cuentas en el banco. Si pasara 600 € de la primera a la segunda, esta quedaría con saldo doble. Pero si la transferencia fuera de 300 € en sentido contrario, sería la primera la que tendría el doble. ¿Cuánto hay en cada una?**

x = euros en la primera cuenta

y = euros en la segunda cuenta

$$\left.\begin{array}{r} 2(x - 600) = y + 600 \\ x + 300 = 2(y - 300) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to y = 2x - 1800 \to y = 1\,200 \\ \to x + 300 = 2(2x - 1\,800 - 300) \to 3x = 4\,500 \to x = 1500 \end{array}$$

Solución: en la primera cuenta tiene 1 500 € y en la segunda 1 200 €.

27. **Una empresa de alquiler de coches cobra por día y por kilómetros recorridos. Un cliente pagó 160 € por 3 días y 400 km, y otro pagó 175 € por 5 días y 300 km. Averigua cuánto cobran por día y por km.**

$x \to$ días

$y \to$ kilómetros recorridos

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 400y = 160 \\ 5x + 300y = 175 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 5} \\ \xrightarrow{\cdot (-3)} \end{array} \begin{array}{r} 15x + 2\,000y = 800 \\ -15x - 900y = -525 \\ \hline 1\,100y = 275 \end{array} \to y = 0{,}25$$

$3x + 0{,}25 \cdot 400 = 160 \to 3x = 60 \to x = 20$

La empresa cobra 20 € por día y 0,25 € por cada kilómetro recorrido.

28. **La diferencia de dos números es 6, y la de sus cuadrados, 144. Halla los números.**

Llamamos x e y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^2 - y^2 = 144 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} x = 6 + y \to x = 6 + 9 = 15 \\ (6 + y)^2 - y^2 = 144 \to 36 + 12y + y^2 - y^2 = 144 \to 12y = 108 \to y = 9 \end{array}$$

Los números son 15 y 9.

29. **Calcula dos números cuya suma sea 24, y su producto, 135.**

Llamamos x e y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 24 \\ xy = 135 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} y = 24 - x \\ x(24 - x) = 135 \to 24x - x^2 = 135 \to x^2 - 24x + 135 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 540}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \to y = 24 - 15 = 9 \\ 9 \to y = 24 - 9 = 15 \end{cases}$$

Los números son 9 y 15.

30. **Halla dos números cuya suma sea 20, y la de sus cuadrados, 232.**

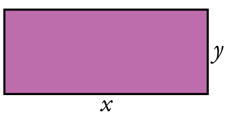
Llamamos x e y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 232 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} y = 20 - x \\ x^2 + (20 - x)^2 = 232 \to x^2 + 400 - 40x + x^2 = 232 \to x^2 - 20x + 84 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 336}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2} = \begin{cases} 14 \to y = 20 - 14 = 6 \\ 6 \to y = 20 - 6 = 14 \end{cases}$$

Los números son 6 y 14.

31. **El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?**



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ x \cdot y = 21 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{array}\right\} \to y = 10 - x$$

$$x(10 - x) = 21 \to -x^2 + 10x - 21 = 0 \to x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{-2} = \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{-2} =$$

$$= \frac{-10 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x_1 = 7 \to y_1 = 10 - 7 = 3 \\ x_2 = 3 \to y_2 = 10 - 3 = 7 \end{cases}$$

Las dimensiones del rectángulo son 3 cm y 7 cm.

Página 116

Resuelve problemas

32. **La edad de un padre es hoy el triple que la del hijo y hace 6 años era cinco veces la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

	EDAD ACTUAL	EDAD HACE 6 AÑOS
PADRE	x	$x-6$
HIJO	y	$y-6$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x - 6 = 5(y-6) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x - 5y = -24 \end{array}\right\} \text{ Método de sustitución}$$

$3y - 5y = -24 \rightarrow -2y = -24 \rightarrow y = 12$

El hijo tiene 12 años, y el padre, $3 \cdot 12 = 36$ años.

33. **La edad de un padre es hoy siete veces la edad del hijo y dentro de 10 años será solo el triple. Calcula la edad actual de cada uno.**

Recogemos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 10 AÑOS
PADRE	x	$x+10$
HIJO	y	$y+10$

$$\left.\begin{array}{l} x = 7y \\ x + 10 = 3(y+10) \end{array}\right\}$$

$7y + 10 = 3y + 30 \rightarrow 4y = 20 \rightarrow y = 5 \rightarrow x = 7 \cdot 5 = 35$

El padre tiene 35 años, y el hijo, 5 años.

34. **Se sabe que Noelia le saca 27 años a Marcos y que dentro de 12 años le doblará en edad. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Recogemos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 12 AÑOS
NOELIA	x	$x+12$
MARCOS	y	$y+12$

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 27 \\ x + 12 = 2(y+12) \end{array}\right\}$$

$y + 27 + 12 = 2y + 24 \rightarrow y + 39 = 2y + 24 \rightarrow 15 = y \rightarrow x = 15 + 27 = 42$

Noelia tiene 42 años, y Marcos, 15 años.

35. **El año que viene, la edad de Raquel será el triple que la de su hijo Iván, pero dentro de 12 años solo será el doble. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

	EDAD DENTRO DE 1 AÑO	EDAD DENTRO DE 12 AÑOS
RAQUEL	$x+1$	$x+12$
IVÁN	$y+1$	$y+12$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 = 3(y+1) \\ x + 12 = 2(y+12) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 3y + 2 \\ 3y + 12 + 2 = 2y + 24 \rightarrow y = 10 \rightarrow x = 32 \end{array}$$

Raquel tiene 32 años e Iván tiene 10 años.

36. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

37. **Un inversor dispone de 100 000 €. Invierte una parte en un banco que le paga el 4 % anual, y el resto, en unas acciones que le producen un 5 % al final del año. En total, gana 4 700 €. ¿Qué cantidad ha destinado a cada operación?**

x = inversión en el banco (€)

y = inversión en las acciones (€)

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 100\,000 \\ 4\% \text{ de } x + 5\% \text{ de } y = 4\,700 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + y = 100\,000 \\ 0,04x + 0,05y = 4\,700 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} x + \ \ y = 100\,000 \\ 4x + 5y = 470\,000 \end{array}\right\} \to x = 100\,000 - y$$

$4(100\,000 - y) + 5y = 470\,000 \to 400\,000 - 4y + 5y = 470\,000 \to y = 70\,000$

$x = 100\,000 - 70\,000 = 30\,000$

Solución: en el banco invierte 30 000 €.

En las acciones invierte 70 000 €.

38. **Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €. Después de algún tiempo, los vende por 2 157,50 €. Con el equipo de música perdió el 10 % de su valor, y con el ordenador, el 15 %. ¿Cuánto le costó cada uno?**

	P. COMPRA	P. VENTA
E. MÚSICA	x	$0,9x$
ORDENADOR	y	$0,85y$

$$\left.\begin{array}{l} x + \qquad y = 2\,500 \\ 0,9x + 0,85y = 2\,157,5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0,9x + 0,85\,(2\,500 - x) = 2\,157,5 \end{array}\right\}$$

$0,9x + 2\,125 - 0,85x = 2\,157,5 \to 0,05x = 32,5 \to x = 650 \to y = 2\,500 - 650 = 1\,850$

El equipo de música le costó 650 €, y el ordenador, 1 850 €.

39. **Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8 %, y el cuaderno tiene una rebaja del 10 %. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €. ¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?**

x = precio inicial de la calculadora (€)

y = precio inicial del cuaderno (€)

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10,80 \\ 108\% \text{ de } x + 90\% \text{ de } y = 11,34 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + y = 10,80 \\ 1,08x + 0,9y = 11,34 \end{array}\right\} \to x = 10,80 - y$$

$1,08(10,80 - y) + 0,9y = 11,34 \to 11,664 - 1,08y + 0,9y = 11,34 \to$

$\to 11,664 - 11,34 = 1,08y - 0,9y \to 0,324 = 0,18y \to y = \dfrac{0,324}{0,18} = 1,80$

$x = 10,80 - 1,80 = 9$

Solución: la calculadora costaba 9 €, y el cuaderno, 1,80 €.

40. **En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?**

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ A	x	6	$6x$
CAFÉ B	y	8,50	$8{,}50y$
MEZCLA	20	7	140

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 20 \\ 6x + 8{,}5y = 140 \end{array}\right\} \rightarrow x = 20 - y$$

$6(20 - y) + 8{,}5y = 140 \rightarrow 120 - 6y + 8{,}5y = 140 \rightarrow 2{,}5y = 20 \rightarrow y = 8$

$x = 20 - 8 = 12$

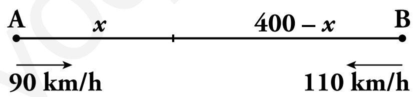
Necesitan 12 kg de café inferior y 8 kg de café superior.

41. **Por la mezcla de 5 kg de pintura verde y 3 kg de pintura blanca he pagado 63 €. Calcula el precio de la pintura blanca y de la pintura verde sabiendo que si mezclase un kilogramo de cada una el coste de la mezcla sería 15 €.**

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 63 \\ x + y = 15 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{array}{r} 5x + 3y = 63 \\ -3x - 3y = -45 \\ \hline 2x \quad = 18 \end{array} \rightarrow x = 9 \rightarrow y = 15 - 9 = 6$$

La pintura verde cuesta 9 € el kilogramo, y la blanca, 6 €.

42. **La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?**



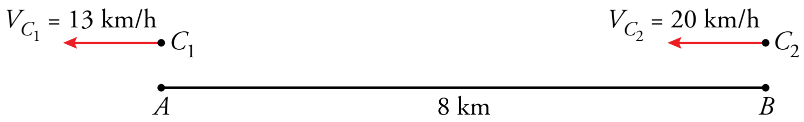
	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
A	x	90 km/h	t
B	$400 - x$	110 km/h	t

$v = \frac{s}{t}$

$$\left.\begin{array}{l} 90 = \frac{x}{t} \rightarrow x = 90t \\ 110 = \frac{400 - x}{t} \rightarrow 400 - x = 110t \end{array}\right\} \begin{array}{l} 400 - 90t = 110t \\ 400 = 200t \rightarrow t = 2 \end{array}$$

Se encontrarán al cabo de 2 h a $90 \cdot 2 = 180$ km de A.

43. **Dos pueblos, A y B, están en la misma carretera, a una distancia de 8 km. Un ciclista sale de A, alejándose de B, a una velocidad de 15 km/h. Veinte minutos más tarde, sale de B otro ciclista, a 20 km/h, con la intención de alcanzar al anterior. ¿Qué distancia habrá recorrido cada uno hasta el momento en que se produce el alcance?**



x = horas que tarda C_1 hasta que es alcanzado por C_2.

y = horas que tarda C_2 en alcanza a C_1.

$$\left.\begin{aligned} x &= y + 1/3 \\ 15x + 8 &= 20y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to C_2 \text{ sale 20 min más tarde que } C_1 \\ &\to C_2 \text{ recorre 8 km más que } C_1 \end{aligned}$$

$$15\left(y + \frac{1}{3}\right) + 8 = 20y \;\to\; 15y + 5 + 8 = 20y \;\to\; 13 = 5y \;\to\; y = \frac{13}{5} \text{ horas tarda } C_2$$

$$x = \frac{13}{5} + \frac{1}{3} = \frac{39+5}{15} = \frac{44}{15} \text{ horas tarda } C_1$$

El ciclista 1 recorre: $\frac{44}{15}$ h · 15 km/h = 44 km

El ciclista 2 recorre: $\frac{13}{5}$ h · 20 km/h = 52 km

44. **Un transportista va a una ciudad que está a 300 km de distancia. Al volver, su velocidad media ha sido superior en 10 km/h a la velocidad de ida, y ha tardado una hora menos. Calcula las velocidades y los tiempos empleados a la ida y a la vuelta.**

$$\left.\begin{aligned} &vt = 300 \\ &(v+10)(t-1) = 300 \end{aligned}\right\} \;\to\; vt + 10t - v - 10 = 300$$

$$\left.\begin{aligned} &vt = 300 \\ &10t - v - 10 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(10t - 10)\,t = 300 \;\to\; 10t^2 - 10t - 300 = 0 \;\to\; t^2 - t - 30 = 0 \\ &v = 10t - 10 \end{aligned}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} = \begin{cases} 6 \\ -5 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

300 : 6 = 50; 300 : 5 = 60

A la ida va a 50 km/h y tarda 6 horas. A la vuelta va a 60 km/h y tarda 5 horas.

Página 117

45. Ejercicio resuelto.

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

46. La suma de las dos cifras de un número es 5. Si invertimos el orden de las cifras, el número es 9 unidades menor que el inicial. ¿De qué número se trata?

x = cifra de las unidades

y = cifra de las decenas

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 10y + x + 9 = 10x + y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 5 \\ 9x - 9y = 9 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \to x = 1 + y$$

$1 + y + y = 5 \to 2y = 4 \to y = 2$

$x = 1 + 2 = 3$

Solución: el número buscado es 23.

47. La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18 unidades, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es ese número?

Número $\to \boxed{x}\boxed{y} \to y + 10x$

Número inverso $\to \boxed{y}\boxed{x} \to x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ y + 10x + 18 = x + 10y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 8 - y \\ -9y + 9(8 - y) + 18 = 0 \to -18y = -90 \to y = 5 \to x = 3 \end{array}$$

El número es el 35.

48. La edad actual de Rosa es el cuadrado de la de su hija y dentro de 9 años será solamente el triple. ¿Qué edad tiene cada una?

Organizamos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 9 AÑOS
ROSA	x	$x + 9$
HIJA	y	$y + 9$

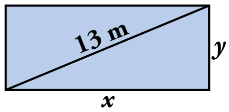
$$\left.\begin{array}{l} x = y^2 \\ x + 9 = 3(y + 9) \end{array}\right\}$$

$y^2 + 9 = 3y + 27 \to y^2 - 3y - 18 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} = \begin{cases} 6 \to x = 6^2 = 36 \\ -3 \quad \text{No es válida.} \end{cases}$$

Rosa tiene 36 años, y su hija, 6 años.

49. **Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 34 m, y su diagonal, 13 m.**



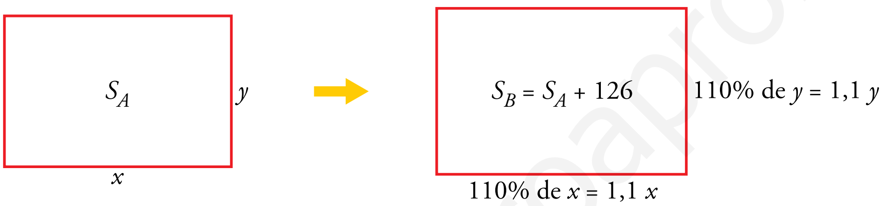
Aplica el teorema de Pitágoras.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 34 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + y = 17 \;\to\; y = 17 - x \\ x^2 + (17 - x)^2 = 169 \end{array}$$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0 \;\to\; x^2 - 17x + 60 = 0 \;\to\; \left.\begin{array}{l} x = 12 \text{ m} \;\to\; y = 5 \text{ m} \\ x = 5 \text{ m} \;\to\; y = 12 \text{ m} \end{array}\right\}$$

Los lados del rectángulo miden 12 m y 5 m.

50. **Una pista rectangular de patinaje, con un perímetro de 100 metros, va a sufrir una reforma que le hará ganar un 10 % a lo ancho y otro 10 % a lo largo. Así aumentará su superficie en 126 m^2. ¿Cuáles eran las medidas primitivas de la pista?**



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 100 \\ 1{,}1x \cdot 1{,}1y = x \cdot y + 126 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 1{,}21xy - xy = 126 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 0{,}21xy = 126 \end{array}\right\} \to x = 50 - y$$

$$0{,}21(50 - y) \cdot y = 126 \;\to\; 10{,}5y - 0{,}21y^2 - 126 = 0 \;\to\; 21y^2 - 1\,050y + 12\,600 = 0 \;\to$$

$$\to y^2 - 50y + 600 = 0$$

$$y = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 600}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{50 \pm 10}{2} = \begin{cases} \dfrac{50 + 10}{2} = 30 \\[2mm] \dfrac{50 - 10}{2} = 20 \end{cases}$$

Si $y = 30 \to x = 50 - 30 = 20$

Si $y = 20 \to x = 50 - 20 = 30$

Solución: las dimensiones iniciales de la pista son 30 m de largo y 20 m de ancho.

51. **Un tren de mercancías sale de A hacia B a la vez que uno de viajeros de B hacia A, y tardan 20 minutos en cruzarse. ¿Cuánto tarda cada uno en cubrir el recorrido completo, sabiendo que el de mercancías lo hace en 30 minutos más que el de viajeros?**

Para hacer su recorrido, el tren de mercancías tarda x minutos. Así, en un minuto recorre $\frac{1}{x}$ de la distancia total.

Por otro lado, el tren de pasajeros tarda y minutos en hacer ese mismo recorrido, en sentido contrario. Por tanto, en un minuto recorre $\frac{1}{y}$ de la distancia total.

Entre los dos tardan en hacer el recorrido 20 minutos: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$.

El tren de mercancías tarda 30 minutos más que el de pasajeros en hacer el recorrido: $x = y + 30$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \\ x = y + 30 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 20y + 20x = xy \\ x = y + 30 \end{array}\right\} \rightarrow 20y + 20(y + 30) = (y + 30)y \rightarrow$$

$$\rightarrow 40y + 600 = y^2 + 30y \rightarrow y^2 - 10y - 600 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 2\,400}}{2} = \frac{10 \pm 50}{2} = \begin{cases} y_1 = 30 \\ y_2 = -20 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

Si $y = 30 \rightarrow x = 30 + 30 = 60$

El tren de mercancías tarda 60 minutos, y el de pasajeros, 30 minutos.

Problemas "+"

52. **Un joyero tiene dos lingotes de oro, uno con un 80 % de pureza y otro con un 95 %. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kg con un 86 % de pureza?**

$$\left.\begin{array}{l} 0,8x + 0,95y = 0,86\,(x + y) \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5 - y$$

$0{,}8(5 - y) + 0{,}95y = 0{,}86(5 - y + y) \rightarrow 4 - 0{,}8y + 0{,}95y = 4{,}3 \rightarrow 0{,}15y = 0{,}3 \rightarrow y = 2$

$x = 3$

Debe fundir 3 kg de 80 % de pureza con 2 kg del lingote que tiene un 95 % de pureza.

53. **¿Cuántos litros de leche con un 10 % de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4 % de grasa para obtener 18 litros con un 6 % de grasa?**

$x \rightarrow$ litros de leche con un 10 % de grasa

$y \rightarrow$ litros de leche con un 4 % de grasa

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 18 \\ 0,1x + 0,04y = 0,06\,(x + y) \end{array}\right\} 0{,}04x = 0{,}02y \rightarrow y = 2x$$

$x + 2x = 18 \rightarrow 3x = 18 \rightarrow x = 6,\ y = 12$

Hemos de mezclar 6 litros de leche de un 10 % de grasa con 12 litros de leche de un 4 % de grasa.

54. **La edad actual de una madre es el cuadrado de la que tendrá su hija dentro de dos años, momento en el que la edad de la hija será la sexta parte de la edad que tiene ahora la madre. Calcula la edad de ambas.**

Organizamos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 2 AÑOS
MADRE	x	$x + 2$
HIJA	y	$y + 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = (y+2)^2 \\ y + 2 = \dfrac{1}{6}x \end{array}\right\} \; x = \left(\frac{1}{6}x\right)^2 \to \frac{1}{36}x^2 - x = 0 \to x\left(\frac{1}{36}x - 1\right) = 0 \to \frac{1}{36}x - 1 = 0 \to$$

$$\to \frac{1}{36}x = 1 \to x = 36 \to y = 4$$

La madre tiene 36 años, y su hija, 4 años.

Curiosidades matemáticas

Ecuaciones diofánticas

Las ecuaciones diofánticas se caracterizan por tener soluciones naturales (algunas veces, enteras). Se llaman así en honor a Diofanto de Alejandría, matemático del siglo III, considerado el primer algebrista.

Te proponemos dos problemas para resolver con *ecuaciones diofánticas*.

Son problemas abiertos que pueden tener varias soluciones, pero eso lo tienes que averiguar tú. Si hay varias, has de encontrarlas todas.

PROBLEMA 1

Tenemos un mueble del que se ha roto una pata de 4 cm de altura. Para equilibrarlo provisionalmente, disponemos de varios discos de madera, unos de 5 mm de grosor y otros de 3 mm. ¿Cuántos discos de cada clase usaremos?

4 cm = 40 mm

$x \to$ número de discos de 5 mm.

$y \to$ número de discos de 3 mm.

$5x + 3y = 40$

Como 40 es múltiplo de 5 y con los discos x siempre cubriremos un múltiplo de 5, necesitamos que $3y$ sea múltiplo de 5 y menor que 40.

Como también es múltiplo de 3:

$3y = 15 \to y = 5 \to 5x + 15 = 40 \to x = 5$

$3y = 30 \to y = 10 \to 5x + 30 = 40 \to x = 2$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 5;\ x_2 = 2,\ y_2 = 10$

PROBLEMA **2**

En un test de 20 preguntas se consiguen 5 puntos por cada respuesta correcta, se pierden 3 por cada respuesta errónea, y otros 2 por cada pregunta sin contestar. ¿Qué tiene que ocurrir para obtener una calificación de 0 puntos? ¿Y para obtener 50?

$x \rightarrow$ número de aciertos

$y \rightarrow$ número de errores

$z \rightarrow$ número de preguntas sin contestar

Para obtener 0 puntos se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 5x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Para obtener 50 puntos necesitamos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 5x - 3y - 2z = 50 \end{array}\right\}$$

1 Conceptos básicos

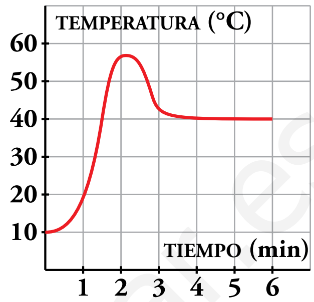
Página 121

1. **Esta gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo que se mantiene un rato abierto.**

a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?



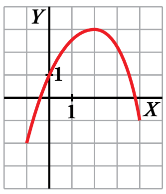
a) Variable independiente → tiempo (min)

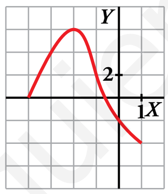
Variable dependiente → temperatura (°C)

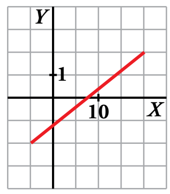
b) Para cada valor del tiempo hay un único valor de temperatura.

c) Dominio = [0, 6]; Recorrido = [10, 58]

2. **Indica el dominio y el recorrido de estas funciones:**

a)


b)


c)


a) *Dom f* = [–1, 4]

Rec f = [–2, 3]

b) *Dom f* = [–4, 1]

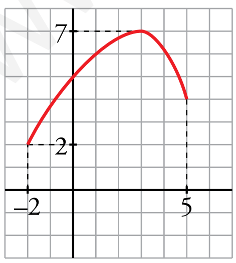
Rec f = [–4, 6]

c) *Dom f* = [–5, 20]

Rec f = [–2, 2]

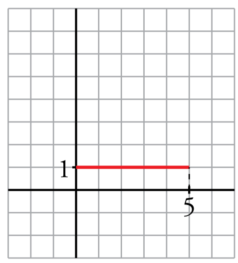
3. **Representa una función cuyos dominio y recorrido sean, respectivamente, [–2, 5] y [2, 7]. Inventa otra con dominio [0, 5] y recorrido {1}.**

Ejercicio de respuesta abierta. Una posible solución sería:



Dom f = [–2, 5]

Rec f = [2, 7]



Dom f = [0, 5]

Rec f = {1}

2 Cómo se presentan las funciones

Página 122

1. Vamos a analizar la gráfica de arriba correspondiente al precio de la vivienda:

a) ¿Qué quiere decir que la gráfica arranque en el 100 %? ¿Te parece razonable?

b) El máximo fue del 115 %. ¿En qué momento ocurrió? Contesta aproximadamente.

c) ¿Cuál fue el mínimo? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿Cuál fue el índice del precio en el 2006?

a) La gráfica describe la variación (en %) del precio de la vivienda en una región desde 1992 hasta 2016.

Que comience en 100 % significa que se toma como precio de referencia para analizar dicha variación el precio de la vivienda en 1992; lo cual es razonable ya que en ese año comienza el estudio.

b) En el año 2005.

c) El mínimo fue del 87 % aproximadamente. Sucedió en 2013.

d) 110 %, es decir, en el año 2006 el precio de la vivienda había aumentado un 10 % respecto al año 1992.

2. Fíjate en las funciones *altura sobre el nivel del mar - tiempo transcurrido* que se han descrito más arriba referentes a las excursiones realizadas por Félix y María.

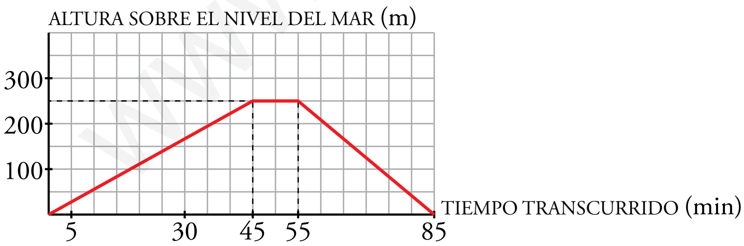
a) Representa la gráfica correspondiente a Félix.

b) Representa la gráfica correspondiente a María.

c) Si compararas las dos gráficas anteriores con las de tus compañeros, ¿cuáles serían más parecidas, las de Félix o las de María? Explica por qué.

a) Respuesta abierta (la información proporcionada en el enunciado hace que existan diferentes respuestas a esta pregunta).

b)



c) Las de María, porque tenemos datos (situación de la casa respecto al nivel del mar, tiempo que tarda en ascender la colina, altura de esta respecto al nivel del mar…) que permiten representar la gráfica con mayor precisión. En el caso de Félix, al no disponer de dicha información, existen diferentes posibilidades para representar el enunciado en una gráfica.

Página 123

3. En el EJEMPLO 1, ¿cuántas fotocopias debes pedir como mínimo para que te salga más caro que hacer 199?

Hacer 199 fotocopias cuesta $199 \cdot 0{,}08 = 15{,}92$ €. Con esa cantidad, y a un precio de 0,07 € por unidad, se pueden hacer $15{,}92 : 0{,}07 = 227{,}43$.

Es decir, hay que pedir 228 fotocopias o más para que salga más caro que hacer 199 fotocopias.

4. En el EJEMPLO 2, calcula la distancia que recorre la bola en 1 s, 2 s y 3 s. ¿Cuánto tarda en recorrer 2 m?

$t = 1$ segundo $\rightarrow$ $e = 10 \cdot 1^2 = 10$ cm

$t = 2$ segundos $\rightarrow$ $e = 10 \cdot 2^2 = 40$ cm

$t = 3$ segundos $\rightarrow$ $e = 10 \cdot 3^2 = 90$ cm

Calculamos en qué tiempo la bola recorre 2 m = 200 cm:

$200 = 10 \cdot t^2 \rightarrow t^2 = 20 \rightarrow t = \sqrt{20} = 4{,}47$ segundos

5. En el EJEMPLO 3:

a) Calcula el periodo de un péndulo de 1 m de largo.

b) ¿Cuál es la longitud de un péndulo cuyo periodo es de 6 segundos?

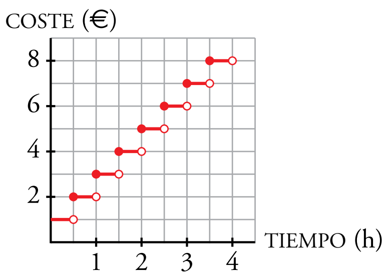
a) $l = 1$ m $\rightarrow$ $T = \sqrt{4 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2$ segundos

b) $T = 6$ segundos $\rightarrow$ $6 = \sqrt{4l} \rightarrow 36 = 4l \rightarrow l = 9$ m

3 Funciones continuas. Discontinuidades

Página 124

1. **Construye una función similar a la ①, pero para el caso de que se pague 1 € cada media hora. ¿Cuál de las opciones de pago te parece más justa?**



Esta opción de pago es más justa que la del ejemplo.

2. **Analiza la función ③ para valores "próximos a 2". Comprueba que cuando x vale 1,9; 1,99; 1,999; 2,01; 2,001, la y toma valores "muy grandes".**

$$x = 1{,}9 \to y = \frac{1}{(1{,}9 - 2)^2} = 100$$

$$x = 1{,}99 \to y = \frac{1}{(1{,}99 - 2)^2} = 10^4$$

$$x = 1{,}999 \to y = \frac{1}{(1{,}999 - 2)^2} = 10^6$$

$$x = 2{,}01 \to y = \frac{1}{(2{,}01 - 2)^2} = 10^4$$

$$x = 2{,}001 \to y = \frac{1}{(2{,}001 - 2)^2} = 10^6$$

4 Crecimiento, máximos y mínimos

Página 125

1. Observa la función de la derecha y responde:

a) ¿En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente?

b) ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

a) Crece en (–5, –3) ∪ (5, +∞).

Decrece en (–∞, –5) ∪ (–3, 5).

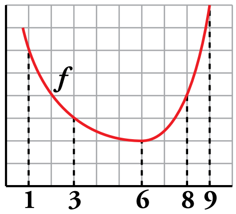
b) Máximo relativo en el punto (–3, 5).

Mínimos relativos en los puntos (–5, 3) y (5, –2).

5 Tasa de variación media (T.V.M.)

Página 126

1. Halla la tasa de variación media (T.V.M.) de la función *f* representada, en los intervalos [1, 3], [3, 6], [6, 8], [8, 9] y [3, 9].



T.V.M. $[1, 3] = \frac{3-6}{3-1} = \frac{-3}{2}$

T.V.M. $[3, 6] = \frac{2-3}{6-3} = -\frac{1}{3}$

T.V.M. $[6, 8] = \frac{4-2}{8-6} = 1$

T.V.M. $[8, 9] = \frac{8-4}{9-8} = 4$

T.V.M. $[3, 9] = \frac{8-3}{9-3} = \frac{5}{6}$

2. Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 4x + 5$ (PROBLEMA RESUELTO 2) en [0, 2], [1, 3] y [1, 4].

T.V.M. $[0, 2] = \frac{1-5}{2} = -2$

T.V.M. $[1, 3] = \frac{2-2}{3-1} = 0$

T.V.M. $[1, 4] = \frac{5-2}{4-1} = 1$

3. Halla la velocidad media de la piedra del PROBLEMA RESUELTO 3 en los intervalos [0, 1], [0, 3], [3, 4] y [4, 8].

T.V.M. $[0, 1] = \frac{35-0}{1-0} = 35$

T.V.M. $[0, 3] = \frac{75-0}{3-0} = 25$

T.V.M. $[3, 4] = \frac{80-75}{4-3} = 5$

T.V.M. $[4, 8] = \frac{0-80}{8-4} = -20$

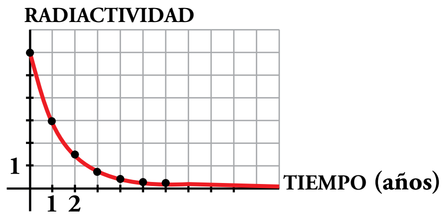
Los resultados están expresados en m/s.

6 Tendencia

Página 127

1. **La cantidad de radiactividad que posee una sustancia se reduce a la mitad cada año. La gráfica adjunta describe la cantidad de radiactividad que hay en una porción de esa sustancia al transcurrir el tiempo.**

¿A cuánto *tiende* la radiactividad con el paso del tiempo?

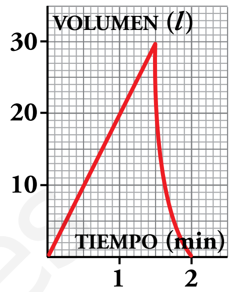


La radiactividad, con el paso del tiempo, tiende a cero.

7 Periodicidad

Página 128

1. La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía, automáticamente, cada dos minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica adjunta.

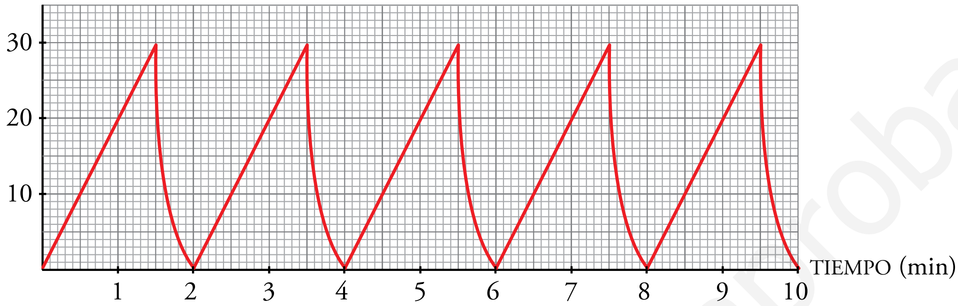


a) Dibuja la gráfica correspondiente a 10 min.

b) ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en los siguientes instantes?

I) 17 min **II) 40 min 30 s** **III) 1 h 9 min 30 s**

a)

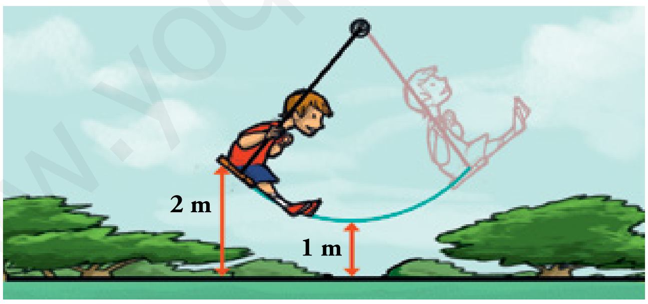


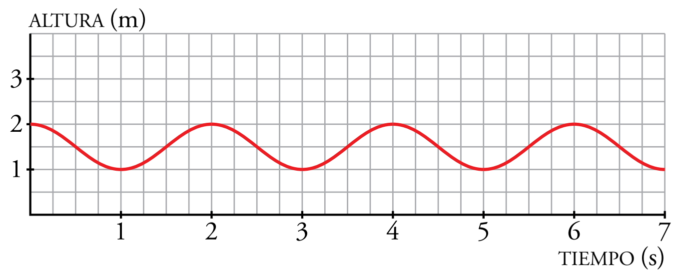
b) I) $f(17) = f(1) = 20$ litros

II) $f(40 \text{ min } 30 \text{ s}) = f(30 \text{ s}) = 10$ litros

III) $f(1 \text{ h } 9 \text{ min } 30 \text{ s}) = f(1 \text{ min } 30 \text{ s}) = 30$ litros

2. Representa en unos ejes la altura a la que está el niño con el paso del tiempo, si cada balanceo (ida y vuelta) dura 4 segundos.





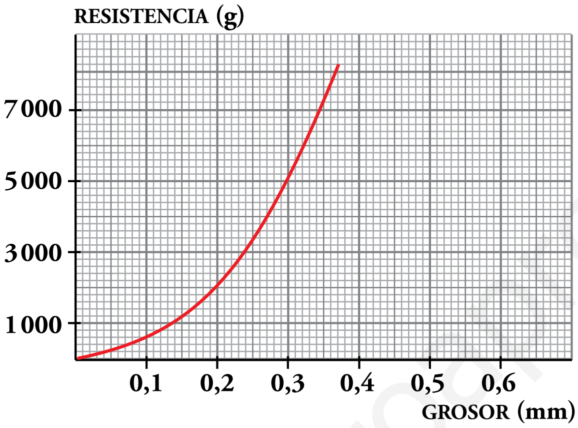
Ejercicios y problemas

Página 129

Practica

Interpretación de gráficas

1. **La siguiente gráfica relaciona la resistencia de un tipo de sedal de pesca con su grosor:**



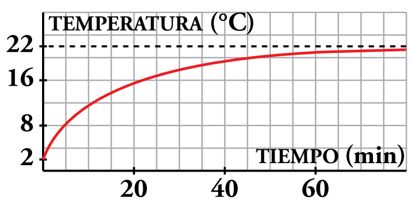
a) ¿Qué grosor debe tener el sedal de un pescador que quiera pescar truchas que no superen los 2 kg?

b) ¿Con cuántos gramos se podría romper un sedal de 0,22 de grosor? ¿Y de 0,35 mm?

a) 0,2 mm

b) Un sedal de 0,22 mm de grosor se podría romper con unos 2400 gramos y uno de 0,35 mm de grosor con unos 7200 gramos.

2. **Hemos sacado de la nevera un vaso con agua. Esta gráfica muestra la temperatura del agua (en grados centígrados) al pasar el tiempo:**

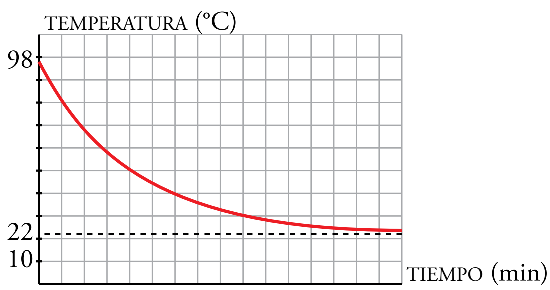


a) ¿Qué temperatura hay dentro de la nevera? ¿Y fuera?

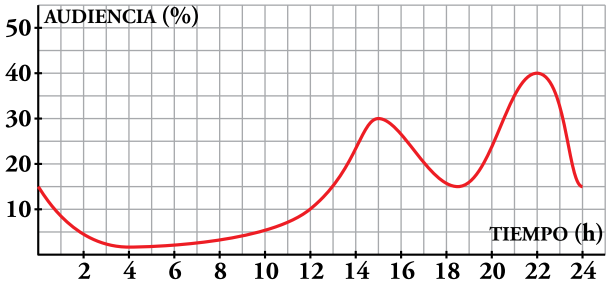
b) Sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C. Dibuja una gráfica que muestre la temperatura del agua al pasar el tiempo.

a) Dentro de la nevera hay 2 °C y fuera 22 °C.

b)



3. **Esta curva muestra la audiencia de televisión en España en un día promedio de abril de 2016. ¿Cuáles son los momentos de más audiencia? Descríbela.**



La audiencia (en %) disminuye entre las 0 h (24 h del día anterior) y las 4 h, alcanzando a esta hora su mínimo absoluto.

A partir de este momento aumenta hasta las 15 h, instante en el que vuelve a decrecer hasta las 18,5 h. Desde las 18,5 h hasta las 22 h aumenta, alcanzando a esta hora su máximo absoluto. A partir de las 22 h vuelve a decrecer.

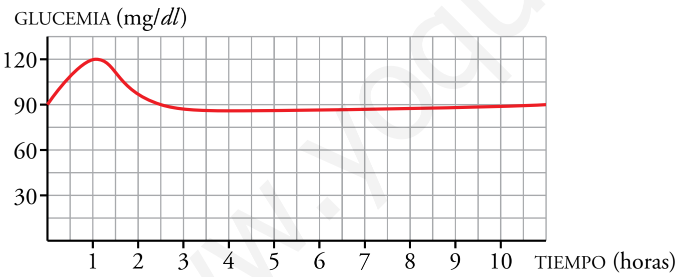
Enunciados, fórmulas y tablas

4. **Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. Luego, en las 3 h siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 h.**

a) Representa la curva de glucemia en el tramo desde que ingiere la glucosa hasta que vuelve a su nivel normal.

b) Indica en qué momentos alcanza su máximo y en cuáles su mínimo.

a)



b) El máximo es de 120 mg/*gl* al cabo de 1 h de iniciar la toma. El mínimo está ligeramente por debajo de 90 mg/*dl* y se alcanza a las 4 h de iniciar la toma.

La tendencia de la función es 90 mg/*dl* (tener la glucemia en un nivel normal).

5. **Un nadador se deja caer desde un trampolín. Su entrenador ha medido el espacio que recorre cada cuatro décimas de segundo mediante un método fotográfico. Obtiene la siguiente tabla:**

TIEMPO (s)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8
ESPACIO (m)	0	0,8	3,1	7,1	12,5	14	14,5	15

El nadador frena por completo a los 15 m.

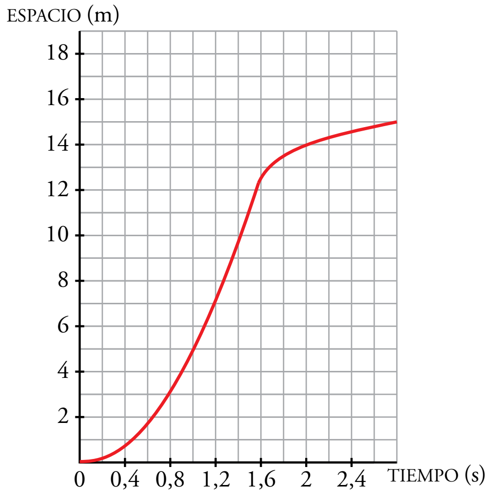
a) Representa la gráfica *espacio-tiempo*.

b) ¿Podrías decir en qué momento entró en el agua?

c) ¿Qué velocidad estimas que llevaba en el momento de entrar en el agua?

d) ¿Qué altura tiene el trampolín?

a)



b) Entró en el agua a los 1,6 segundos de haber saltado.

c) Estimamos la velocidad calculando la T.V.M. en el intervalo [1,2; 1,6]:

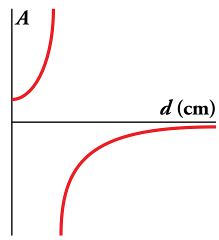
$$\text{T.V.M. } [1,2;\ 1,6] = \frac{12,5-7,1}{1,6-1,2} = \frac{5,4}{0,4} = 13,5$$

Estimamos que la velocidad era de 13,5 m/s.

d) El trampolín tiene unos 12 m de altura.

6. **El aumento, A, del tamaño de un objeto que se mira a través de una lupa viene dado por esta fórmula y la gráfica de la derecha:**

$$A = \frac{2}{2-d}$$



La variable d es la distancia de la lupa al objeto, en cm, y la variable A es el aumento (número por el que se multiplica el tamaño real).

a) Calcula el tamaño aparente, A, de un objeto para los siguientes valores de d:

0; 0,5; 1; 1,5; 1,9; 1,99

b) Para $d = 4$ se obtiene $A = -1$. Eso significa que el objeto se ve del mismo tamaño, pero invertido. Interpreta los valores de A para estos valores de d:

10; 5; 2,4; 2,1; 2,01

a) $d = 0 \to A = 1$ $\quad d = 0,5 \to A = 4/3$ $\quad d = 1 \to A = 2$

$d = 1,5 \to A = 4$ $\quad d = 1,9 \to A = 20$ $\quad d = 1,99 \to A = 200$

b) $d = 10 \to A = -\frac{1}{4}$ El objeto se ve a $\frac{1}{4}$ de su tamaño e invertido.

$d = 5 \to A = -\frac{2}{3}$ El objeto se ve a $\frac{2}{3}$ de su tamaño e invertido.

$d = 2,4 \to A = -5$ El objeto se ve a 5 veces su tamaño e invertido.

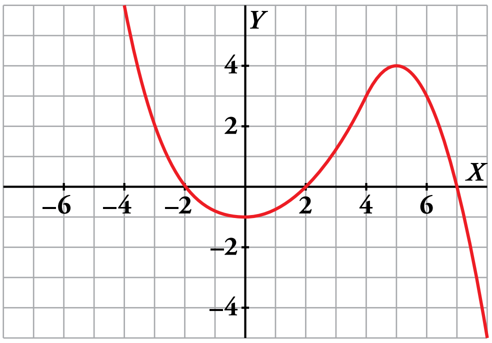
$d = 2,1 \to A = -20$ El objeto se ve a 20 veces su tamaño e invertido.

$d = 2,01 \to A = -200$ El objeto se ve a 200 veces su tamaño e invertido.

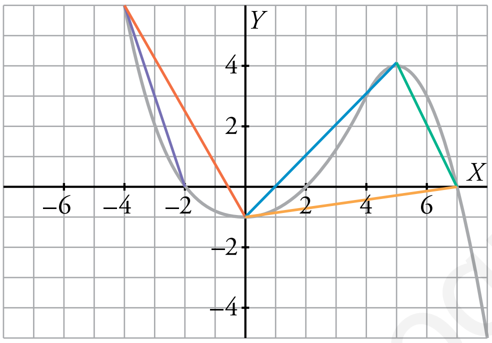
Página 130

Características de una función

7. **Observa esta función y halla su T.V.M. en los intervalos [0, 4], [0, 5], [5, 7], [0, 7], [–4, 0] y [–4, –2].**



Copia en tu cuaderno la gráfica y dibuja en cada caso el segmento del cual estás hallando la pendiente.



$$\text{T.V.M. } [0, 4] = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [0, 5] = \frac{4+1}{5} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [5, 7] = \frac{0-4}{7-5} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [0, 7] = \frac{0+1}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, 0] = \frac{-1-6}{0+4} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \frac{0-6}{-2+4} = -3$$

8. **Halla la T.V.M. de $y = 3x^3 + 9x^2 - 3x - 9$ en los intervalos [–2, 0], [–1, 0], [–3, –1] y [0, 1].**

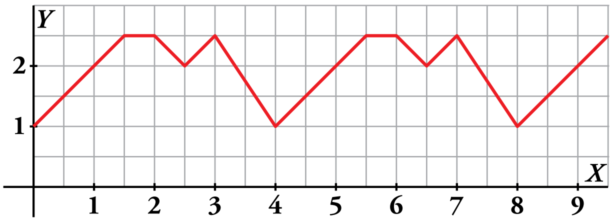
$$\text{T.V.M. } [-2, 0] = \frac{-9-9}{0+2} = -9$$

$$\text{T.V.M. } [-1, 0] = \frac{-9-0}{0+1} = -9$$

$$\text{T.V.M. } [-3, -1] = \frac{0-0}{-1+3} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [0, 1] = \frac{0+9}{1} = 9$$

9. Explica por qué es periódica esta función:

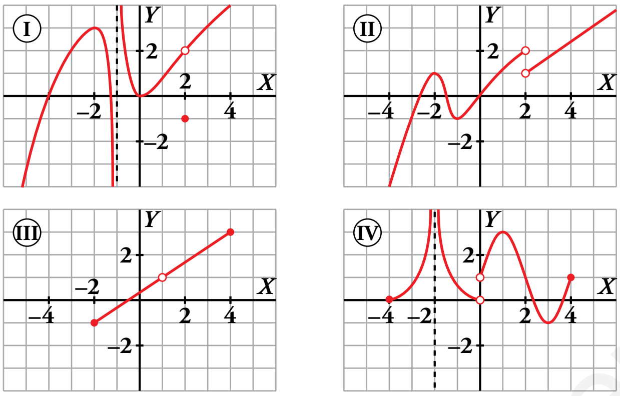


Da su periodo y los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

La función es periódica de periodo 4.

$f(1) = 2$; $f(3) = 2{,}5$; $f(20) = f(0) = 1$; $f(23) = f(3) = 2{,}5$; $f(42) = f(2) = 2{,}5$

10. Observa estas gráficas discontinuas y contesta:



a) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad? Explica la razón de discontinuidad en cada punto.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) Indica, si tiene, los máximos y los mínimos relativos.

d) ¿En qué intervalos es creciente? ¿Y decreciente?

a) (I) $\begin{cases} \text{Discontinua en } x = -1. \text{ Tiene ramas infinitas.} \\ \text{Discontinua en } x = 2. \text{ Tiene un punto desplazado.} \end{cases}$

(II) Discontinua en $x = 2$. No está definida en este punto y, además, en él da un salto.

(III) $\begin{cases} \text{Discontinua en } (-\infty, -2) \cup (4, +\infty). \text{ No está definida.} \\ \text{Discontinua en } x = 1 \text{ porque no está definida.} \end{cases}$

(IV) $\begin{cases} \text{Discontinua en } (-\infty, -4) \cup (4, +\infty). \text{ No está definida.} \\ \text{Discontinua en } x = -2. \text{ Tiene ramas infinitas.} \\ \text{Discontinua en } x = 0. \text{ No está definida y presenta un salto.} \end{cases}$

b) *Dom* (I) = $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ *Dom* (II) = $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Dom (III) = $[-2, 1) \cup (1, 4]$ *Dom* (IV) = $[-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 4]$

c) (I) Máximo relativo en $(-2, 3)$. Mínimo relativo en $(0, 0)$

(II) Máximo relativo en $(-2, 1)$. Mínimo relativo en $(-1, -1)$.

(III) No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

(IV) Máximo relativo en $(1, 3)$. Mínimo relativo en $(3, -1)$.

d) (I) Crece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

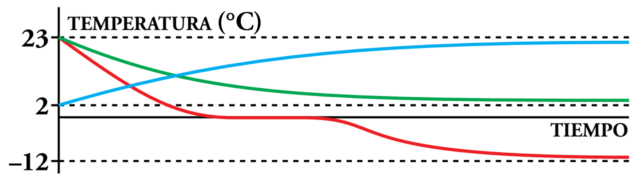
(II) Crece en $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1)$.

(III) Crece en $(-2, 1) \cup (1, 4)$. No decrece.

(IV) Crece en $(-4, -2) \cup (0, 1) \cup (3, 4)$. Decrece en $(-2, 0) \cup (1, 3)$.

Piensa y resuelve

11. **Observa las siguientes gráficas de funciones:**



a) Relaciona cada curva con estos enunciados sobre la temperatura de un vaso de agua:

I. Cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Cuando se saca de la nevera y se deja en la mesa.

III. Cuando pasa de la mesa al congelador.

b) ¿A qué temperatura está la casa? ¿Y el congelador? ¿Y la nevera?

a) I - verde. II - azul. III - roja.

b) La casa está a 23 °C, el congelador a –12 °C y la nevera a 2 °C.

12. **El entrenador de tres nadadores, A, B y C, ha medido cada 5 minutos las distancias recorridas hasta ese momento por cada uno de ellos:**

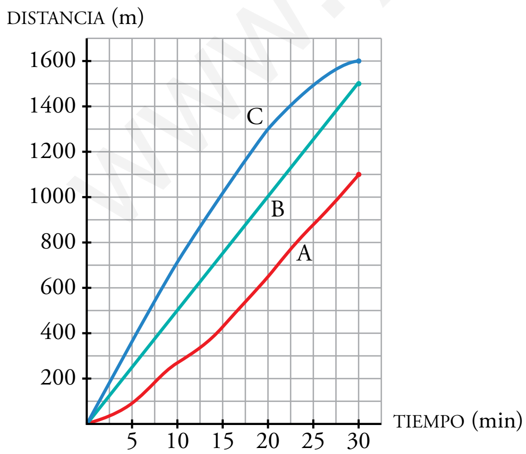
TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

a) En unos mismos ejes, dibuja la gráfica *distancia-tiempo* de los tres nadadores. Descríbelas.

b) ¿Hubo algún adelantamiento durante los 30 min?

c) Calcula la velocidad media de cada uno.

a)



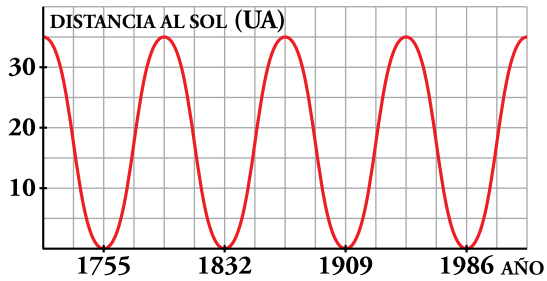
b) No ha habido ningún adelantamiento.

c) $V_m\,(A) = \dfrac{1100}{30} = 36{,}67$ m/min

$V_m\,(B) = \dfrac{1500}{30} = 50$ m/min

$V_m\,(C) = \dfrac{1600}{30} = 53{,}3$ m/min

13. **La órbita del cometa Halley es una elipse muy excéntrica, uno de cuyos focos es el Sol. Esta curva representa la función que relaciona la distancia del cometa al Sol con el paso del tiempo:**



a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿En qué año volverá a acercarse al Sol?

a) Es una función periódica de periodo $T = 1\,832 - 1\,755 = 77$ años.

b) $1\,986 + 77 = 2\,063 \rightarrow$ El año 2063

Página 131

14. **La gráfica adjunta describe el valor de una empresa desde que se fundó.**

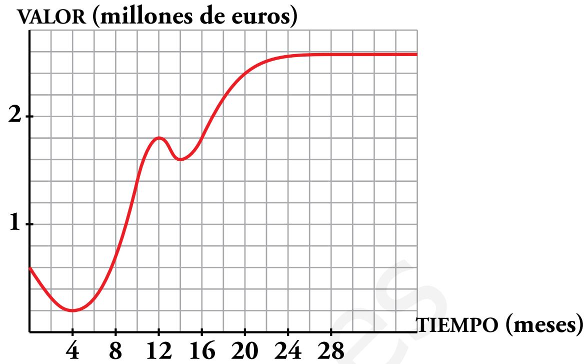
a) ¿Cuál era su valor en el momento de la apertura?

b) ¿A cuánto se redujo su valor después de 4 meses?

c) ¿Cuál es la T.V.M. en el intervalo [4, 12]? Da el resultado en miles de euros por mes.

d) ¿Cuál parece la tendencia de esta función para los próximos meses?

e) Haz una descripción global del valor de esta empresa en sus tres primeros años.



a) El valor de la empresa en el momento de la apertura era de 600 000 €.

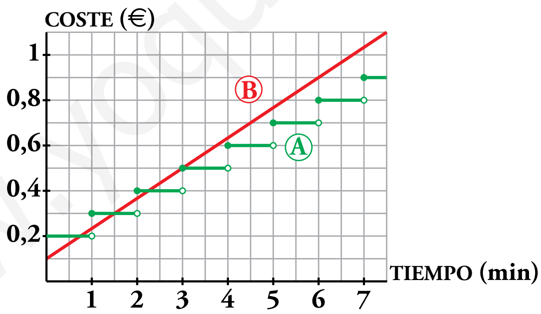
b) Después de 4 meses su valor se redujo a 200 000 €.

c) T.V.M. [4, 12] = $\dfrac{1\,800\,000 - 200\,000}{12 - 4}$ = 200 000 €/mes

d) Parece que el valor de la empresa, para los próximos meses, tiende a 2 600 000 €.

e) El valor de la empresa tiene un brusco descenso en los cuatro primeros meses. A partir de aquí crece rápidamente durante 8 meses y tiene una ligera caída en los dos meses siguientes. A partir del mes 14.º crece rápidamente durante otros 6 meses y después cada vez más despacio. Su precio se aproxima a 2 600 000 €.

15. **Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:**



a) Determina cuánto vale una llamada de 3 min con cada compañía. ¿Y una de media hora?

b) Razona por qué elegirías una u otra compañía.

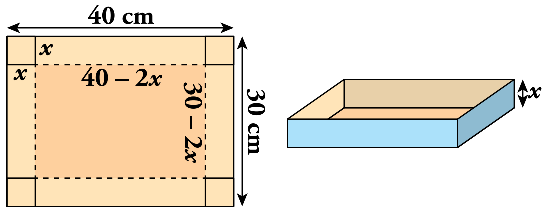
a) Una llamada de 3 min cuesta 0,50 € en cualquiera de las dos compañías.

La compañía A cobra 3,20 € por 30 minutos.

La compañía B cobra 0,10 € más 0,40 € por cada 3 min. Por tanto, por 30 min cobrará 0,1 + 0,40 · 10 = 4,10 €.

b) Si habitualmente hiciera llamadas cortas (de 3 min o menos), contrataría con B. Si hiciera llamadas largas con frecuencia, contrataría con la compañía A.

16. **Con una cartulina que mide 40 cm × 30 cm queremos construir una caja. Para ello, cortamos un cuadrado de lado x en cada esquina.**



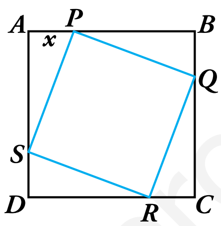
Halla la función que relaciona el volumen de la caja con la longitud del lado de los cuadrados cortados.

Si cortamos un cuadrado de lado x en cada esquina, el rectángulo que obtenemos como base de la caja tiene dimensiones $40 - 2x$ de largo y $30 - 2x$ de ancho. La altura de la caja será x.

Por tanto, el volumen en función de x es:

$$V = (40 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 140x^2 + 1\,200x$$

17. **Dibuja un cuadrado $ABCD$ de 7 cm de lado. Sobre el lado AB, marca un punto P que diste x de A, y dibuja un nuevo cuadrado $PQRS$ inscrito en el anterior.**



a) Observa que si el valor de x es 3 cm, entonces $\overline{AS} = 7 - 3 = 4$ cm. ¿Cuánto mide $\overline{PS}$? ¿Cuál es el área del nuevo cuadrado?

b) Construye la gráfica de la función que relaciona x (con valores de 0 a 7) con el área del cuadrado inscrito.

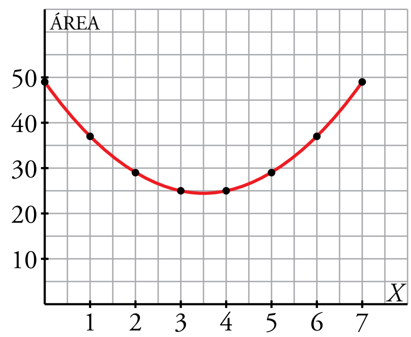
a) $\overline{PS} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm. Área del cuadrilátero interior $= 5^2 = 25$ cm^2

b) $A = \left(\sqrt{x^2 + (7 - x)^2}\right)^2 =$

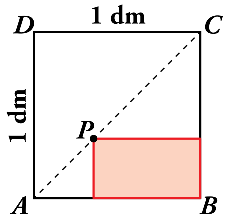
$= x^2 + 49 + x^2 - 14x =$

$= 2x^2 - 14x + 49$

x	ÁREA
0	49
1	37
2	29
3	25
4	25
5	29
6	37
7	49



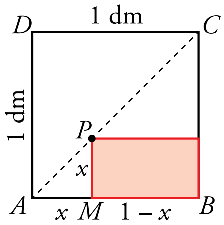
18. **En un cuadrado *ABCD* de lado 1 dm dibuja la diagonal *AC*. Para cada punto *P* de esta diagonal, se forma un rectángulo, como en la figura.**



a) Halla el área del rectángulo cuando *P* dista de *AB*: 1/4 dm, 1/2 dm y 3/4 dm.

b) Dibuja la gráfica de la función que relaciona la distancia de *P* a *AB* con el área del rectángulo.

a)



$$\left.\begin{array}{l}\text{Los triángulos } \widehat{ABC} \text{ y } \widehat{AMP} \text{ son semejantes} \\ \text{(son rectángulos con un ángulo agudo común)} \\ \widehat{ABC} \text{ es isósceles } (\overline{AB} = \overline{BC} = 1 \text{ dm})\end{array}\right\} \to \widehat{AMP} \text{ también es isósceles}$$

Sea $x = \overline{AM} \to \overline{PM} = \overline{AM} = x$ y $\overline{MB} = 1 - x$

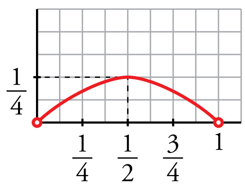
$$\left.\begin{array}{l} x = \overline{PM} \\ y = \text{área del rectángulo}\end{array}\right\} \to y = x \cdot (1 - x) \to y = -x^2 + x$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ dm} \to y = -\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \to y = \frac{3}{16} \text{ dm}^2$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ dm} \to y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \to y = \frac{1}{4} \text{ dm}^2$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ dm} \to y = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \to y = \frac{3}{16} \text{ dm}^2$$

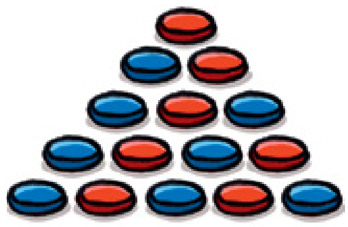
b) $y = -x^2 + x$



Curiosidades matemáticas

Juego para dos

Se colocan 15 fichas sobre la mesa, como en el dibujo siguiente.



Cada jugador retira, por turno, y según su elección, una, dos o tres fichas cualesquiera. Quien retire la última, pierde.

Experimenta el juego y analiza lo que ocurre, cuándo se gana y cuándo se pierde.

Después, redacta por escrito lo que has descubierto:

- **¿Lleva ventaja el jugador que sale?**
- **¿Cuál es la mejor jugada para empezar?**
- **¿Cuál es la estrategia ganadora?**
- **...**

- Empezamos experimentando el juego con 2, 3 y 4 fichas:

  → Quien empieza, retira 1 ficha y *gana*.

  → Quien empieza, retira 2 fichas y *gana*.

  → Quien empieza, retira 3 fichas y *gana*.

- Experimentamos con 5 fichas:

  → Quien empieza puede retirar 1, 2 o 3 fichas, dejando 4, 3 o 2 al contrario (casos anteriores), que será quien gane.

  Con 5 fichas, quien empieza pierde.

- Experimentamos con 6, 7 y 8 fichas.

  Quien empieza retira 1 (si hay 6), 2 (si hay 7) o 3 (si hay 8), dejando 5 fichas, con lo que hace perder al contrario.

- Experimentamos con 9 fichas.

  Quien empieza puede retirar 1, 2 o 3, dejando 8, 7 o 6, con lo que ganará el contrario.

  Con 9 fichas, quien empieza pierde.

- Siguiendo así, vemos que los números perdedores son 1, 5, 9 y 13.

CONCLUSIÓN: Jugando con 15 fichas, quien empieza gana si sigue esta estrategia:

— Retira 2 fichas, dejando 13.

— A continuación responde a los movimientos del contrario dejando primero 9 fichas, después 5 y, por último, 1.

Es decir, quien empieza retira primero 2 fichas y después responde al contrario con el complemento de 4 (si él retira 3, yo 1; si él 2, yo 2; si él 1, yo 3).

1 Funciones lineales

Página 133

1. Copia y completa, en tu cuaderno, las igualdades siguientes:

a) –50 °C = … °F **b) 95 °F = … °C**

La expresión que liga la temperatura en grados centígrados y en grados Fahrenheit es: $y = 32 + 1{,}8x$ siendo x = temperatura en °C, y = temperatura en °F.

a) $x = -50 \to y = 32 + 1{,}8(-50) = 32 - 90 = -58$ °F $\to$ –50 °C = –58 °F

b) $y = 95 \to 95 = 32 + 1{,}8x \to x = \dfrac{95 - 32}{1{,}8} = 35 \to$ 95 °F = 35 °C

2. Un termómetro clínico abarca temperaturas desde 35 °C a 41 °C. ¿Cuál es la gama en °F?

Si $x = 35 \to y = 32 + 1{,}8 \cdot 35 = 32 + 63 = 95$

Si $x = 41 \to y = 32 + 1{,}8 \cdot 41 = 32 + 73{,}8 = 105{,}8$

La gama, en °F, es de 95 °F a 105,8 °F.

3. La temperatura normal de una persona sana es de 36,5 °C. ¿Cuál es en °F?

Si $x = 36{,}5 \to y = 32 + 1{,}8 \cdot 36{,}5 = 32 + 65{,}7 = 97{,}7$

La temperatura de una persona sana, en °F, es de 97,7 °F.

4. a) ¿Qué longitud alcanzará el muelle del ejemplo anterior si le colgamos una pesa de 4,6 kg?

b) ¿Qué peso hay que colgar del muelle para que alcance una longitud de 1 m?

a) $x = 4{,}6 \to y = 30 + 15 \cdot 4{,}6 = 30 + 69 = 99$

El muelle alcanzará una longitud de 99 cm.

b) 1 m = 100 cm

Si $y = 100 \to 100 = 30 + 15x \to x = \dfrac{100 - 30}{15} \approx 4{,}667$

Hay que colgar un peso de 4,667 kg, aproximadamente.

Página 134

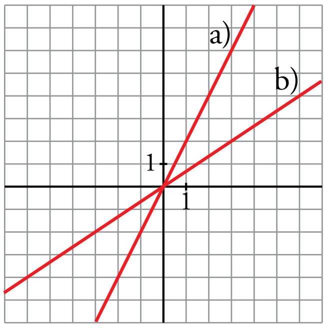
5. Representa:

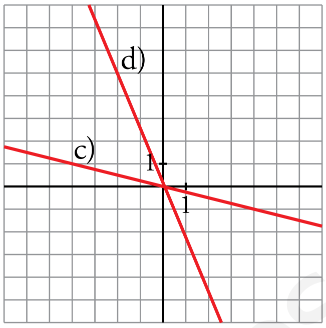
a) $y = 2x$

b) $y = \frac{2}{3}x$

c) $y = -\frac{1}{4}x$

d) $y = -\frac{7}{3}x$





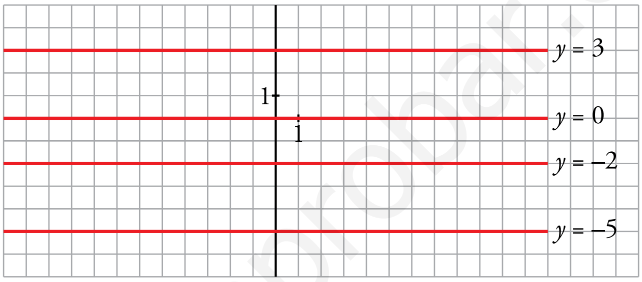
6. Representa:

a) $y = 3$

b) $y = -2$

c) $y = 0$

d) $y = -5$



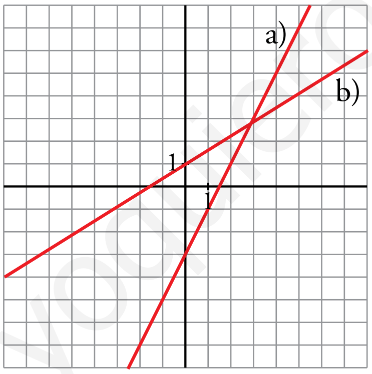
7. Representa:

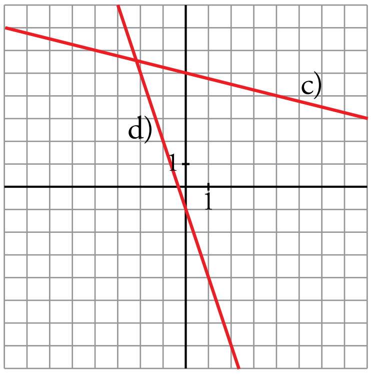
a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$

d) $y = -3x - 1$

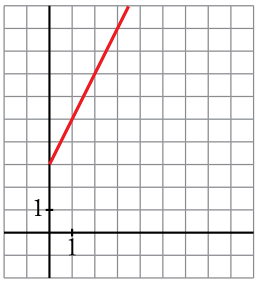




8. Un móvil, en el instante inicial, se encuentra situado a 3 m del origen y se aleja progresivamente de este con una velocidad de 2 m/s.

Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.

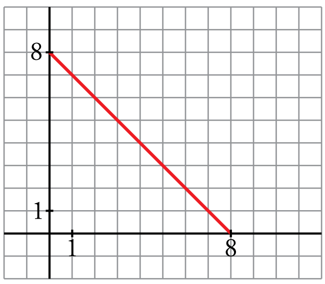
$y = 3 + 2x$, donde y es la distancia al origen en metros y x es el tiempo en segundos.



9. Un móvil, que en el instante inicial llevaba una velocidad de 8 m/s, frena de repente con una aceleración de –1 m/s^2.

Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala.

$y = 8 - x$, donde y es la velocidad en m/s y x es el tiempo en segundos.



Página 135

10. Halla la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por (–3, –5) y tiene una pendiente de $\frac{4}{9}$.

b) Pasa por (0, –3) y tiene una pendiente de 4.

c) Pasa por (3, –5) y por (–4, 7).

a) $y + 5 = \frac{4}{9}(x + 3) \rightarrow y = \frac{4}{9}x - \frac{11}{3}$

b) $y + 3 = 4x \rightarrow y = 4x - 3$

c) $m = \frac{7 - (-5)}{-4 - 3} = \frac{12}{-7} = -\frac{12}{7}$

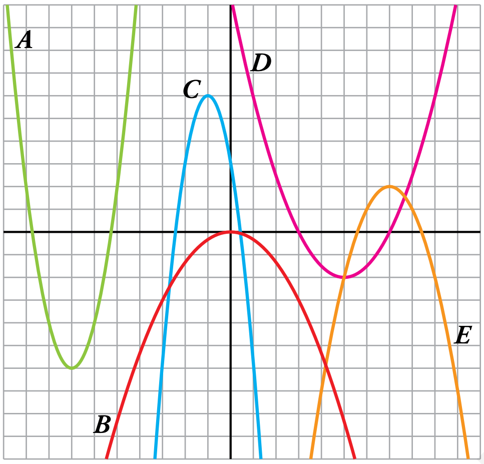
$y + 5 = -\frac{12}{7}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{12}{7}x + \frac{1}{7}$

2 Funciones cuadráticas. Parábolas

Página 137

1. Asocia cada uno de los coeficientes de la x^2 con su correspondiente parábola:

- $a = -1$
- $a = 2$
- $a = -\frac{1}{3}$
- $a = \frac{1}{2}$
- $a = -3$



$a = -1 \rightarrow E$ $\quad$ $a = 2 \rightarrow A$ $\quad$ $a = -\frac{1}{3} \rightarrow B$

$a = \frac{1}{2} \rightarrow D$ $\quad$ $a = -3 \rightarrow C$

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 2$ $\quad$ **b)** $y = -2x^2 - 2x - 3$ $\quad$ **c)** $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

d) $y = -x^2 + 4$ $\quad$ **e)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ $\quad$ **f)** $y = 3x^2 + 6x + 4$

a) $y = x^2 - 2x + 2$

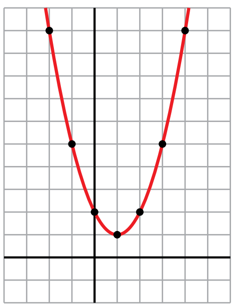
Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 1 \rightarrow V(1, 1)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	10	5	2	1	2	5	10

Vemos que a medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes crecen, por lo tanto, la parábola no cortará al eje X.



b) $y = -2x^2 - 2x - 3$

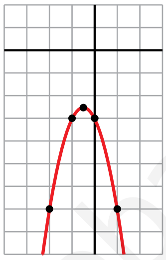
Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2} \to$ Ordenada: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{2} \to V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y	–7	–3	$-\frac{5}{2}$	–3	–7

A medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes decrecen, por tanto, la gráfica no corta al eje X.



$y = -2x^2 - 2x - 3$

c) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{-1}{2/3} = -\dfrac{3}{2} \to$ Ordenada: $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{4} \to V\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$

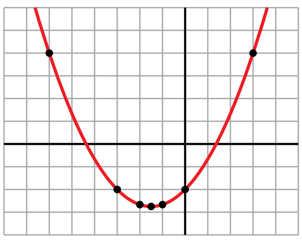
Tabla de valores:

x	–6	–3	–2	$-\frac{3}{2}$	–1	0	3
y	4	–2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{8}{3}$	–2	4

$$y = 0 \to \frac{1}{3}x^2 + x - 2 = 0 \to x^2 + 3x - 6 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

La parábola corta al eje de abscisas en $\left(\dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2}, 0\right)$.



$y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$

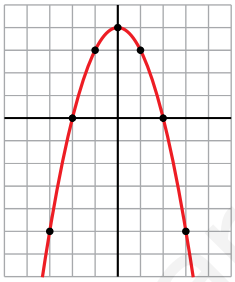
d) $y = -x^2 + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \frac{0}{-2} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = 4 \rightarrow V(0, 4)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Observamos que obtenemos en la tabla todos los cortes con los ejes:



$y = -x^2 + 4$

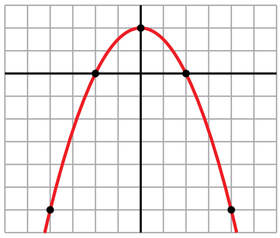
e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

Vértice: Abscisa: $p = \frac{0}{-1} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = 2 \rightarrow V(0, 2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	–6	0	2	0	–6

Obtenemos en la tabla todos los puntos de corte con los ejes:



$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

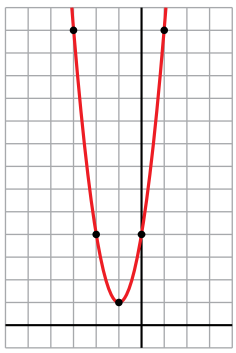
f) $y = 3x^2 + 6x + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \frac{-6}{6} = -1 \rightarrow$ Ordenada: $f(-1) = 1 \rightarrow V(-1, 1)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1
y	–13	4	1	4	13

Los valores de las ordenadas crecen a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.



$y = 3x^2 + 6x + 4$

3. **Dibuja en tu cuaderno la representación gráfica de estas funciones cuadráticas:**

a) $y = (x - 1) \cdot (x - 3)$ **b)** $y = 2(x - 2)^2$

c) $y = \frac{1}{2}(x + 2) \cdot (x - 2)$ **d)** $y = (x - 1)^2 + 5$

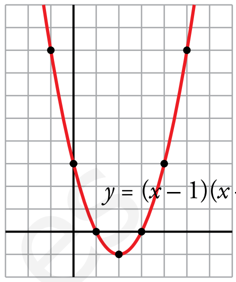
a) $y = (x - 1) \cdot (x - 3) \rightarrow y = x^2 - 4x + 3$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow$ Ordenada: $f(2) = -1 \rightarrow V(2, -1)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8



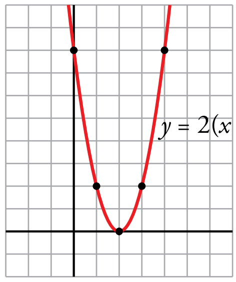
b) $y = 2(x - 2)^2 \rightarrow y = 2x^2 - 8x + 8$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow$ Ordenada: $f(2) = 0 \rightarrow V(2, 0)$

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	8	2	0	2	8



Solo hemos obtenido un único punto de corte con el eje de abscisas, veamos si hay más:

$y = 0 \rightarrow 2(x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

La parábola corta al eje de abscisas solamente en el punto (2, 0).

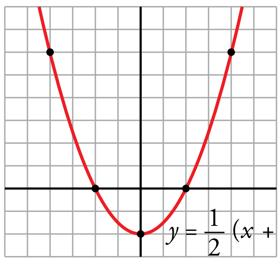
c) $y = \frac{1}{2}(x + 2) \cdot (x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = -2 \rightarrow V(0, -2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	6	0	–2	0	6



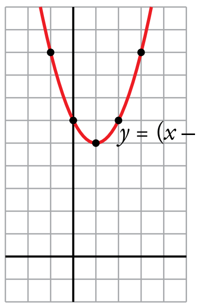
d) $y = (x - 1)^2 + 5 \rightarrow y = x^2 - 2x + 6$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 5 \rightarrow V(1, 5)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3
y	9	6	5	6	9



Las ordenadas aumentan a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.

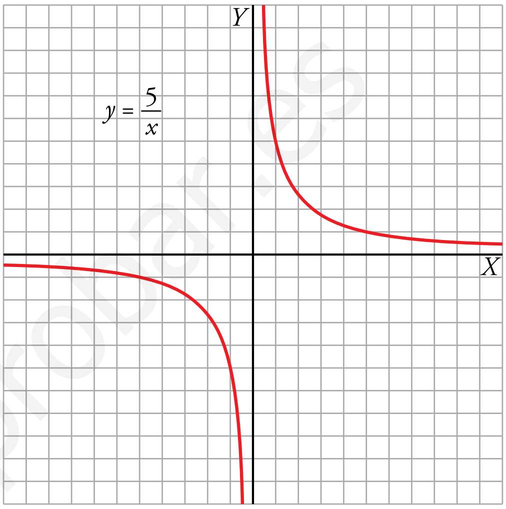
3 Funciones de proporcionalidad inversa

Página 138

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{5}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

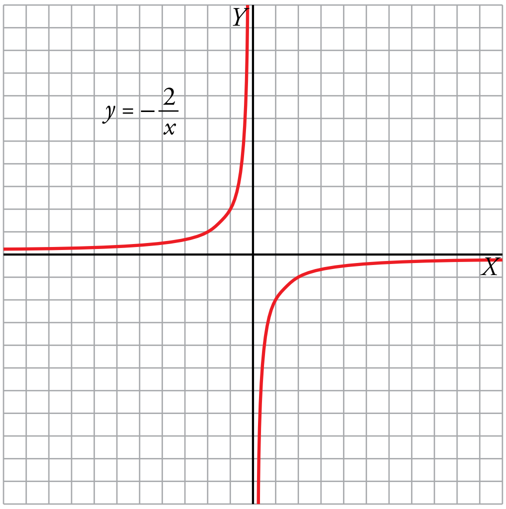


- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–10	–5	–1	–0,5	0,5	1	5	10
y	–1/2	–1	–5	–10	10	5	1	1/2

b) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

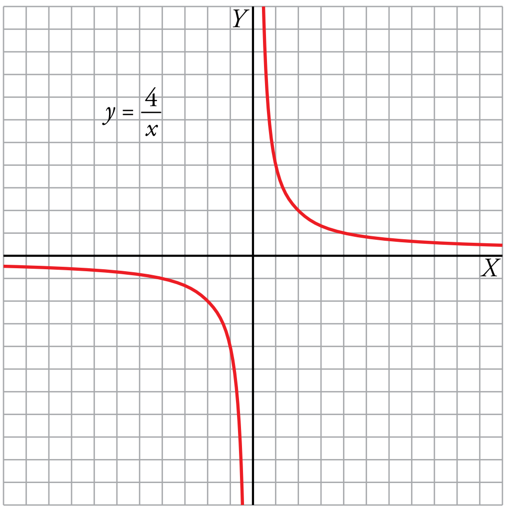


- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4
y	1/2	1	2	4	–4	–2	–1	–1/2

c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$



- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–8	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4	8
y	–1/2	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	1/2

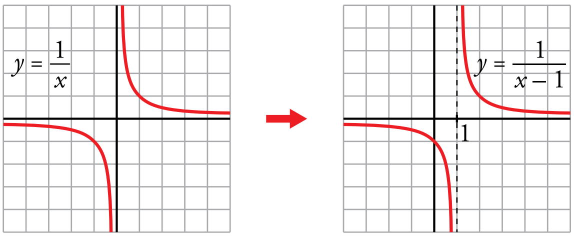
2. **Representa estas funciones y halla su dominio:**

a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ b) $y = \dfrac{1}{x+1}$ c) $y = -\dfrac{1}{x+2}$

a) $y = \dfrac{1}{x-1} \rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la derecha.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
- $x = 1$ es asíntota vertical

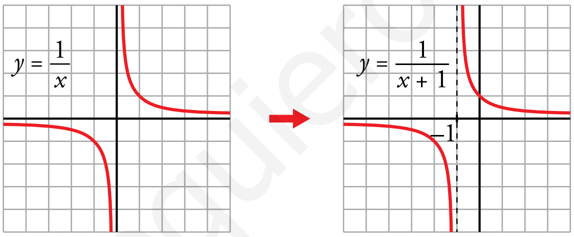
  $y = 0$ es asíntota horizontal



b) $y = \dfrac{1}{x+1} \rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$
- $x = -1$ es asíntota vertical

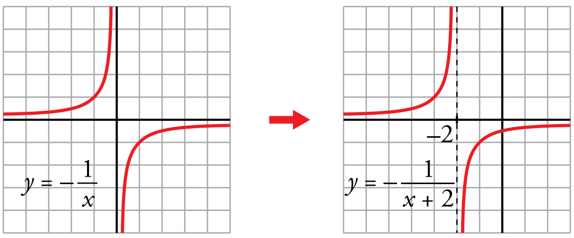
  $y = 0$ es asíntota horizontal



c) $y = -\dfrac{1}{x+2} \rightarrow y = -\dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 2 unidades a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-2\}$
- $x = -2$ es asíntota vertical

  $y = 0$ es asíntota horizontal



4 Funciones radicales

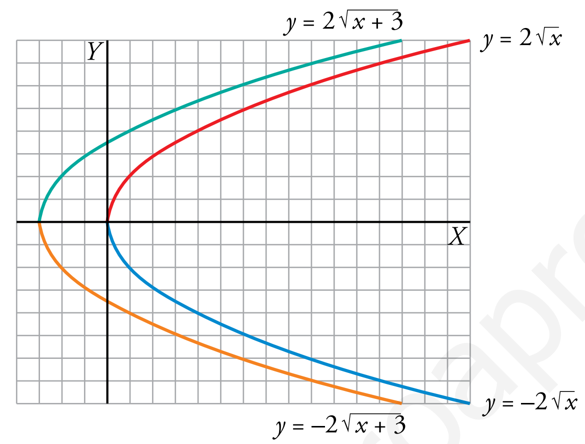
Página 139

1. Representa las siguientes funciones y halla el dominio de definición de cada una:

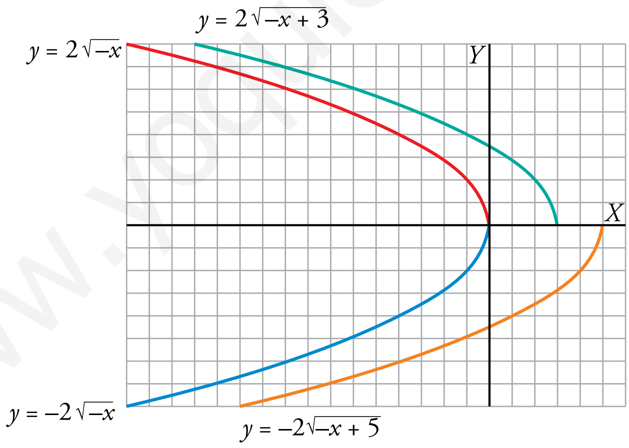
a) $y = 2\sqrt{x}$ **b)** $y = -2\sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{x+3}$ **d)** $y = -2\sqrt{x+3}$

e) $y = 2\sqrt{-x}$ **f)** $y = -2\sqrt{-x}$ **g)** $y = 2\sqrt{-x+3}$ **h)** $y = -2\sqrt{-x+5}$

a) b) c) d)



e) f) g) h)



Los dominios de definición son:

a) $[0, +\infty)$ b) $[0, +\infty)$ c) $[-3, +\infty)$ d) $[-3, +\infty)$

e) $(-\infty, 0]$ f) $(-\infty, 0]$ g) $(-\infty, 3]$ h) $(-\infty, 5]$

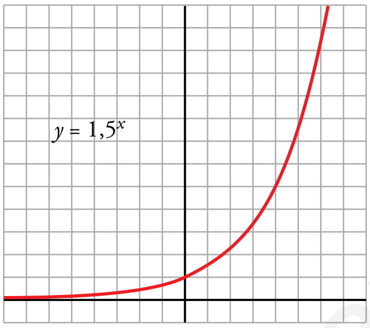
5 Funciones exponenciales

Página 140

1. Calcula los valores de la función $y = 1{,}5^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –6 y 6. Representa la función.

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

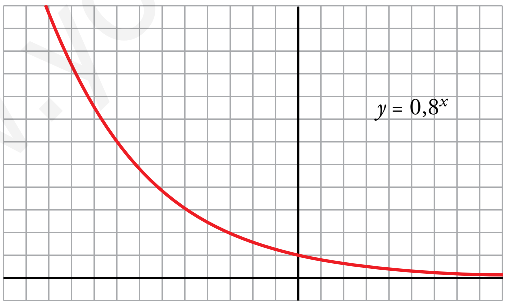
x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y	0,09	0,13	0,20	0,30	0,44	0,67	1	1,5	2,25	3,38	5,06	7,59	11,39



2. Calcula los valores de la función $y = 0{,}8^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –8 y 8. Representa la función.

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5,96	4,77	3,81	3,05	2,44	1,95	1,56	1,25	1	0,8	0,64	0,51	0,41	0,33	0,26	0,21	0,17



3. **La función $y = 5^{0,2x}$ puede ponerse de forma exponencial $y = a^x$ teniendo en cuenta que $5^{0,2x} = (5^{0,2})^x$.**

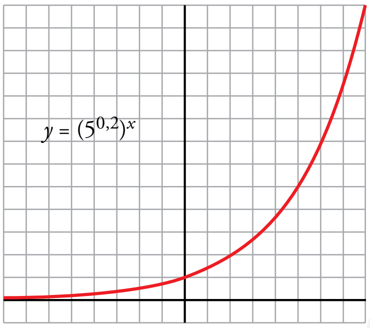
a) Calcula $5^{0,2}$ y guarda el resultado en la memoria: 5 x^y 0,2 = Min.

b) Representa la función dando valores a x. Por ejemplo, para $x = 4$: MR x^y 4 = 3.62.

a) $y = 5^{0,2x} \to y = (5^{0,2})^x$ con $5^{0,2} = 1,379729\ldots$

b) Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,08	0,11	0,14	0,2	0,28	0,38	0,53	0,72	1	1,38	1,90	2,63	3,62	5	6,90	9,52	13,13



Ejercicios y problemas

Página 141

Practica

Funciones lineales

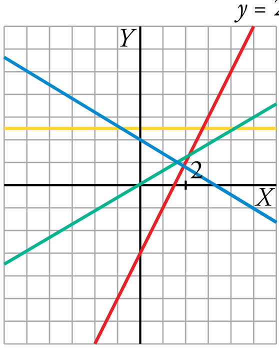
1. **Representa las siguientes funciones lineales:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{4}{7}x$

c) $y = \frac{-3x + 10}{5}$

d) $y = 2{,}5$



2. **Dados la pendiente y un punto, calcula en cada caso la ecuación de la recta:**

a) $P(0, 0)$, $m = 1$

b) $P(2, -1)$, $m = -2$

c) $A(-2, 1)$, $m = \frac{1}{2}$

d) $A(1, 3)$, $m = -\frac{5}{3}$

En todos los apartados buscamos la ecuación de una recta $\rightarrow y = mx + n$

a) $m = 1 \rightarrow y = x + n$

Pasa por $P(0, 0) \rightarrow 0 = 0 + n \rightarrow n = 0$

Por tanto, $y = x$.

b) $m = -2 \rightarrow y = -2x + n$

Pasa por $P(2, -1) \rightarrow -1 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = 3$

Por tanto, $y = -2x + 3$.

c) $m = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + n$

Pasa por $A(-2, 1) \rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n \rightarrow n = 2$

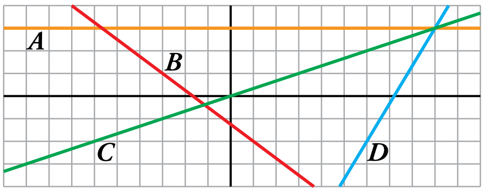
Por tanto, $y = \frac{1}{2}x + 2$.

d) $m = -\frac{5}{3} \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + n$

Pasa por $A(1, 3) \rightarrow 3 = -\frac{5}{3} \cdot 1 + n \rightarrow n = 3 + \frac{5}{3} \rightarrow n = \frac{14}{3}$

Por tanto, $y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3}$.

3. **Calcula la ecuación de estas funciones lineales:**



A Función constante $\to$ $y = n$; Pasa por $(0, 3)$ $\to$ $n = 3$ $\Big\} \to y = 3$

B Función lineal $\to$ $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(-3, 1) \in B \\ (1, -2) \in B\end{array}\right\} \to m = \frac{-2-1}{1-(-3)} = -\frac{3}{4} \to y = -\frac{3}{4}x + n$$

$$(1, -2) \in B \to -2 = -\frac{3}{4} \cdot 1 + n \to n = -2 + \frac{3}{4} \to n = -\frac{5}{4}$$

Por tanto, $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

C Función de proporcionalidad directa $\to$ $y = mx$

$$\left.\begin{array}{l}(0, 0) \in C \\ (3, 1) \in C\end{array}\right\} \to m = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{3}x$.

D Función lineal $\to$ $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(6, -2) \in D \\ (9, 3) \in D\end{array}\right\} \to m = \frac{3-(-2)}{9-6} = \frac{5}{3} \to y = \frac{5}{3}x + n$$

$$(6, -2) \in D \to -2 = \frac{5}{3} \cdot 6 + n \to n = -2 - 10 \to n = -12$$

Por tanto, $y = \frac{5}{3}x - 12$.

4. **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*:**

a) $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ **b)** $A(-2, -4)$, $B(2, -3)$

c) $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ **d)** $A(0, -5)$, $B(-3, 1)$

a) $y = 0$

b) $m = \frac{-3+4}{2+2} = \frac{1}{4}$; $y + 4 = \frac{1}{4}(x + 2) \to y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

c) $m = \frac{3}{3} = 1$; $y + 3 = x \to y = x - 3$

d) $m = \frac{1+5}{-3} = -2$; $y + 5 = -2x \to y = -2x - 5$

5. Halla la ecuación, en cada caso, y represéntala:

a) Recta que pasa por (2, –3) y es paralela a la recta que pasa por (1, –2) y (–4, 3).

b) Función de proporcionalidad que pasa por (–4, 2).

c) Función constante que pasa por (18; –1,5).

a) • La pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, –2) y (–4, 3) es:

$$m = \frac{3-(-2)}{-4-1} = \frac{5}{-5} = -1$$

• Si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente, por tanto, la recta buscada tiene pendiente $m = -1 \rightarrow y = -x + n$

• La recta pasa por (2, –3) $\rightarrow -3 = -2 + n \rightarrow n = -1$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -x - 1$.

b) • Función de proporcionalidad $\rightarrow y = mx$

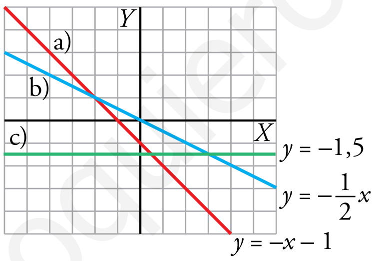
• Pasa por (–4, 2) $\rightarrow 2 = m \cdot (-4) \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

Por tanto, la recta buscada es $y = -\frac{1}{2}x$.

c) • Función constante $\rightarrow y = n$

• Pasa por (18; –1,5) $\rightarrow -1{,}5 = n$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -1{,}5$.



6. Halla el valor de los parámetros a, b, c, d y e para que las rectas y los puntos cumplan las condiciones pedidas:

a) Que la recta que pasa por los puntos (4, 0) y (–2, a) tenga pendiente –1.

b) Que la recta $y = bx + 2$ pase por el punto (–3, 4).

c) Que las rectas de ecuaciones $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se corten en el punto de ordenada 2. ¿Cuál es la abscisa correspondiente?

d) Que los puntos $(d, -2)$ y $(4, e)$ pertenezcan a la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - 3$.

a) $\left.\begin{array}{l} 4m + n = 0 \\ -2m + n = a \end{array}\right\} \rightarrow m = -\frac{a}{6},\ n = \frac{2a}{3}$

Si $m = -1 \rightarrow -1 = -\frac{a}{6} \rightarrow a = 6$

b) La recta $y = bx + 2$ pasa por (–3, 4) $\rightarrow 4 = b \cdot (-3) + 2 \rightarrow 3b = -2 \rightarrow b = -\frac{2}{3}$

c) $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se cortan en el punto de ordenada 2: $\left.\begin{array}{l} 3x + c = 2 \\ cx + 3 = 2 \end{array}\right\} \to c = 2 - 3x$

$(2 - 3x) \cdot x + 3 = 2 \to -3x^2 + 2x + 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1/3 \\ x = 1 \end{array} \right.$

• $x = -\dfrac{1}{3} \to c = 2 - 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) \to c = 3$

En este caso son la misma recta: $y = 3x + 3$

• $x = 1 \to c = 2 - 3 \cdot 1 \to c = -1$

Las rectas son $y = 3x - 1$ e $y = -x + 3$ y se cortan en el punto (1, 2).

d) $(d, -2)$ pertenece a la recta $y = \dfrac{1}{2}x - 3 \to -2 = \dfrac{1}{2} \cdot d - 3 \to d = 2$

$(4, e)$ pertenece a la recta $y = \dfrac{1}{2}x - 3 \to e = \dfrac{1}{2} \cdot 4 - 3 \to e = -1$

Funciones cuadráticas

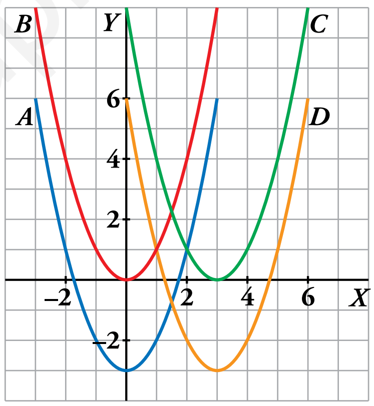
7. **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



a) $y = x^2 \leftrightarrow B$

b) $y = (x - 3)^2 \leftrightarrow C$

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow A$

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow D$

8. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta:**

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = -3x^2$

d) $y = 0{,}4x^2$

a) $y = x^2 + 1$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

b) $y = -x^2 + 4$

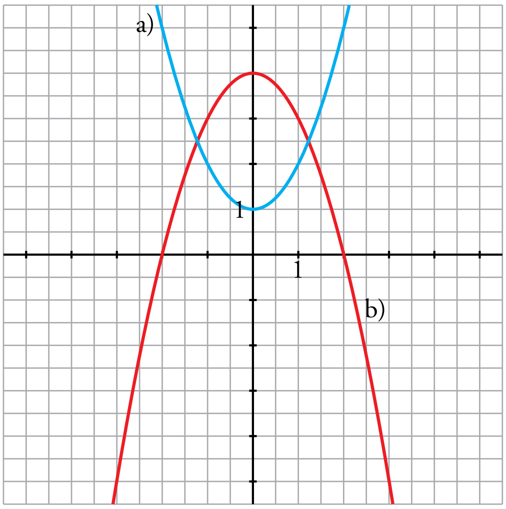
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–12	–5	0	3	4	3	0	–5	–12

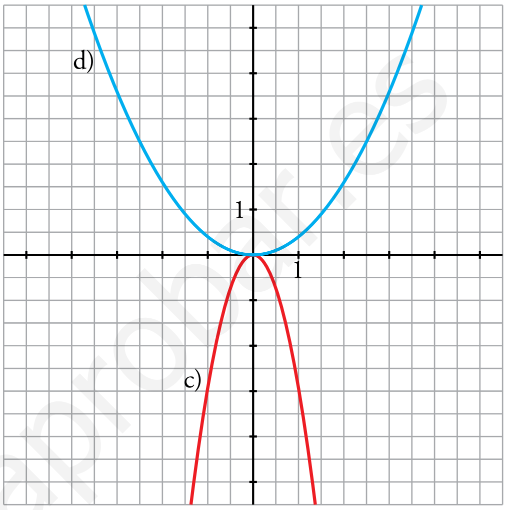
c) $y = -3x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–48	–27	–12	–3	0	–3	–12	–27	–48

d) $y = 0{,}4x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	6,4	3,6	1,6	0,4	0	0,4	1,6	3,6	6,4





9. **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 2)^2$ **b)** $y = x^2 - 4x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ **d)** $y = x^2 - 9$

a) Vértice: (–2, 0)

Cortes con los ejes:

(–2, 0), (0, 4)

Otros puntos: (–1, 1), (–3, 1)

b) Vértice: (2, –4)

Cortes con los ejes:

(0, 0), (4, 0)

Otros puntos: (5, 5), (–1, 5)

c) Vértice: (–2, –1)

Cortes con los ejes:

$\left(-\sqrt{2} - 2, 0\right), \left(\sqrt{2} - 2, 0\right), (0, 1)$

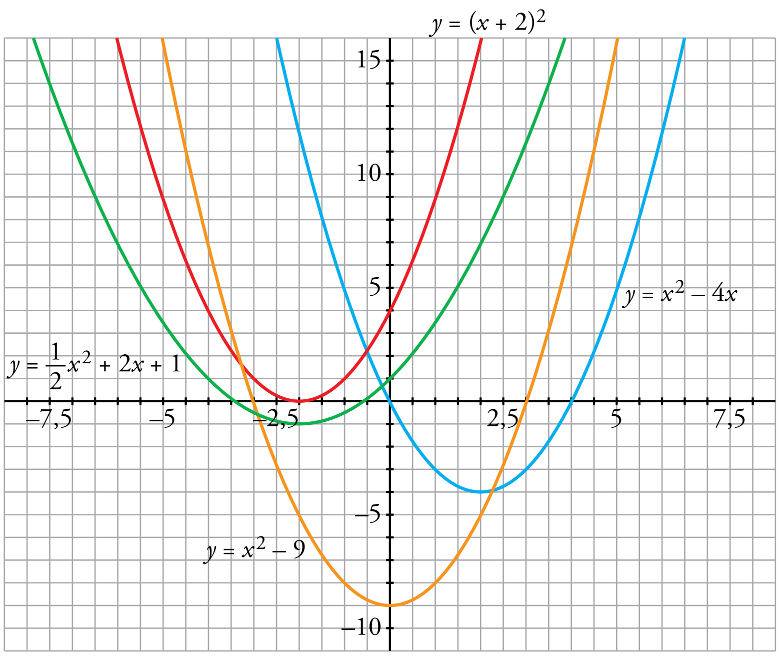
Otros puntos: $\left(1, \frac{7}{2}\right), \left(-5, \frac{7}{2}\right)$

d) Vértice: (0, –9)

Cortes con los ejes:

(–3, 0), (3, 0), (0, –9)

Otros puntos: (–2, –5), (2, –5)



10. **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo. Después, represéntalas.**

a) $y = 8 - x^2$

b) $y = 4 + (3 - x)^2$

c) $y = -x^2 - 2x + 4$

d) $y = 3x - \frac{1}{2}x^2 + 1$

e) $y = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

f) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

a) Vértice: (0, 8), máximo

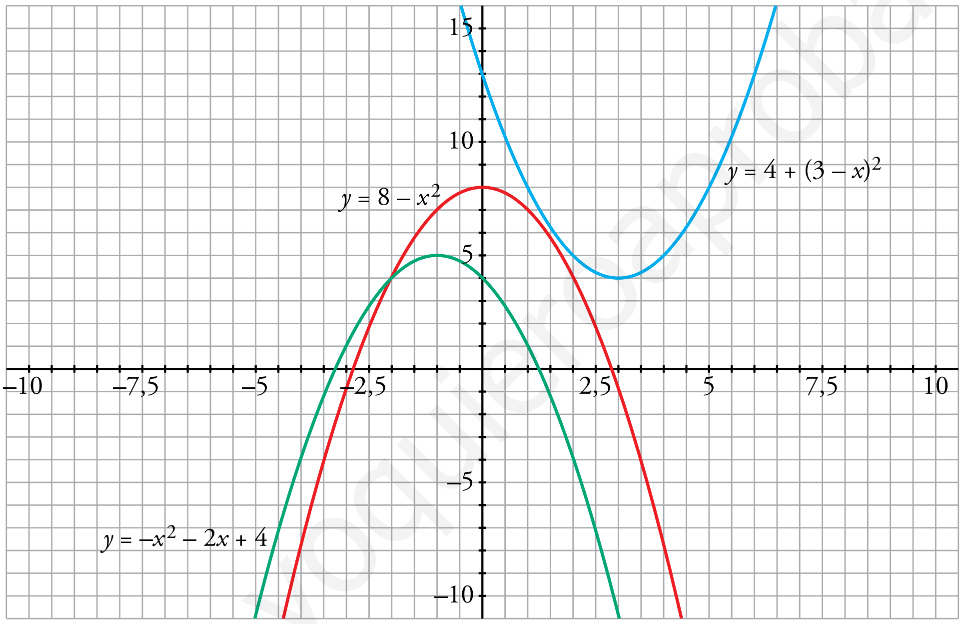
b) Vértice: (3, 4), mínimo

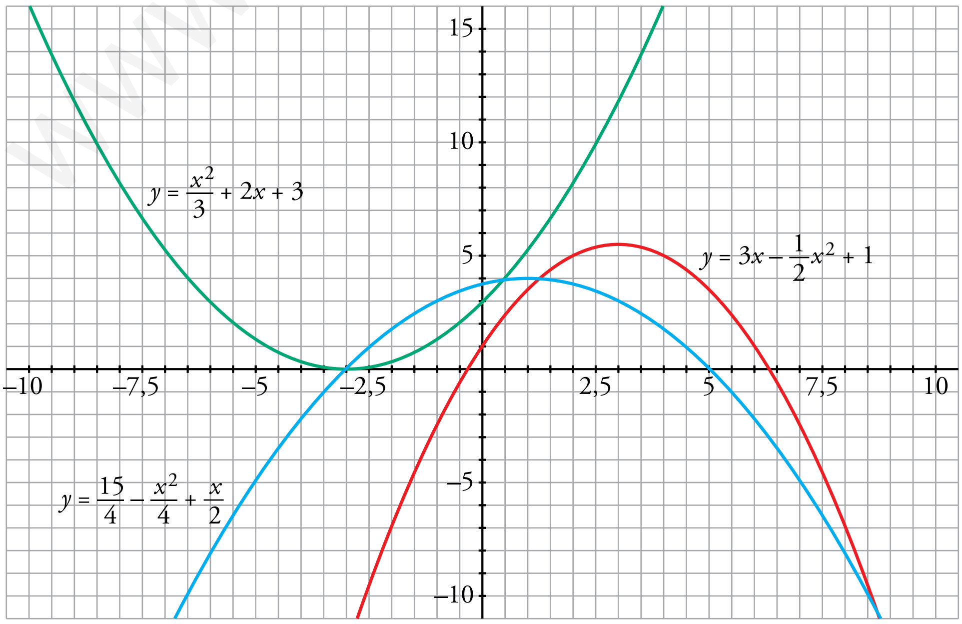
c) Vértice: (–1, 5), máximo

d) Vértice: $\left(3, \frac{11}{2}\right)$, máximo

e) Vértice: (1, 4), máximo

f) Vértice: (–3, 0), mínimo





11. **Representa estas funciones cuadráticas:**

a) $y = (x - 5)^2$ **b)** $y = x \cdot (x - 5)$

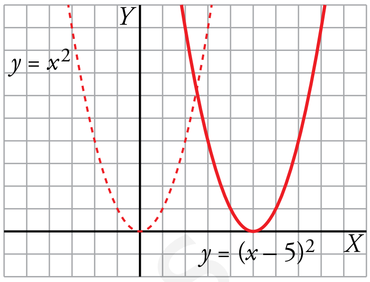
c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3)$ **d)** $y = 4 - (x - 2)^2$

a) $y = (x - 5)^2 \rightarrow$ Es la traslación 5 unidades a la derecha de $y = x^2$.

Vértice: (5, 0)

Tabla de valores:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	9	4	1	0	1	4	9



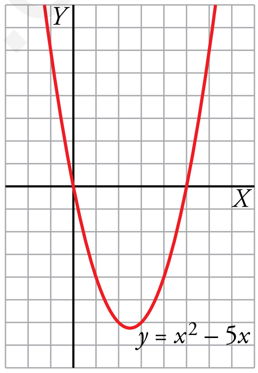
b) $y = x \cdot (x - 5) \rightarrow y = x^2 - 5x$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{5}{2} \rightarrow$ Ordenada: $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} \rightarrow V\left(\frac{5}{2}, \frac{-25}{4}\right)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6
y	6	0	–4	–6	$-\frac{25}{4}$	–6	–4	0	6

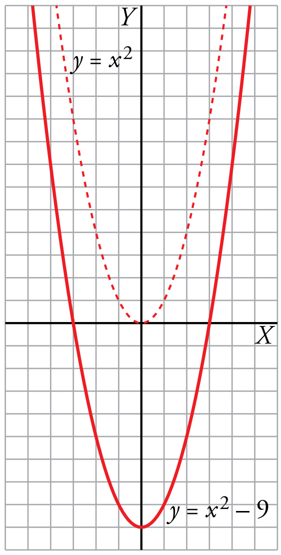


c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3) \rightarrow y = x^2 - 9 \rightarrow$ Es la traslación 9 unidades hacia abajo de $y = x^2$.

Vértice: (0, –9)

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7

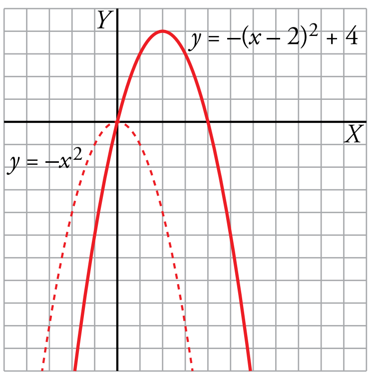


d) $y = 4 - (x - 2)^2 \rightarrow$ Es la traslación 4 unidades hacia arriba y 2 a la derecha de $y = -x^2$.

Vértice: (2, 4)

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–5	0	3	4	3	0	–5



12. **Utiliza una escala adecuada y representa.**

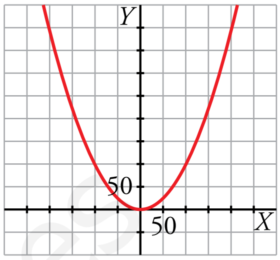
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ **b)** $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ **d)** $y = -10x^2 - 100x$

a) $y = \dfrac{x^2}{100} \rightarrow$ Vértice: (0, 0)

Tabla de valores:

x	–200	–150	–100	–50	0	50	100	150	200
y	400	225	100	25	0	25	100	225	400



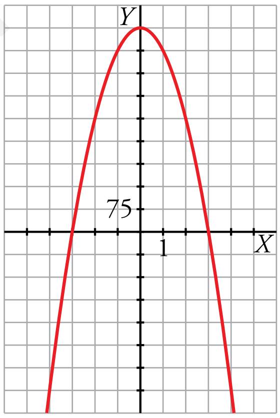
b) $y = -75x^2 + 675$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0}{-150} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = 675 \rightarrow V(0, 675)$

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–525	0	375	600	675	600	375	0	–525



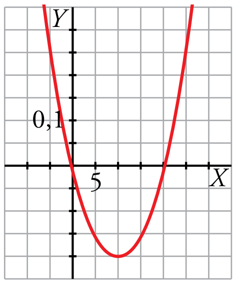
c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0,04}{0,004} = 10 \rightarrow$ Ordenada: $f(10) = -0{,}2 \rightarrow V(10; -0{,}2)$

Tabla de valores:

x	–5	0	5	10	15	20	25
y	0,25	0	–0,15	–0,2	–0,15	0	0,25



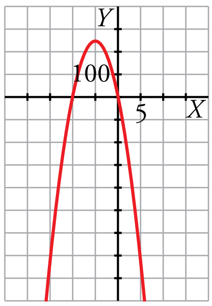
d) $y = -10x^2 - 100x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{100}{-20} = -5 \rightarrow$ Ordenada: $f(-5) = 250 \rightarrow V(-5, 250)$

Tabla de valores:

x	–15	–10	–5	0	5
y	–750	0	250	0	–750



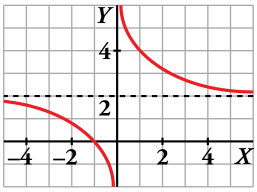
Página 142

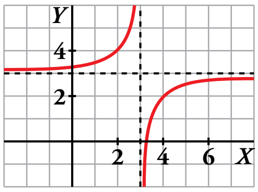
Otras funciones

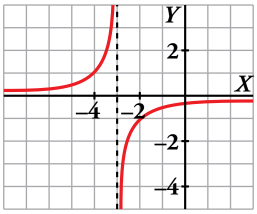
13. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas e indica el dominio de definición de cada una:**

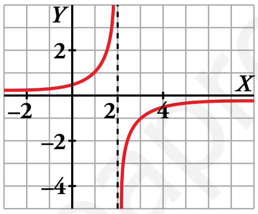
I) $y = \dfrac{1}{2 - x}$ II) $y = 3 - \dfrac{1}{x - 3}$

III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ IV) $y = -\dfrac{1}{x + 3}$

a) 

b) 

c) 

d) 

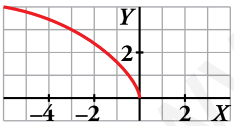
I $\to$ d) *Dom* = $\mathbb{R} - \{2\}$ II $\to$ b) *Dom* = $\mathbb{R} - \{3\}$

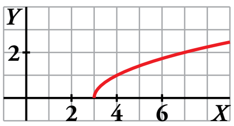
III $\to$ a) *Dom* = $\mathbb{R} - \{0\}$ IV $\to$ c) *Dom* = $\mathbb{R} - \{-3\}$

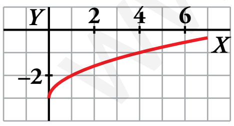
14. **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde e indica su dominio de definición:**

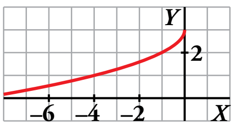
I) $y = \sqrt{x - 3}$ II) $y = \sqrt{x} - 3$

III) $y = 3 - \sqrt{-x}$ IV) $y = \sqrt{-3x}$

a) 

b) 

c) 

d) 

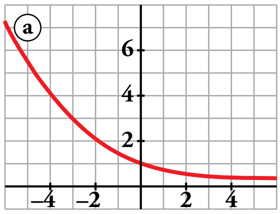
I $\to$ b) *Dom* = $[3, +\infty)$ II $\to$ c) *Dom* = $[0, +\infty)$

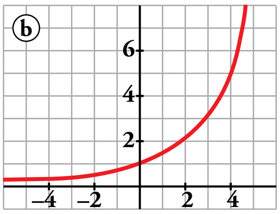
III $\to$ d) *Dom* = $(-\infty, 0]$ IV $\to$ a) *Dom* = $(-\infty, 0]$

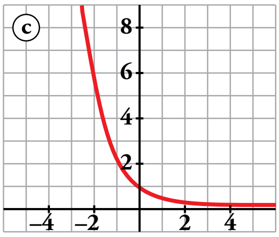
15. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

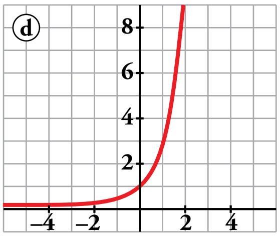
I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1,5^x$

III) $y = 0,4^x$ **IV)** $y = 0,7^x$









Di, en cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I $\to$ d) Creciente II $\to$ b) Creciente

III $\to$ c) Decreciente IV $\to$ a) Decreciente

16. **Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:**

a) $y = \frac{3}{x}$; $x = -3; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 3$ **b)** $y = -\frac{3}{x}$; $x = -3; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 3$

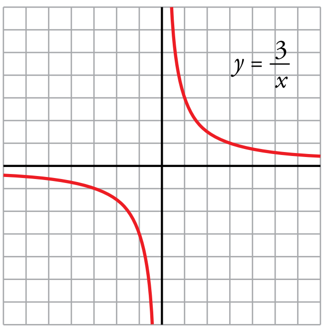
c) $y = \frac{5}{x}$; $x = -5; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 5$ **d)** $y = -\frac{2}{x}$; $x = -2; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 2$

Todas las funciones son tales que:

- $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No cortan los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.
- $y = 0$ es asíntota horizontal.

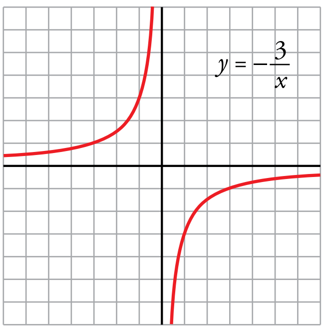
a) $f(x) = \frac{3}{x}$

x	–3	–1	–1/2	1/2	1	3
y	–1	–3	–6	6	3	1



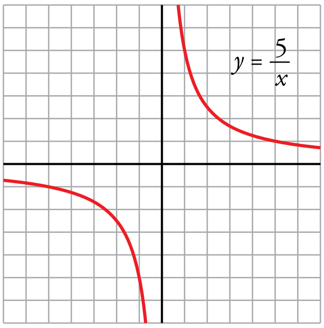
b) $f(x) = -\frac{3}{x}$

x	–3	–1	–1/2	1/2	1	3
y	1	3	6	–6	–3	–1



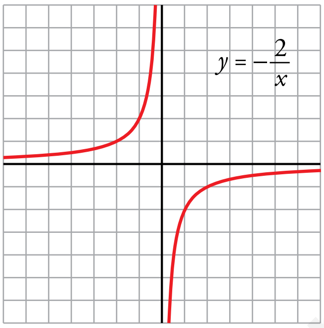
c) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

x	–5	–1	–1/2	1/2	1	5
y	–1	–5	–10	10	5	1



d) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

x	–2	–1	–1/2	1/2	1	2
y	1	2	4	–4	–2	–1



17. **Indica cuáles son las asíntotas de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente ayudándote de una tabla de valores:**

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

b) $y = -\dfrac{3}{x+1}$

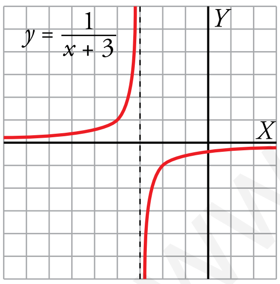
c) $y = \dfrac{1}{1-x} + 2$

d) $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$

a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-3\}$

Asíntotas: $x = -3$, $y = 0$

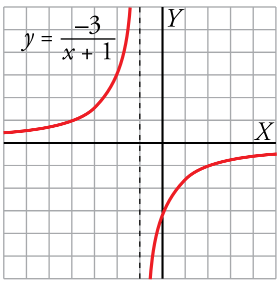
x	–6	–5	–4	–2	–1	0
y	–1/3	–1/2	–1	1	1/2	1/3



b) Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas: $x = -1$, $y = 0$

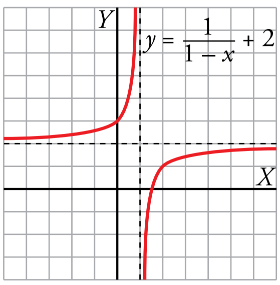
x	–4	–3	–2	0	1	2
y	1	3/2	3	–3	–3/2	–1



c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

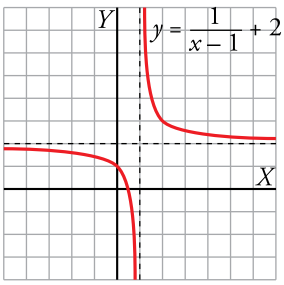
x	–2	–1	0	2	3	4
y	7/3	5/3	3	1	3/2	5/3



d) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

x	–2	–1	0	2	3	4
y	5/3	3/2	1	3	5/2	7/3



18. **Ayúdate de una tabla de valores para representar gráficamente las siguientes funciones e indica el dominio de definición de cada una:**

a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$

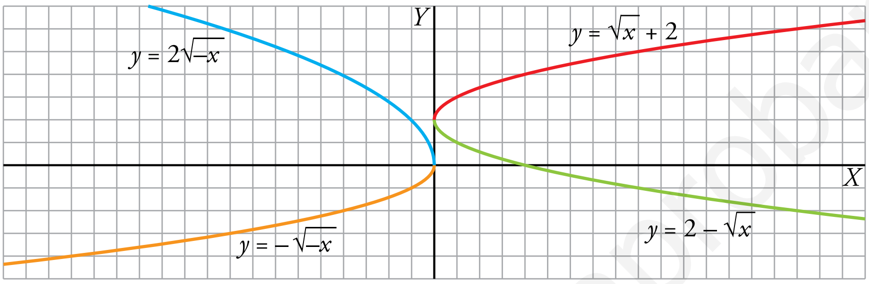
c) $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

A partir de la tabla de valores de $y = \sqrt{x}$ podemos representar las funciones:

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4

a) $y = \sqrt{x} + 2 \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$ b) $y = 2 - \sqrt{x} \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$

c) $y = 2\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$ d) $y = -\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$



19. **Representa gráficamente estas funciones dando los valores que se indican en cada caso.**

a) $y = \sqrt{2-x}$; $x = 2; -2; -7$ **b)** $y = 7 - \sqrt{2x+4}$; $x = -2; 0; 6$

c) $y = \sqrt{-x}$; $x = 0; -4; -9$ **d)** $y = 2 + \sqrt{x+3}$; $x = -3; 1; 6$

a) $y = \sqrt{2-x}$

x	2	–2	–7
y	0	2	3

b) $y = 7 - \sqrt{2x+4}$

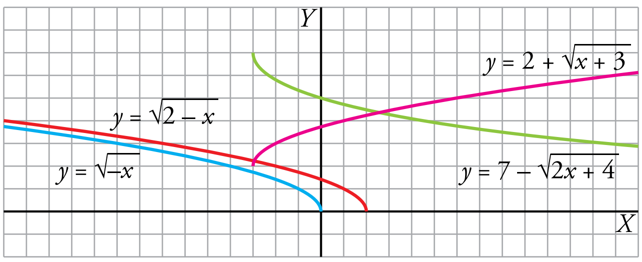
x	–2	0	6
y	7	5	3

c) $y = \sqrt{-x}$

x	0	–4	–9
y	0	2	3

d) $y = 2 + \sqrt{x+3}$

x	–3	1	6
y	2	4	5



20. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores (ayúdate de la calculadora):**

a) $y = 2^x$ **b)** $y = 3^x + 1$

c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$ **d)** $y = 2^{0,5x}$

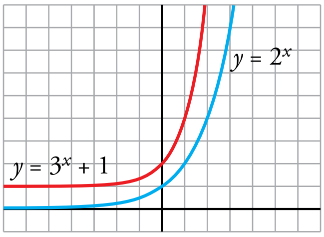
e) $y = 1,2^{4x}$ **f)** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{0,5x}$

a) $y = 2^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

b) $y = 3^x + 1$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1,037	$1,\widehat{1}$	$1,\widehat{3}$	2	4	10	28

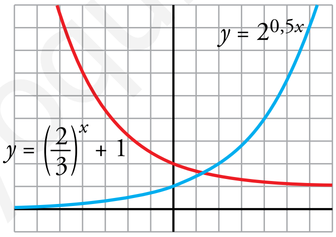


c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,375	3,25	2,5	2	$1,\widehat{6}$	$1,\widehat{4}$	1,296

d) $y = 2^{0,5x}$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4

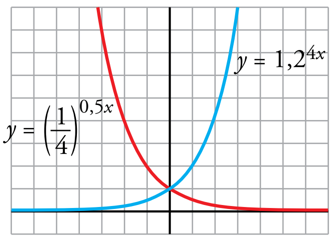


e) $y = 1,2^{4x}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0,11	0,23	0,48	1	2,07	4,3	8,92

f) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{0,5x} \rightarrow \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\right]^x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,06



21. **Representa cada par de funciones sobre los mismos ejes coordenados. ¿Qué relación hay entre ellos?**

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = 3^x$ **b)** $y = 0{,}25^x$; $y = 4^x$

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = (1/3)^x$	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27

$y = 3^x$

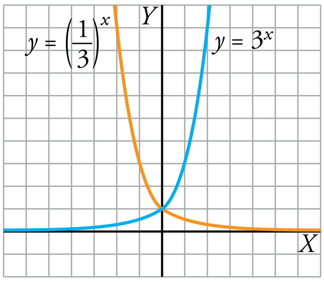
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = 3^x$	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27

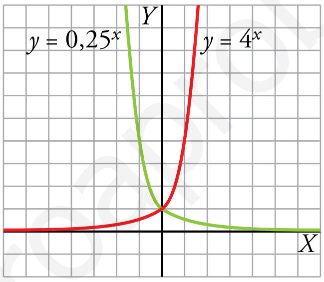
b) $y = 0{,}25^x \rightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 0{,}25^x$	16	4	1	1/4	1/16

$y = 4^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 4^x$	1/16	1/4	1	4	16





Sus gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Página 143

Resuelve problemas

22. **a) Calcula b y c para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + c$ esté en el punto (3, 1).**

b) ¿Cuál es su eje de simetría?

c) ¿Cuáles son sus puntos de corte con los ejes?

a) Vértice en $x = 3 \to -\dfrac{b}{2a} = 3 \to -b = 6a = 6 \to b = -6$

Pasa por $(3, 1) \to 1 = 9 - 18 + c \to c = 10$

$y = x^2 - 6x + 10$

b) Su eje de simetría es $x = 3$.

c) Cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = 10 \to$ Punto (0, 10)

$x^2 - 6x + 10 = 0 \to x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \to$ No tiene solución, por tanto, no corta al eje X.

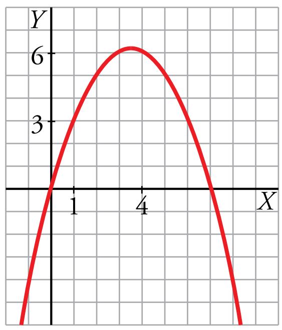
23. **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c?**

Si, además, sabemos que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), halla a y b y representa la parábola.

$c = 0 \qquad y = ax^2 + bx$

$$\left.\begin{array}{l}(1, 3) \to 3 = a + b \\ (4, 6) \to 6 = 16a + 4b\end{array}\right\} \begin{array}{l}a = 3 - b \to a = -1/2 \\ 6 = 16(3 - b) + 4b \to b = 7/2\end{array}$$

$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}x$



24. **Calcula a y b para que la función $y = \dfrac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

$$\left.\begin{array}{l}2 = \dfrac{a}{2 - b} \\ -1 = \dfrac{a}{-1 - b}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}a = 4 - 2b \\ a = 1 + b\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}1 + b = 4 - 2b \to b = 1 \\ a = 2\end{array}\right\} y = \dfrac{2}{x - 1}$$

25. **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow$ $3 = ka^0$ $\rightarrow$ $k = 3$

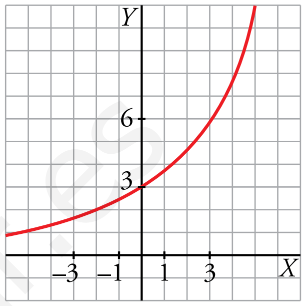
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow$ $3{,}6 = ka^1$ $\rightarrow$ $3{,}6 = 3a$ $\rightarrow$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función: $y = 3 \cdot 1{,}2^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



26. **Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base midiera 0,5 m, ¿cuánto mediría la altura? ¿Y la superficie del cuadro?

b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) Perímetro = 3 m $\rightarrow$ base + altura = 1,5 m

base = 0,5 m $\rightarrow$ 0,5 + altura = 1,5 $\rightarrow$ altura = 1 m

Área = base · altura $\rightarrow$ Área = 0,5 · 1 = 0,5 m^2

b) Perímetro = 3 m $\rightarrow$ base + altura = 1,5 m

base = x $\rightarrow$ x + altura = 1,5 $\rightarrow$ altura = $1{,}5 - x$

Área = base · altura $\rightarrow$ $A(x) = x \cdot (1{,}5 - x)$ $\rightarrow$ $A(x) = -x^2 + 1{,}5x$

c) $$\left.\begin{array}{l} A(x) = -x^2 + 1{,}5x \ \text{ función cuadrática} \\ a = -1 < 0 \ \rightarrow \ \text{tiene las ramas hacia abajo} \end{array}\right\} \rightarrow A(x) \ \text{ alcanza el máximo en su vértice}$$

Vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{-b}{2a} \ \ 8 \ \ x = \dfrac{-1{,}5}{-2} = 0{,}75 \\ y = -(0{,}75)^2 + 1{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Vértice: } (0{,}75; 0{,}5625)$$

La superficie es máxima cuando la base mide 0,75 m, siendo dicha superficie máxima 0,5625 m^2.

27. **El sueldo inicial de Ana es de 24 000 € anuales. En su contrato de trabajo figura que subirá un 8 % anual.**

¿Cuánto ganará dentro de 10 años? Escribe la función que relaciona el sueldo con el tiempo.

El sueldo inicial es 24 000 €.

Al cabo de un año será 24 000 · 1,08 y al cabo de dos años será 24 000 · $1{,}08^2$.

Es decir, al cabo de 10 años será 24 000 · $1{,}08^{10}$ = 51 814,20 €.

La función que relaciona el sueldo con el tiempo es:

$$s(t) = 24\,000 \cdot 1{,}08^t$$

28. **El coste por unidad de fabricación de un tipo de cajas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0,3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la variable independiente, x?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para fabricar 10 cajas. Haz lo mismo para 100 000 cajas.

c) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de cajas se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) • Para 10 cajas:

$$\text{Coste por unidad} = \frac{3 + 1\,000}{10} = 100{,}3$$

Coste total de 10 unidades = 1 003

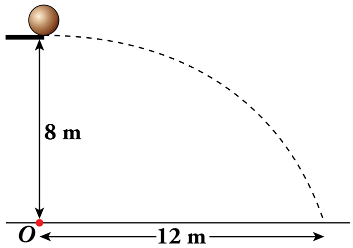
• Para 100 000 cajas:

$$\text{Coste por unidad} = \frac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

c) El coste por unidad se acerca a 0,3.

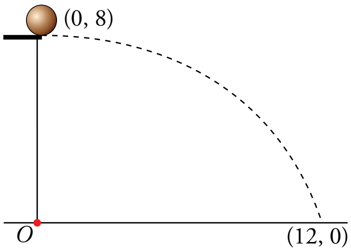
29. **En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Esther lanza una pelota rodando y cae al agua a 12 m de la vertical del trampolín.**



Escribe la ecuación de la trayectoria descrita por la pelota desde que sale del trampolín hasta que toca el agua. Da su dominio de definición.

La trayectoria es una parábola $y = ax^2 + bx + c$ con su vértice en el punto de caída. Toma O como centro de coordenadas y ten en cuenta que el vértice es (0, 8).

RESOLUCIÓN 1



Tomando el centro de coordenadas en el punto O, el vértice de la parábola es (0, 8). La ecuación de la parábola queda así:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + b \\ \text{Para } x = 0,\ y = 8 \ \to\ 8 = b \end{array}\right\} y = ax^2 + 8$$

Calculamos el valor de a sabiendo que pasa por (12, 0):

$$0 = a \cdot 12^2 + 8 \ \to\ a = -\frac{8}{144} = -\frac{1}{18}$$

La ecuación de la trayectoria es $y = -\frac{1}{18}x^2 + 8$, definida en [0, 12].

RESOLUCIÓN 2

En la resolución anterior se ha tenido en cuenta que la trayectoria es una parábola con su vértice en el punto de caída. Resolvámoslo, ahora, como lo haría un físico, teniendo en cuenta, solamente, las leyes del movimiento:

Tiempo que tarda en caer 8 m: (movimiento uniformemente acelerado. Aceleración, g):

$\frac{1}{2}gt^2 = 8$. Tomamos $g = 10$ m/s^2 $\to\ 5t^2 = 8 \ \to\ t = \sqrt{\frac{8}{5}}$

¿A qué velocidad rueda la pelota por el trampolín? Tengamos en cuenta que, a esa velocidad, recorre 12 m en $\sqrt{\frac{8}{5}}$ s (componente horizontal).

Movimiento uniforme $e = v \cdot t \ \to\ 12 = v \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \ \to\ v = \frac{12}{\sqrt{8/5}}$

Obtengamos la ecuación de la trayectoria tomando O como origen de coordenadas:

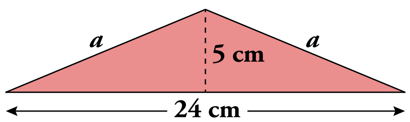
$$\left.\begin{array}{l} \text{Comp. horizontal: } x = \dfrac{12}{\sqrt{8/5}}t \\ \text{Comp. vertical: } y = 8 - 5t^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{8/5}\,x}{12} \ \to\ t^2 = \dfrac{8/5}{144}x^2 = \dfrac{1}{90}x^2 \\ y = 8 - 5 \cdot \dfrac{1}{90}x^2 = 8 - \dfrac{1}{18}x^2 \end{array}$$

Hemos obtenido la trayectoria $y = 8 - \frac{1}{18}x^2$, la misma que antes como es natural.

1 El teorema de Pitágoras

Página 147

1. Calcula la longitud del segmento representado por cada letra en estos triángulos:

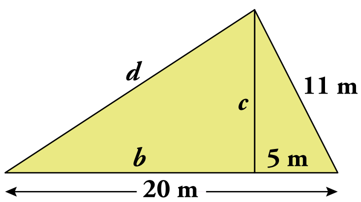


$a^2 = 12^2 + 5^2$

$a^2 = 144 + 25$

$a^2 = 169$

$a = \sqrt{169} = 13$ cm



$b = 20 - 5 = 15$ m

$11^2 = c^2 + 5^2$

$121 = c^2 + 25$

$c^2 = 121 - 25$

$c = \sqrt{96} = 9,8$ m

$d^2 = 15^2 + 9,8^2$

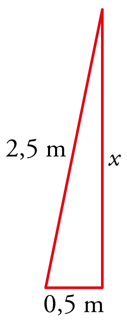
$d^2 = 225 + 96$

$d^2 = 321$

$d = \sqrt{321}$

$d = 17,9$ m

2. Una escalera de mano, de 2,5 m de longitud, está apoyada en una pared, separándose, en su base, 50 cm de la misma. ¿A qué altura toca la pared?

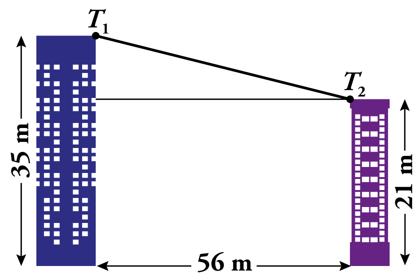


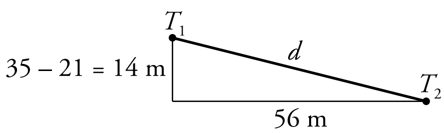
$2,5^2 = x^2 + 0,5^2$

$6,25 = x^2 + 0,25$

$x^2 = 6,25 - 0,25 = 6 \rightarrow x = \sqrt{6} = 2,45$ m

3. ¿Cuál es la distancia entre los puntos T_1 y T_2 de las azoteas de los dos edificios?





$d^2 = 14^2 + 56^2$

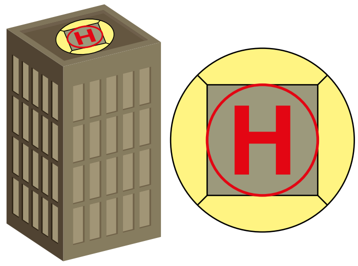
$d^2 = 196 + 3\,136 = 3\,332$

$d = \sqrt{3\,332} = 57,72$ m

Página 148

4. En la azotea de un rascacielos se ha construido una plataforma circular, de 27 m de diámetro, que soporta un helipuerto como indica la ilustración.

¿Cuál es el radio del círculo interior que marca la zona de aterrizaje, si los vértices del cuadrado están a dos metros del borde de la plataforma?



Como indica el dibujo de la "Ayuda", la diagonal del cuadrado mide k = 27 – 4 = 23 metros.

Conocida la diagonal, calculamos el lado:

$$23^2 = x^2 + x^2$$

$$529 = 2x^2$$

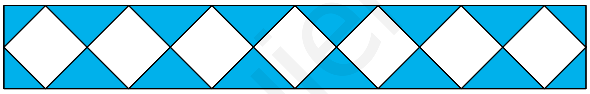
$$x^2 = 264{,}5$$

$$x = \sqrt{264{,}5} = 16{,}26 \text{ m}$$

El radio del círculo es la mitad del lado, que coincide con el diámetro, luego será:

$$r = \frac{16{,}26}{2} = 8{,}13 \text{ metros}$$

5. El zócalo de un pasillo de 28 metros de longitud, se va a rematar con el friso que muestra la ilustración, construido con baldosines cuadrados de 10 cm de lado.



¿Cuántos baldosines azules y cuántos blancos se necesitan para la confección del friso?

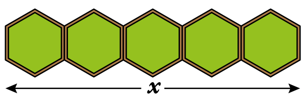
De acuerdo con el dibujo de la "Ayuda", en este trozo de friso hay un baldosín azul y otro blanco.

Para calcular la anchura, x, de ese trozo de friso usamos el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 100 = \frac{x^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ cm}$$

Como el zócalo del pasillo tiene 28 m = 2 800 cm de longitud, habrá $\frac{2\,800}{14{,}14} \approx 198$ trozos de friso como este, es decir, 198 baldosines blancos y otros tantos azules.

6. Para la decoración de la entrada de un hotel, se va a instalar una fila de cinco módulos-jardinera de planta hexagonal regular, como indica la figura:



Sabiendo que el lado de cada módulo mide 0,60 m, ¿qué longitud tendrá la fila?

Vamos a calcular la apotema del hexágono tal y como nos indica la "Ayuda". Para eso utilizamos el hecho de que en un hexágono regular el radio es igual al lado. Por tanto:

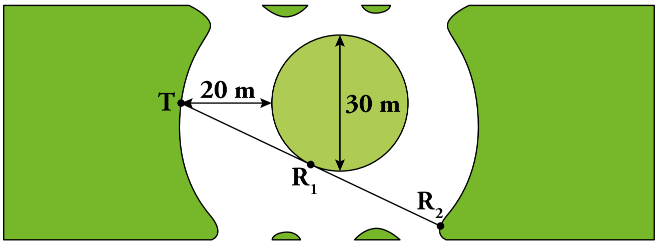
$$0{,}6^2 = a^2 + 0{,}3^2$$

$$0{,}36 = a^2 + 0{,}09 \rightarrow a^2 = 0{,}36 - 0{,}09 = 0{,}27$$

$$a = \sqrt{0{,}27} = 0{,}52 \text{ m}$$

La longitud de la fila será $x = 2a \cdot 5 = 2 \cdot 0{,}52 \cdot 5 = 5{,}2$ metros.

7. En la plazoleta del parque se ha abierto una zanja recta para llevar el agua desde la toma, T, hasta las bocas de riego R_1 y R_2.



¿Cuántos metros de tubería se necesitarán, si la boca R_1 está en el punto medio de la longitud de la zanja?

Utilizando el dibujo de la "Ayuda", tendremos:

$$35^2 = x^2 + 15^2$$

$$1\,225 = x^2 + 225$$

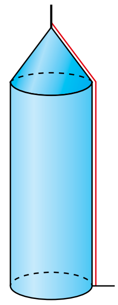
$$x = \sqrt{1\,000} = 31{,}623 \text{ m}$$

luego la tubería tendrá $2 \cdot 31{,}623 \approx 63{,}25$ metros.

Página 149

8. Una torre cilíndrica de 18,84 m de circunferencia y 15 m de altura está coronada por un tejado en forma de cono que la eleva otros 4 m.

¿Cuántos metros mide el cable que sube desde tierra hasta el pararrayos colocado en el vértice del tejado?



Calculamos el radio de la circunferencia: $L = 2\pi r$

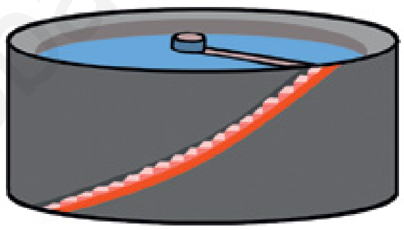
$$18{,}84 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \;\rightarrow\; r = 3 \text{ m}$$

Por tanto: $x^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \;\rightarrow\; x = \sqrt{25} = 5$ m

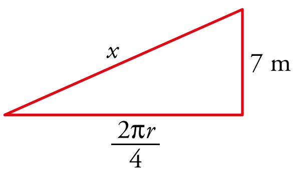
Luego la longitud del cable es 15 + 5 = 20 metros.

9. Un tanque cilíndrico de agua, con un diámetro de 20 m y una altura de 7 m, tiene una escalera, adosada a la pared, que sube desde el suelo hasta el borde superior.

¿Cuál es la longitud de la escalera si, mientras sube, cubre un cuarto de vuelta alrededor del depósito?



Ayudándonos del dibujo:

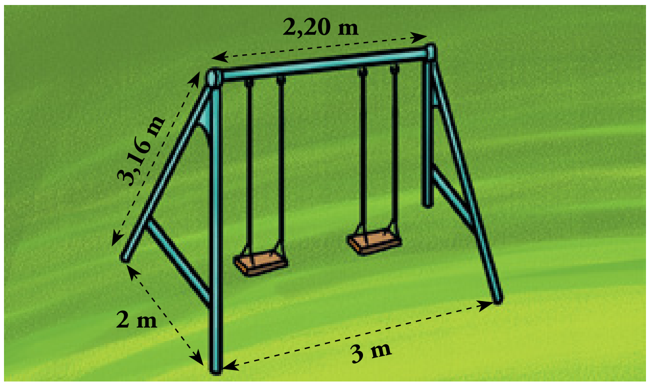


$$\frac{2\pi r}{4} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10}{4} = 15{,}7 \text{ m}$$

$$x^2 = 7^2 + 15{,}7^2 = 49 + 246{,}49 = 295{,}49$$

$x = \sqrt{295{,}49} = 17{,}19 \approx 17{,}20$ metros de longitud tiene la escalera.

10. Se van a instalar columpios en un parque infantil, según el modelo de la ilustración. ¿Qué longitud deben tener los tirantes para que los asientos queden a 60 cm del suelo?



Vamos a calcular k, n y h como nos dice la “Ayuda”:

- $3{,}16^2 = k^2 + 1^2$

  $9{,}9856 = k^2 + 1 \;\rightarrow\; k^2 = 9{,}9856 - 1 = 8{,}9856 \;\rightarrow\; k = \sqrt{8{,}9856} \approx 3$ m

- $n = \dfrac{3 - 2{,}20}{2} = 0{,}4$ m

- $3^2 = 0{,}4^2 + \text{h}^2$

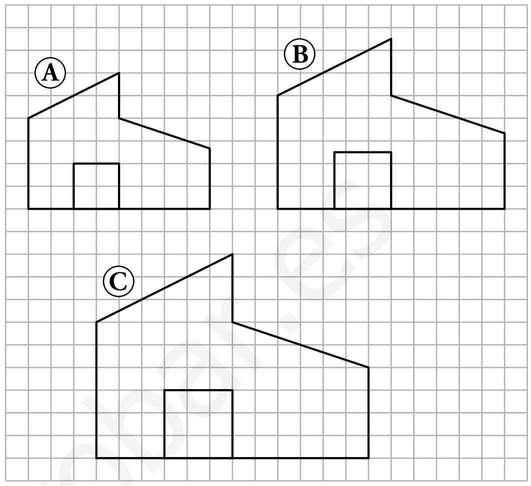
  $9 = 0{,}16 + \text{h}^2 \;\rightarrow\; \text{h}^2 = 9 - 0{,}16 = 8{,}84 \;\rightarrow\; \text{h} = \sqrt{8{,}84} = 2{,}97$ m

Por tanto, como los asientos están a 0,6 m del suelo, los tirantes deben tener una longitud de 2,97 – 0,6 = 2,37 metros.

2 Semejanza

Página 150

1. Las figuras A, B y C son semejantes.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre A y B? ¿Y entre B y A? ¿Y entre B y C?

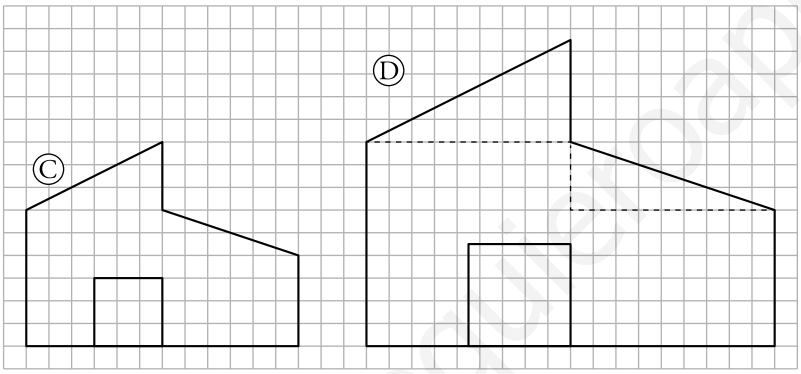
b) Copia sobre una cuadrícula la figura C y dibuja una reproducción, D, de forma que la razón de semejanza entre C y D sea 2/3.

a) La razón de semejanza entre A y B es $\frac{8}{10} = 0,8$.

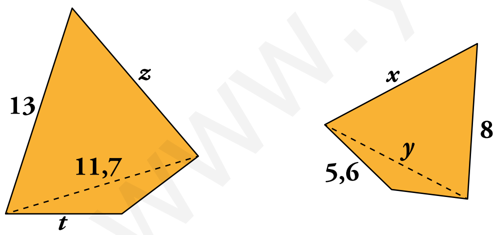
La razón de semejanza entre B y A es $\frac{10}{8} = 1,25$.

La razón de semejanza entre B y C es $\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0,83$.

b)



2. Estas dos figuras son semejantes y la razón de semejanza es 0,8. Calcula *x*, *y*, *z* y *t*.



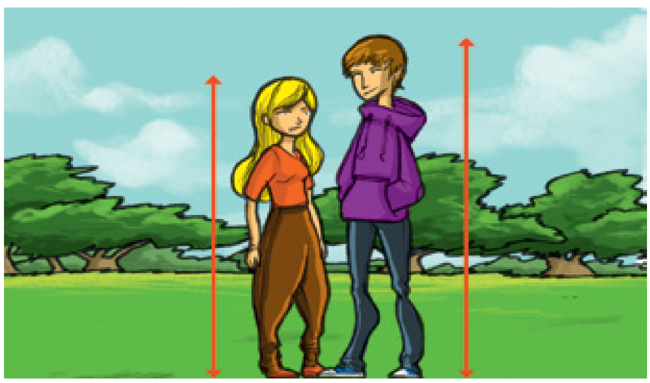
$x = 13 \cdot 0,8 \rightarrow x = 10,4$

$y = 11,7 \cdot 0,8 \rightarrow y = 9,36$

$z \cdot 0,8 = 8 \rightarrow z = 10$

$t \cdot 0,8 = 5,6 \rightarrow t = 7$

3. Sabiendo que él mide 1,83 m, ¿cuánto mide ella?



En el dibujo, el chico mide 4,5 cm, y la chica, 4 cm.

La razón de semejanza es 4 : 4,5 = 0,88

La chica mide 0,88 · 1,83 = 1,61 m.

Página 151

4. Este es el plano de una parte de cierta ciudad, a escala 1:20 000:

Estima cuánto se tarda en ir paseando, por el itinerario más corto, desde A hasta C, pasando por B, suponiendo que se camina a 3 km/h.

1 cm del plano equivale a 20 000 cm = 200 m en la realidad.

Medimos el camino sobre el mapa:

$$2 + 2{,}8 + 1{,}2 + 2{,}2 + 1{,}1 = 9{,}3 \text{ cm}$$

$$9{,}3 \cdot 20\,000 = 186\,000 \text{ cm} = 1{,}86 \text{ km}$$

$$t = \frac{e}{v} = \frac{1{,}86}{3} = 0{,}62 \text{ h} = 0{,}62 \cdot 60 \text{ min} = 37{,}2 \text{ min} \approx 37 \text{ min}$$

5. Sabiendo que Barcelona está a 1 000 kilómetros de Lisboa, o que Burdeos se encuentra a 1 600 kilómetros de Marrakech:

a) ¿A qué escala está dibujado el mapa?

b) ¿Cuál es la distancia entre Santander y Cádiz? ¿Y entre Cádiz y Santa Cruz de Tenerife?

c) Busca alguna ciudad que esté aproximadamente a 400 km de Almería.

d) Busca las dos capitales de provincia más alejadas en la España peninsular y calcula la distancia que las separa.

a) La distancia en el mapa de Lisboa a Barcelona es de 5 cm.

La distancia real de Lisboa a Barcelona es de 1 000 km = 100 000 000 cm = 10^8 cm.

1 cm en el mapa equivale a $\frac{10^8}{5}$ = 20 000 000 cm en la realidad.

Es decir, la escala es 1 : 20 000 000

b) Santander-Cádiz en el mapa mide 4 cm.

Santander-Cádiz en la realidad será 4 · 20 000 000 = 80 000 000 cm = 800 km

Cádiz-Santa Cruz de Tenerife en el mapa mide 6,5 cm.

Cádiz-Santa Cruz de Tenerife en la realidad será 6,5 · 20 000 000 = 130 000 000 cm = 1 300 km

c) 400 km = 40 000 000 cm; 40 000 000 : 20 000 000 = 2 cm

Tenemos que buscar alguna ciudad que esté en el mapa a 2 cm de Almería (trazamos una circunferencia de 2 cm de radio centrada en Almería). Por ejemplo, Castellón de la Plana, Madrid, Teruel, Huelva…

d) Las dos capitales de provincia dentro de la España peninsular más alejadas son Cádiz y Girona.

Distan en el mapa unos 5 cm, que equivalen a 5 · 20 000 000 = 100 000 000 cm = 1 000 km.

3 Semejanza de triángulos

Página 152

1. **¿Verdadero o falso?**

Dos triángulos son semejantes si:

a) Tienen dos ángulos iguales.

b) Son rectángulos y tienen un lado en común.

c) Son rectángulos y tienen igual un ángulo agudo.

d) Los lados son paralelos dos a dos.

e) Se pueden colocar de forma que uno de los ángulos del menor quede encajado en un ángulo del mayor.

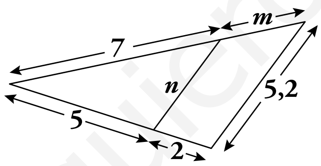
f) Tienen un ángulo en común y los correspondientes lados opuestos paralelos.

g) Se pueden colocar en posición de Tales.

a) Verdadero b) Falso c) Verdadero d) Verdadero

e) Falso f) Verdadero g) Verdadero

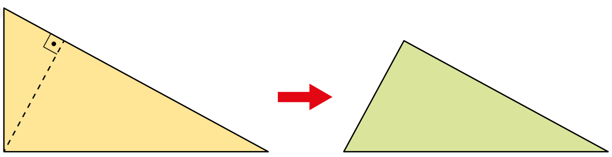
2. **Calcula el valor de *m* y *n*.**



$$\frac{7}{5} = \frac{m}{2} \rightarrow 14 = 5m \rightarrow m = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

$$\frac{7}{5} = \frac{5{,}2}{n} \rightarrow 26 = 7n \rightarrow n = \frac{26}{7} = 3{,}7$$

3. **Observa el triángulo amarillo y el triángulo verde:**

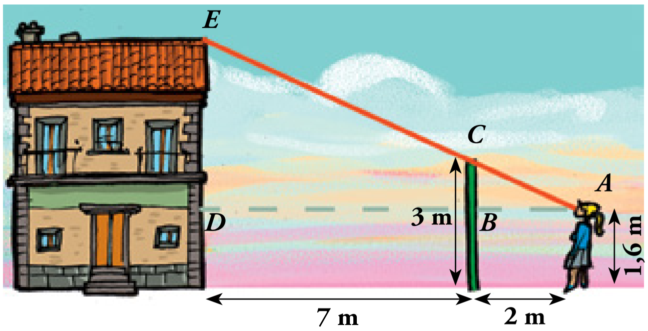


¿Se pueden colocar en posición de Tales? ¿Cómo? ¿Son semejantes? Justifica tus respuestas.

Se pueden colocar en posición de Tales porque son rectángulos y tienen el ángulo agudo menor igual. Por tanto, son semejantes.

Página 153

4. Micaela, que mide 1,60 m, se sitúa frente a la valla próxima a un edificio de modo que ve alineadas la parte alta de la valla y la del edificio. Después, señala su posición y toma las medidas que ves en el dibujo.



Y con esos datos, dice que puede calcular la altura del edificio. ¿Podrías hacerlo tú?

$\overline{CB} = 3 - 1{,}6 = 1{,}4$ m

$\overline{AD} = 2 + 7 = 9$ m

Por tanto: $\dfrac{9}{x} = \dfrac{2}{1{,}4} \rightarrow x = 6{,}3$ m

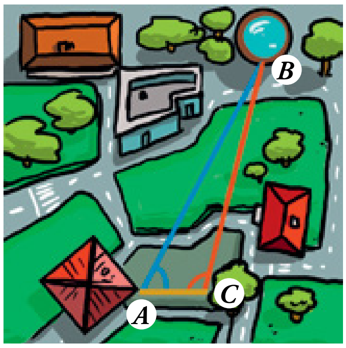
La altura del edificio es 6,3 + 1,6 = 7,9 m.

5. Eva ve desde su casa el depósito de agua del pueblo, y quiere averiguar a qué distancia se encuentra. Para conseguirlo, elige un punto C, cerca de casa. Después, mide:

— Los ángulos $\hat{A} = 62°$ y $\hat{C} = 105°$.

— La distancia $\overline{AC} = 45$ m.

Con esos datos, halla la distancia $\overline{AB}$ que busca Eva.



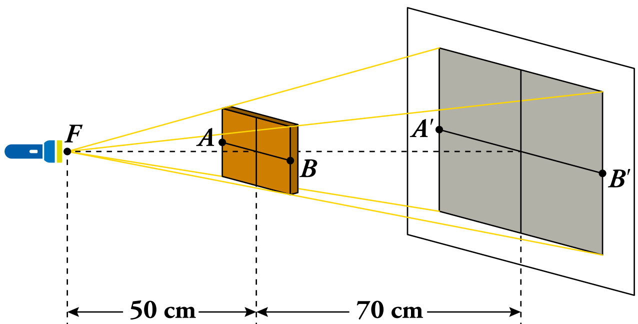
La razón de semejanza entre ABC y $A'B'C'$ es 1 000.

La medida de $\overline{A'B'}$ sobre el cuaderno es de unos 19,3 cm.

La distancia $\overline{AB}$ es de unos 19,3 · 1 000 = 19 300 cm = 193 metros.

6. Una linterna ilumina un tablero cuadrado, proyectando una sombra, también cuadrada, sobre la pantalla que tiene detrás.

Si el lado del tablero mide 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones de la sombra?



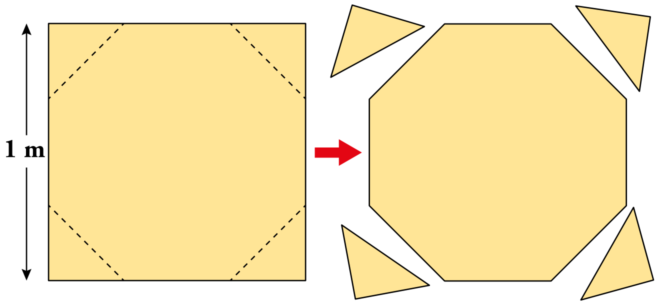
Los triángulos FAB y $FA'B'$ son semejantes porque están en posición de Tales.

Aplicamos Tales utilizando los lados AB y $A'B'$ y las alturas del triángulo:

$$\frac{50}{120} = \frac{18}{A'B'} \rightarrow A'B' = 43{,}2 \text{ cm}$$

Página 154

7. Cortando las cuatro esquinas de una plancha cuadrada de madera, de un metro de lado, se quiere obtener un tablero de una mesa con forma de octógono regular.



¿Qué dimensiones deben tener las esquinas?

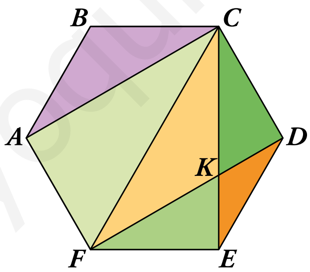
La primera ecuación refleja las relaciones de proporcionalidad entre los lados de los dos triángulos coloreados.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{x} + \sqrt{2}y = 0 \\ \cancel{x} + \ \ 2y = 1 \end{cases}$$

$$(2 + \sqrt{2})y = 1 \ \rightarrow \ y = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 0{,}293 \text{ m} \ \rightarrow \ 293 \text{ mm medirán los catetos}$$

$x + 2 \cdot 0{,}293 = 1 \ \rightarrow \ x = 1 - 0{,}586 = 0{,}414$ m $= 414$ mm medirá la hipotenusa.

8. Observa la propuesta de un taller de diseño en el proyecto de una vidriera hexagonal de un metro de lado:



Las piezas se cortarán de láminas de cristal de distintos colores.

¿Cuánto miden los lados *AC*, *CF*, *CK*, *FK*, *DK* y *EK*?

- $\overline{CF}$ es igual a dos veces el radio del hexágono, que es igual al lado. Luego $\overline{CF} = 2$, por tanto:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 = \overline{CF}^2 \qquad \overline{AC}^2 + 1^2 = 2^2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

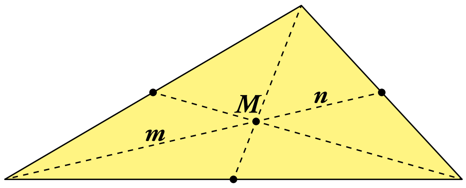
- Como los dos triángulos son semejantes con razón $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\overline{CK} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m} \qquad \overline{DK} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$\overline{FK} = \overline{DF} - \overline{KD} = \overline{AC} - \overline{KD} \ \rightarrow \ \overline{FK} = \sqrt{3} - \overline{KD} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$\overline{EK} = \overline{CE} - \overline{CK} = \overline{AC} - \overline{CK} \ \rightarrow \ \overline{EK} = \sqrt{3} - \overline{CK} = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

9. **En este triángulo se han trazado las medianas (segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto). Así, el punto *M* es el baricentro.**



Justifica la propiedad de las medianas: el baricentro, , divide a cada mediana en dos segmentos, uno doble del otro ($m = 2n$).

Los triángulos son semejantes porque sus lados son paralelos y por tanto sus ángulos son iguales.

Su razón de semejanza es $\frac{1}{2}$ y por tanto, al ser $n = y$, resulta:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{m} = \frac{n}{m} \rightarrow m = 2n$$

4 Una proporción interesante: la proporción cordobesa

Página 155

1. Justifica la siguiente afirmación:

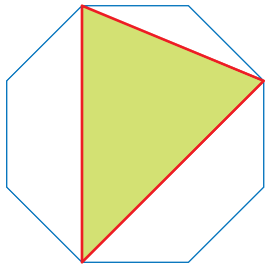
Cualquier triángulo acutángulo e isósceles, con un ángulo de 45°, es un triángulo cordobés.

Porque en un triángulo acutángulo e isósceles, si uno de sus ángulos mide 45°, este es necesariamente el ángulo desigual, ya que si no lo fuese, el ángulo desigual debería medir 90° y el triángulo sería rectángulo, no acutángulo.

Por tanto, verifica las condiciones del triángulo cordobés: es isósceles y el ángulo opuesto al lado desigual (el ángulo desigual) mide 45°.

Página 156

2. Justifica que el triángulo coloreado en el octógono es un triángulo cordobés.

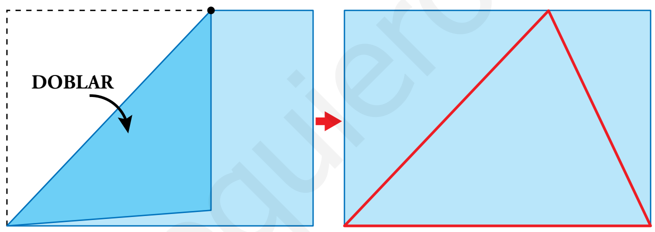


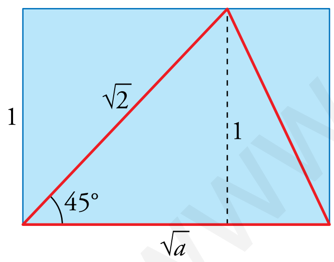
Es un triángulo isósceles, puesto que los lados que forman el ángulo α son dos diagonales iguales del octógono.

Además, si trazamos la circunferencia circunscrita al octógono, α sería el ángulo inscrito correspondiente a un ángulo central que mide $\frac{360°}{8} \cdot 2 = 90°$ (ya que abarca tres vértices del octógono), por tanto $\alpha = \frac{90}{2} = 45°$.

Verifica entonces la afirmación del ejercicio anterior que aseguraba que cualquier triángulo acutángulo isósceles, con un ángulo de 45° es un triángulo cordobés.

3. Explica por qué el triángulo rojo construido como se indica en el dibujo, con una hoja A-4, es un triángulo cordobés.





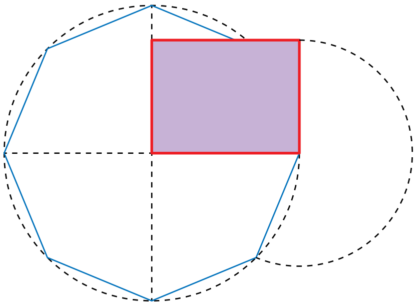
Como al doblar se forma un cuadrado de lado 1, su diagonal mide $\sqrt{2}$.

La mitad de un ángulo recto son 45°.

Ya que $\frac{a}{1} = \frac{1}{a/2} \rightarrow \frac{a^2}{2} = 1 \rightarrow a = \sqrt{2}$

Luego es un triángulo acutángulo isósceles con ángulo desigual 45°, por tanto, un triángulo cordobés.

4. Explica por qué el rectángulo coloreado es un rectángulo cordobés.

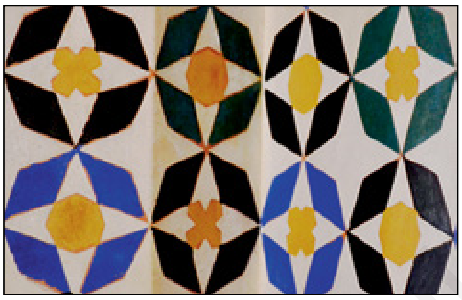


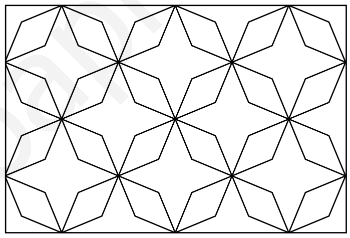
La altura del rectángulo coincide con el lado del octógono regular, puesto que es el radio de la circunferencia que se traza tomando como medida ese lado.

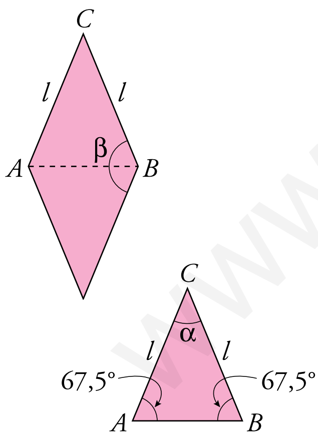
La base del rectángulo coincide con el radio del octógono regular.

Por tanto, la relación entre la altura y la base del rectángulo coincide con la relación entre el lado y el radio del octógono regular. El rectángulo es cordobés.

5. El mosaico que ves debajo se encuentra en la Alhambra de Granada. ¿Encuentras en él la proporción cordobesa?







El triángulo ABC es isósceles, puesto que los lados iguales se corresponden con los lados del octógono regular.

El ángulo β es el ángulo interior de un octógono regular, y mide $\dfrac{180° \cdot 6}{8} = 135°$.

Cada uno de los ángulos iguales del triángulo mide:

$$135° : 2 = 67,5°$$

y el desigual:

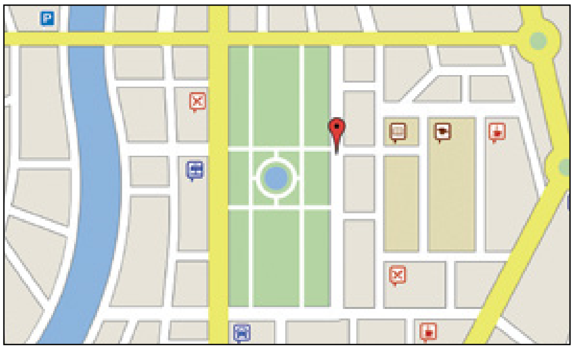
$$180° - 135° = 45°$$

Son, por tanto, dos triángulos cordobeses unidos por el lado desigual. Es un diamante cordobés.

5 Áreas y volúmenes de figuras semejantes

Página 158

1. La ilustración muestra una porción del plano de una ciudad, representado a escala 1:30 000.



a) ¿Qué superficie ocupa el parque en el plano?

b) ¿Cuál es su superficie real en metros cuadrados?

a) En el plano, el parque mide 1,3 cm de ancho y 3,4 cm de alto.

$A_{PLANO} = 1{,}3 \cdot 3{,}4 = 4{,}42 \text{ cm}^2$

b) La razón entre las superficies es $30\,000^2 = 900\,000\,000 = 9 \cdot 10^8$.

$A_{REAL} = 4{,}42 \cdot 9 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 = 39{,}78 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 = 397\,800 \text{ m}^2$

2. Con este mapa, y sabiendo que la distancia en línea recta entre Almería y A Coruña es de 885 km, haz una estimación de la superficie de la península ibérica.

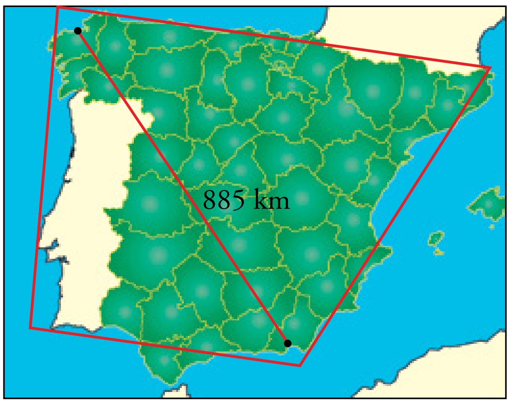
Después, busca la superficie real en Internet y cotéjala con la que has calculado.

Midiendo sobre el mapa, 5 cm se corresponden con los 885 km = 88 500 000 cm marcados.

Así, 1 cm del plano equivale a 88 500 000 : 5 = 17 700 000 cm en la realidad.

La razón entre las superficies es $17\,700\,000^2 = 3{,}1329 \cdot 10^{14}$.

Trazamos en el mapa un trapecio que abarque, aproximadamente, la superficie de la península ibérica.



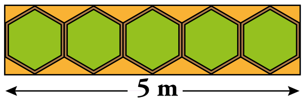
Tomamos las medidas aproximadas sobre él (base mayor = 5,7 cm; base menor = 3,5 cm; altura = 4,2 cm) y calculamos el área:

$$A_{MAPA} = \frac{5{,}7 + 3{,}5}{2} \cdot 4{,}2 = 19{,}32 \text{ cm}^2$$

$$A_{REAL} = 19{,}32 \cdot 3{,}1329 \cdot 10^{14} = 6{,}053 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2 \approx 600\,000 \text{ km}^2$$

(El área es más o menos aproximada, depende del trapecio trazado.)

3. Cinco jardineras de planta hexagonal regular, adosadas como muestra la ilustración, hacen una fila de cinco metros de largo.



a) ¿Qué superficie ocupa cada jardinera?

b) ¿Cuál es el área del rectángulo que las contiene?

a) La apotema de cada hexágono mide 5 : 5 : 2 = 0,5 m.

Calculemos el lado, x.

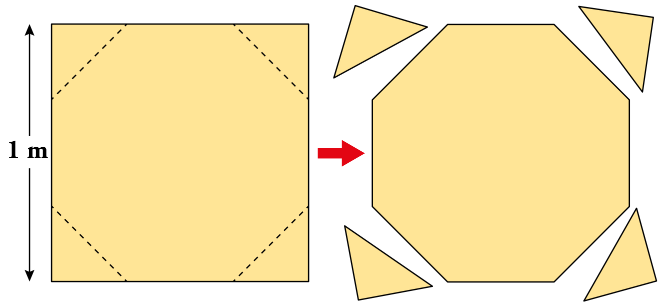
$$x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 0{,}5^2 \rightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} = 0{,}25 \rightarrow \frac{3x^2}{4} = 0{,}25 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577 \text{ m}$$

$$A_{\text{JARDINERA}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{6 \cdot 0{,}577 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}87 \text{ m}^2$$

b) $A_{\text{RECTÁNGULO}} = 5 \cdot (0{,}577 \cdot 2) = 5{,}77 \text{ m}^2$

Página 159

4. Cortando las cuatro esquinas de un tablero de madera de un metro de lado, se ha obtenido el tablero de una mesa octogonal regular:



¿Qué superficie tiene el tablero de la mesa?

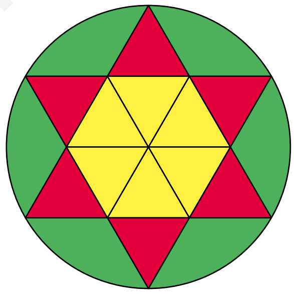
En el problema 7 de la página 154 se calculó el lado del octógono $x = 414$ mm.

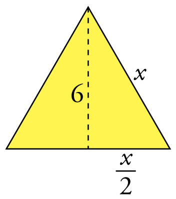
La apotema será la mitad del lado del tablero, 1 : 2 = 0,5 m = 500 mm.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{3\,312 \cdot 500}{2} = 828\,000 \text{ mm}^2 = 82{,}8 \text{ dm}^2$$

5. Se va a decorar la pista circular de un circo, de 12 m de radio, pintando en el suelo el siguiente diseño:

Si con cada bote de pintura se pueden colorear diez metros cuadrados, ¿cuántos botes de cada color se van a necesitar?





$$x^2 = 6^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 36 + \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 - \frac{x^2}{4} = 36$$

$$\frac{3x^2}{4} = 36 \to 3x^2 = 144 \to x^2 = 48 \to x = \sqrt{48} = 6{,}9 \text{ m}$$

Luego: Área triángulo $= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6{,}9}{2} = 20{,}7 \text{ m}^2$

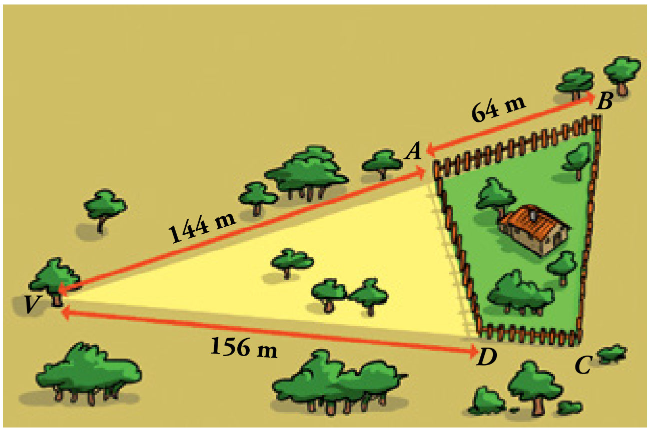
- Pintura amarilla: necesitamos pintar 20,7 · 6 = 124,2 m, como con cada bote se pueden colorear 10m^2, necesitaremos $\frac{124{,}2}{10} = 12{,}42$ botes, es decir, 13 botes de pintura amarilla.
- Pintura roja: como es la misma superficie que la pintura amarilla, seis triángulos, necesitamos la misma cantidad, 13 botes de pintura roja.
- Pintura verde:

  Área círculo $= \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 12^2 = 452{,}16 \text{ m}^2$

  El área de 12 triángulos será: $20{,}7 \cdot 12 = 248{,}4 \text{ m}^2$

  Luego necesitamos pintar $452{,}16 - 248{,}4 = 203{,}76 \text{ m}^2$ de pintura verde, como con cada bote se pueden colorear 10 m^2, necesitaremos $\frac{203{,}76}{10} = 20{,}376$ botes, es decir, 21 botes de pintura verde.

6. Calcula la superficie de la finca vallada sabiendo que los ángulos $\widehat{VAD}$ y $\widehat{BCD}$ son rectos.



Aplicando el teorema de Pitágoras en $\widehat{VAD}$:

$$AD^2 = 156^2 - 144^2 \rightarrow AD = \sqrt{3600} = 60 \text{ m}$$

Los triángulos $\widehat{VCB}$ y $\widehat{VAD}$ son semejantes:

$$\frac{60}{BC} = \frac{156}{144+64} \rightarrow BC = \frac{60 \cdot 208}{156} = 80 \text{ m}$$

$$\frac{144}{VC} = \frac{156}{208} \rightarrow VC = \frac{144 \cdot 208}{156} = 192 \text{ m}$$

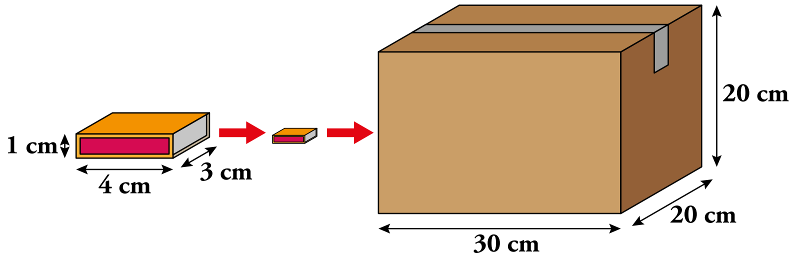
$$A_{\widehat{VCB}} = \frac{192 \cdot 80}{2} = 7\,680 \text{ m}^2$$

$$A_{\widehat{ADB}} = \frac{144 \cdot 60}{2} = 4\,320 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{FINCA VALLADA}} = 7\,680 - 4320 = 3\,360 \text{ m}^2$$

Página 160

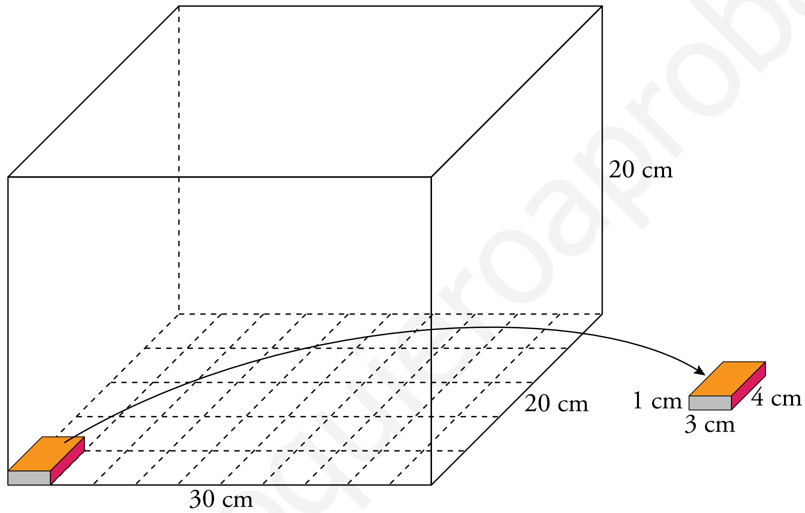
7. Un fabricante de cerillas presenta su producto en cajitas de 25 unidades y las distribuye en cajas grandes de cartón, con las formas y tamaños que ves en la ilustración.



a) ¿Cuántas cajitas de cerillas lleva cada caja-envase?

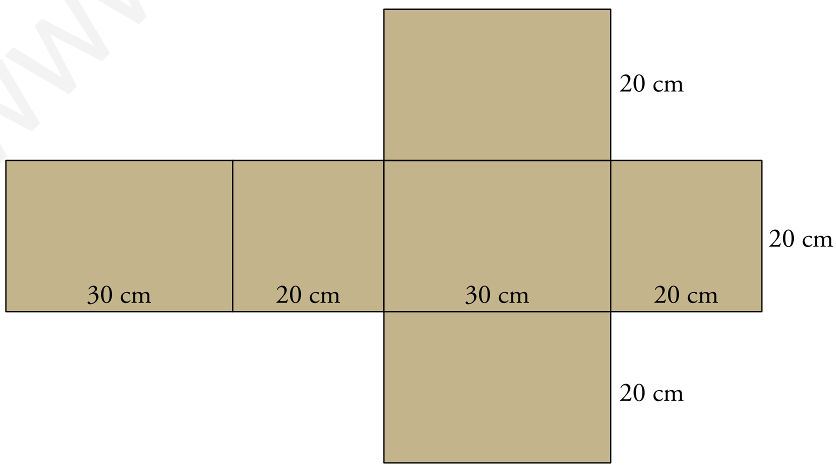
b) ¿Cuál es el área de la plantilla de cartón con la que se fabrica cada caja, si las solapas aumentan en un 20 % la superficie teórica?

a)



En la posición indicada en el gráfico, caben 10 cajitas a lo ancho y 5 en profundidad; es decir, 50 de ellas en cada capa. A lo alto caben 20 capas. En total, caben $50 \cdot 20 = 1\,000$ cajitas de cerillas.

b)

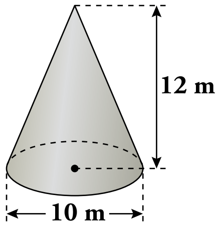


$S_{\text{TEÓRICA}} = 4 \cdot 30 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \cdot 20 = 2\,400 + 800 = 3\,200 \text{ cm}^2$

Añadimos un 20 % por las solapas, y la superficie de cartón necesaria es:

$S_{\text{CAJA}} = 3\,200 \cdot 1{,}20 = 3\,840 \text{ cm}^2$

8. **Un torreón circular está coronado por un tejado de pizarra en forma de cono, de 10 m de diámetro en la base y 12 m de altura.**



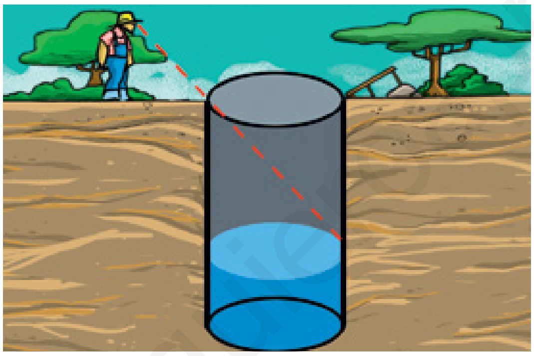
¿Cuánto costará renovar la cubierta, si se ha contratado a 85 € el metro cuadrado?

$$h^2 + r^2 = g^2 \rightarrow 12^2 + 5^2 = g^2 \rightarrow g = \sqrt{169} = 13$$

$$A = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 13 = 204{,}1 \text{ m}^2$$

Como cuesta 85 € el metro cuadrado, costará 204,1 · 85 = 17 348,50 €.

9. **El pozo para riego de una huerta tiene una profundidad de siete metros y un diámetro de tres metros. El hortelano comprueba que hoy, para alcanzar a ver el agua, debe colocarse a menos de metro y medio del borde.**



¿Cuáles son hoy las reservas de agua del pozo, sabiendo que el hortelano mira desde una altura de 1,80 m?

Como los triángulos son semejantes:

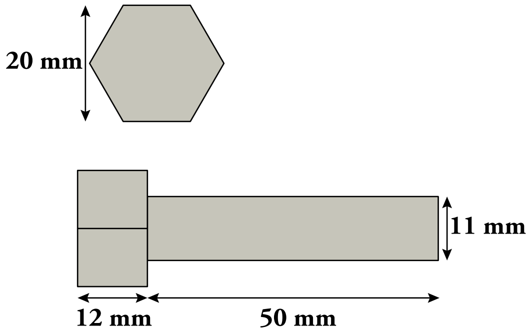
$$\frac{1{,}80}{x} = \frac{1{,}5}{3} \rightarrow x = 3{,}6 \text{ m}$$

$$y = 7 - 3{,}6 = 3{,}4 \text{ m}$$

Volumen cilindro = $A_{\text{BASE}} \cdot h = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 3{,}4 = 24{,}021 \text{ m}^3$ de agua.

Página 161

10. La masa de este tornillo es 52 gramos:



¿Cuál es la densidad del acero utilizado en su fabricación?

(NOTA: densidad = masa/volumen)

$$\text{Apotema} = 10 \text{ mm} \;\rightarrow\; x^2 = 10^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{400}{3} \;\rightarrow\; x = 11{,}55 \text{ mm}$$

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{6 \cdot 11{,}55 \cdot 10}{2} = 346{,}5 \text{ mm}^2$$

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{h} = 346{,}5 \cdot 12 = 4\,158 \text{ mm}^3$$

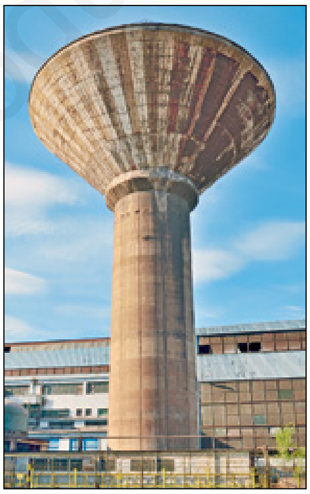
$$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{h} = \pi \cdot r^2 \cdot 50 = 3{,}14 \cdot 5{,}5^2 \cdot 50 = 4\,749{,}25 \text{ mm}^3$$

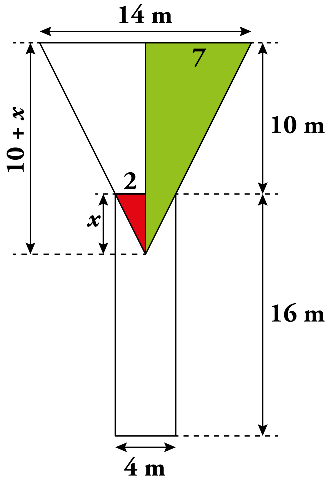
$$V_{\text{TOTAL}} = 4\,158 + 4\,749{,}25 = 8\,907{,}25 \text{ mm}^3 = 8{,}90725 \text{ cm}^3$$

$$\text{Densidad} = \frac{52}{8{,}90725} = 5{,}84 \text{ g/cm}^3$$

11. ¿Cuántos litros contiene este depósito cuando está lleno?

NOTA: La columna inferior no almacena agua.





Los dos triángulos coloreados son semejantes, pueden ponerse en posición de Tales:

$$\frac{2}{7} = \frac{x}{10 + x} \;\rightarrow\; 20 + 2x = 7x \;\rightarrow\; 5x = 20 \;\rightarrow\; x = 4$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \text{H} = \frac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 14 \approx 718{,}01 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \text{h} = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 \approx 16{,}75 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 718{,}01 - 16{,}75 = 701{,}26 = 701\,260 \text{ litros.}$$

12. Para averiguar la capacidad de este depósito, se ha tomado la foto adjunta y se ha medido, con una cuerda, la circunferencia de la base: 9,42 m.

¿Son suficientes esos datos? Justifica tu respuesta y, si es afirmativa, calcula la capacidad.

Los datos son suficientes. Midiendo sobre la fotografía y aplicando lo que sabemos sobre semejanza, averiguaremos la capacidad del depósito.

Veamos cuál es el radio real del depósito cilíndrico:

$$L = 2\pi r \;\rightarrow\; 9{,}42 = 2\pi r \;\rightarrow\; r = \frac{9{,}42}{2\pi} \approx 1{,}5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$$

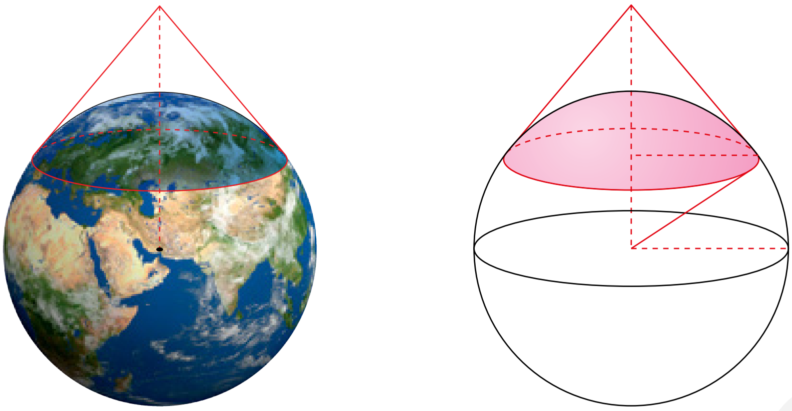
Medimos sobre la fotografía: el depósito tiene 3,5 cm de altura y 2 cm de diámetro.

$$\frac{\text{Diámetro en la foto}}{\text{Diámetro real}} = \frac{\text{Altura en la foto}}{\text{Altura real}} \;\rightarrow\; \frac{2}{300} = \frac{3{,}5}{h} \;\rightarrow\; h = 525 \text{ cm} = 5{,}25 \text{ m}$$

$V_{\text{DEPÓSITO}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5{,}25 \approx 37{,}11 \text{ m}^3 = 37\,110$ litros.

Página 162

13. **¿Cuál es la superficie de la Tierra que se ve desde un satélite que orbita a 1 000 km de altura?**



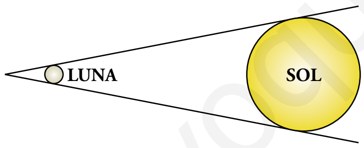
$$\frac{R}{R+d} = \frac{R-\text{h}}{R} \rightarrow \frac{6\,371}{6\,371+1\,000} = \frac{6\,371-\text{h}}{6\,371}$$

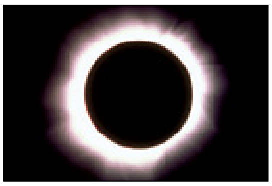
$40\,589\,641 = 46\,960\,641 - 7\,371\text{h} \rightarrow \text{h} = 864{,}33$ km

$A_{\text{CASQUETE}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \text{h} = 2 \cdot 3{,}1415 \cdot 6371 \cdot 864{,}33 = 34\,598\,259{,}51$

Casi 35 millones de km^2.

14. **La Luna está a 384 000 km de la Tierra, y el Sol, a 150 millones de kilómetros. El tamaño aparente de ambos es prácticamente el mismo, como se comprueba en los eclipses, cuando la Luna se pone delante del Sol.**





Sabiendo que la Luna tiene un diámetro de 3 500 km, ¿cuál es la superficie del Sol? ¿Y el volumen?

Suponemos que la Luna es una esfera perfecta.

$$S_{\text{LUNA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1\,750^2 = 38\,484\,510 \text{ km}^2 \approx 3{,}85 \cdot 10^7 \text{ km}^2$$

$$V_{\text{LUNA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1\,750^3 = 22\,449\,297\,500 \text{ km}^3 \approx 2{,}24 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$$

La razón de semejanza entre la Luna y el Sol será:

$$\frac{d_{\text{L}}}{d_{\text{S}}} = k \rightarrow k = \frac{384\,000}{150\,000\,000} = 0{,}00256$$

Por tanto:

$$S_{\text{SOL}} = \frac{S_{\text{L}}}{k^2} = \frac{3{,}85 \cdot 10^7}{(0{,}00256)^2} \approx 5{,}87 \cdot 10^{12} \text{ km}^2$$

$$V_{\text{SOL}} = \frac{V_{\text{L}}}{k^3} = \frac{2{,}24 \cdot 10^{10}}{(0{,}00256)^3} \approx 1{,}34 \cdot 10^{18} \text{ km}^3.$$

15. La gran pirámide de Guiza se construyó en tiempos del faraón Keops, unos 2 550 años a. C. Inicialmente estaba recubierta de una capa de planchas de roca caliza pulida, que se perdió, en parte, en un terremoto (siglo XIV), y después por el saqueo destinado a la construcción de otros edificios.

Un aventurero que la visitó a finales del siglo XVIII dejó constancia en su diario de algunas de sus dimensiones: rodeándola por la base, midió 920 m, y para escalarla hasta la cima, por una arista lateral, hubo de recorrer 214 m.

a) Calcula el área que cubría originalmente la caliza blanca.

b) Estima el peso de la pirámide, suponiendo que un metro cúbico de piedra pesa 2,5 toneladas.

a) Calculamos la apotema de la pirámide:

$$214^2 = a^2 + 115^2 \rightarrow a = \sqrt{45\,796 - 13\,225} = \sqrt{32\,571} \approx 180{,}5 \text{ m}$$

El área de cada triángulo es: $A = \dfrac{b \cdot \text{h}}{2} = \dfrac{230 \cdot 180{,}5}{2} = 20\,757{,}5 \text{ m}^2$

El área que abarca la caliza blanca es $20\,757{,}5 \cdot 4 = 83\,030 \text{ m}^2$.

b) Para calcular el volumen de la pirámide, calculamos primero su altura:

$$a^2 = \text{h}^2 + 115^2 \rightarrow 180{,}5^2 = \text{h}^2 + 115^2$$

$$32\,580{,}25 = \text{h}^2 + 13\,225$$

$$\text{h}^2 = 19\,355{,}25 \rightarrow \text{h} = 139 \text{ m aproximadamente}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot \text{h} = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 139 = 2\,451\,033{,}3 \text{ m}^3$$

Como un metro cúbico de piedra pesa 2,5 toneladas, el peso de la pirámide será:

$$2\,451\,033{,}3 \cdot 2{,}5 = 6\,127\,583{,}3 \text{ toneladas}$$

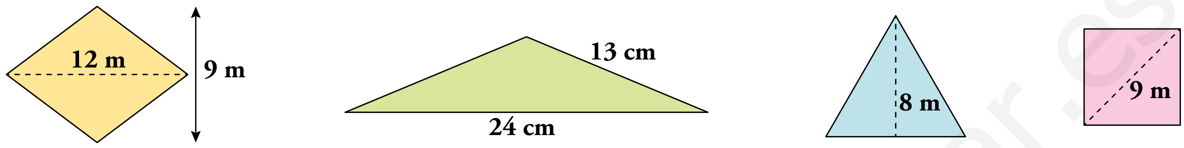
Ejercicios y problemas

Página 163

Practica

Teorema de Pitágoras

1. **Observa las figuras y calcula.**



a) El perímetro del rombo.

b) La altura del triángulo isósceles.

c) El lado del triángulo equilátero.

d) El lado del cuadrado.

a) $l^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25$

$l = 7{,}5$ cm

Luego, Perímetro $= 4 \cdot l = 4 \cdot 7{,}5 = 30$ m.

b) $13^2 = h^2 + 12^2$

$169 = h^2 + 144$

$h^2 = 169 - 144 = 25 \rightarrow h = \sqrt{25} = 5$ cm

c) $l^2 = 8^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 64 + \frac{l^2}{4}$

$64 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l^2 = 85{,}3$

$l = 9{,}24$ m

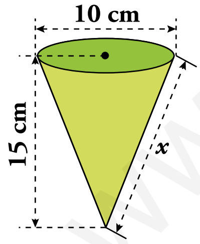
d) $9^2 = l^2 + l^2$

$81 = 2l^2 \rightarrow l^2 = \frac{81}{2} = 40{,}5$

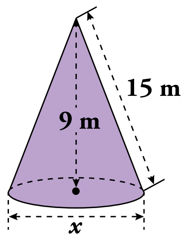
$l = 6{,}36$ m

2. **Calcula x en cada caso:**

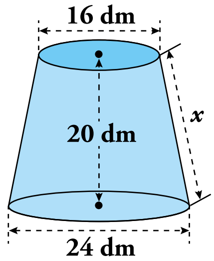
a)



b)



c)



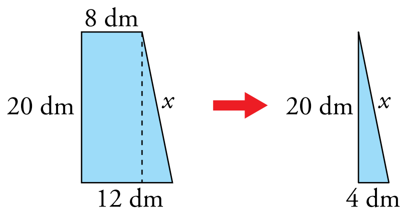
a) $x^2 = 15^2 + 5^2 = 225 + 25 = 250$

$x = \sqrt{250} = 15{,}8$ cm

b) $15^2 = 9^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$225 - 81 = \frac{x^2}{4} \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow x = 24$ m

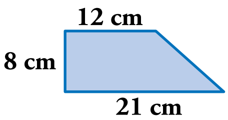
c)

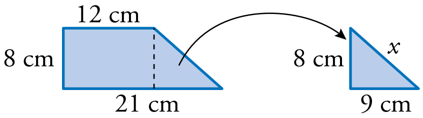


$x^2 = 20^2 + 4^2 = 400 + 16 = 416$

$x = \sqrt{416} = 20{,}4$ m

3. **Calcula el perímetro de este trapecio rectángulo:**





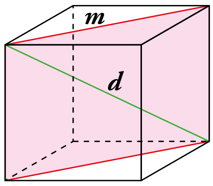
$x^2 = 8^2 + 9^2 \rightarrow x = \sqrt{145} \approx 12{,}04$ cm

Perímetro = 8 + 12 + 12,04 + 21 = 53,04 cm

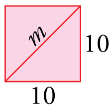
4. **En un cubo de arista 10 cm, calcula:**

a) La diagonal de una cara (*m*).

b) La diagonal del cubo (*d*).



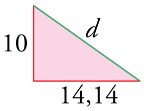
a)



$m^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$

$m = \sqrt{200} = 14{,}14$ cm

b)

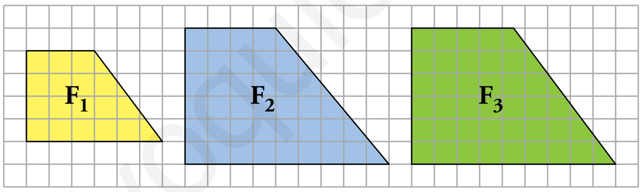


$d^2 = 10^2 + 14{,}14^2 = 100 + 200 = 300$

$d = 17{,}32$ cm

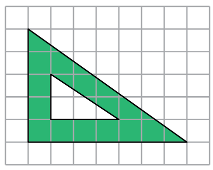
Figuras semejantes

5. **¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?**



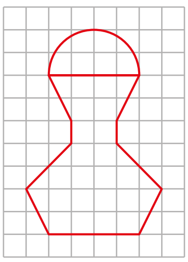
F_1 es semejante a F_3. La razón de semejanza es $\frac{2}{3}$.

6. **¿Son semejantes los triángulos interior y exterior del cartabón? Razona tu respuesta.**



No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

7. **Reproduce esta figura en papel cuadriculado y dibuja otra, semejante, de doble tamaño. Después, calcula el área de cada una.**



¿Cuál es la razón entre las áreas de las dos figuras?

- El área de la semicircunferencia pequeña es $\dfrac{\pi \cdot 4}{2} = 2\pi$ u^2.

  El resto de la figura pequeña tiene un área de 26 u^2.

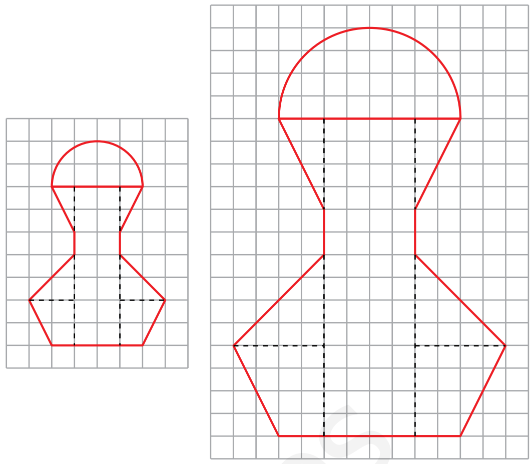
  $A_{TOTAL} = 26 + 2\pi$ u^2

- El área de la semicircunferencia mayor es $\dfrac{\pi \cdot 16}{2} = 8\pi$ u^2.

  El resto de la figura mayor tiene un área de 104 u^2.

  $A_{TOTAL} = 104 + 8\pi$ u^2

La razón entre las áreas es 4.



8. **Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:**

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm^2.

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm^3 de agua.

a) $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} \rightarrow h \\ 4 \text{ cm} \rightarrow d \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} h = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array}\right\}$ La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.

b) $40 \cdot 250^2 = 2\,500\,000$ cm^2 = 250 m^2

c) $20 \cdot 250^3 = 312\,500\,000$ cm^3 = 312,5 m^3

9. **En un mapa de escala 1:1 500 000, la distancia entre dos poblaciones es de 2 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real?

b) ¿Qué distancia habrá en el plano entre dos ciudades que distan 180 km?

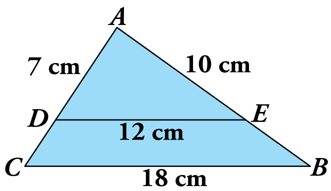
a) Distancia real = $2 \cdot 1\,500\,000 = 3\,000\,000$ cm = 30 km

b) 180 km = 18 000 000 cm

Distancia en el mapa = $\dfrac{18\,000\,000}{1\,500\,000} = 12$ cm

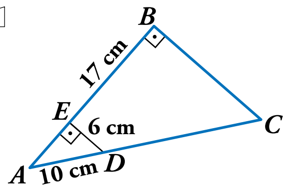
Semejanza de triángulos

10. **En el triángulo *ABC* hemos trazado *DE* paralelo a *CB*. ¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *ADE*? Calcula $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.**



Los triángulos son semejantes porque están en posición de Tales.

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{AC} = \dfrac{7 \cdot 18}{12} = 10{,}5$ cm $\qquad \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{10 \cdot 18}{12} = 15$ cm

11. 

¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *AED*? Halla el perímetro del trapecio *EBCD*.

Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, $\hat{A}$. Tienen los tres ángulos iguales.

- Hallamos $\overline{EA}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

  $\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm; $\overline{EA} = 8 + 17 = 25$ cm

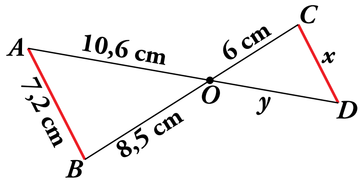
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \to \dfrac{10 + x}{10} = \dfrac{25}{8} \to 80 + 8x = 250 \to x = 21{,}25 \to \overline{DC} = 21{,}25$ cm

- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \to \dfrac{\overline{BC}}{6} = \dfrac{25}{8} \to \overline{BC} = \dfrac{150}{8} = 18{,}75$ cm

- Perímetro de $EBCD = 17 + 18{,}75 + 21{,}25 + 6 = 63$ cm

Página 164

12. Observa esta figura, en la que el segmento *AB* es paralelo a *CD*.



a) Di por qué son semejantes los triángulos *OAB* y *ODC*.

b) Calcula *x* e *y*.

a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

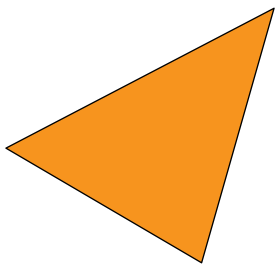
b) $\frac{x}{7,2} = \frac{6}{8,5} \rightarrow x = \frac{7,2 \cdot 6}{8,5} \approx 5,08$ cm $\qquad \frac{6}{8,5} = \frac{y}{10,6} \rightarrow y = \frac{10,6 \cdot 6}{8,5} \approx 7,48$ cm

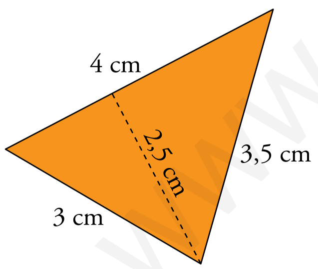
13. La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm², ¿cuál es el área del menor?

El área menor es $150 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 24$ cm².

Aplica lo aprendido

14. Esta figura representa, a escala 1:2000, una parcela de terreno. Calcula su perímetro y su área, tomando las medidas necesarias.





$P_{\text{GRÁFICO}} = 4 + 3 + 3,5 = 10,5$ cm

$P_{\text{REAL}} = 10,5 \cdot 2\,000 = 21\,000$ cm $= 210$ m

$A_{\text{GRÁFICO}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 2,5}{2} = 5$ cm²

$A_{\text{REAL}} = 5 \cdot 2\,000^2 = 20\,000\,000$ cm² $= 2\,000$ m²

15. Dos triángulos *ABC* y *PQR* son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

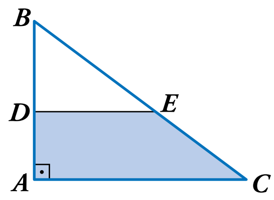
Perímetro del triángulo *ABC*: $24 + 28 + 34 = 86$ m

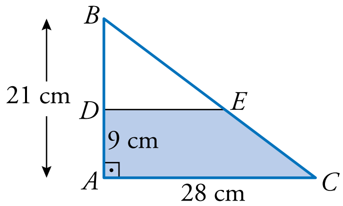
Razón de semejanza: $\frac{129}{86} = \frac{3}{2}$

Lados del triángulo *PQR*: $24 \cdot \frac{3}{2} = 36$ cm; $28 \cdot \frac{3}{2} = 42$ cm; $34 \cdot \frac{3}{2} = 51$ cm

16. **Los catetos del triángulo rectángulo ABC miden $\overline{AC} = 28$ cm y $\overline{AB} = 21$ cm.**

Desde el punto D tal que $\overline{AD} = 9$ cm, se traza una paralela a AC. Halla el área y el perímetro del trapecio $ADEC$.





Los triángulos ABC y DBE son semejantes.

Por ello:

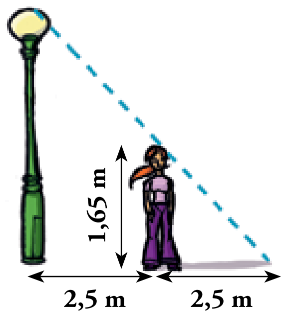
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{21}{12} = \frac{28}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 28}{21} = 16 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35 \text{ m} \\ \overline{BE} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ m}\end{array}\right\} \overline{EC} = 35 - 20 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Área del trapecio} = \frac{28 + 16}{2} \cdot 9 = 198 \text{ cm}^2$$

Perímetro del trapecio = 9 + 16 + 15 + 28 = 68 cm

17. **Si la altura de Rita es 1,65 m, ¿cuál es la altura de la farola?**



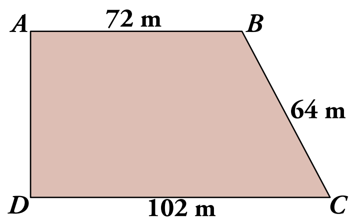
Si x es la altura que buscamos, entonces:

$$\frac{x}{1,65} = \frac{5}{2,5} \rightarrow x = 3,3 \text{ m}$$

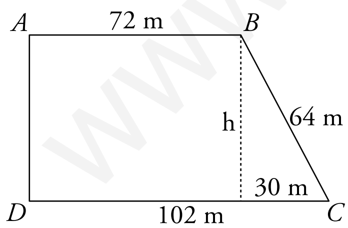
18. **Una parcela tiene forma de trapecio rectángulo con las dimensiones que se ven en la figura.**

a) Calcula su altura.

b) Se quiere hacer un pozo en el punto donde se cortan las prolongaciones de los lados AD y BC. ¿A qué distancia de A y de B estará el pozo?

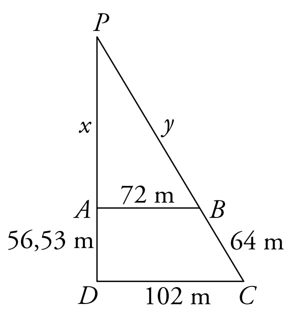


a)



$$h = \sqrt{64^2 - 30^2} = 56,53 \text{ m}$$

b)

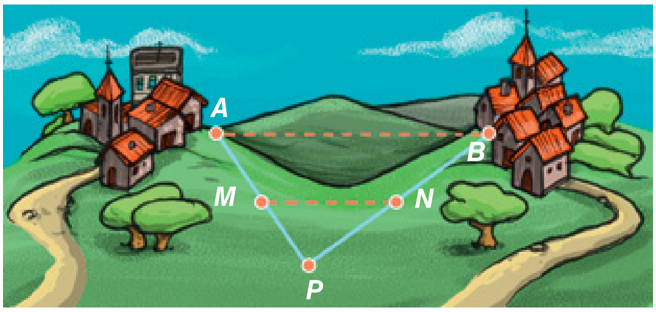


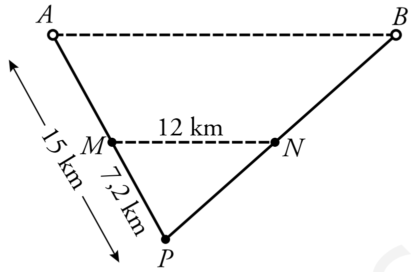
$$\frac{x}{72} = \frac{x + 56,53}{102} \rightarrow 102x = 72x + 4\,070,16 \rightarrow x = 135,67 \text{ m}$$

$$\frac{y}{72} = \frac{y + 64}{102} \rightarrow 102y = 72y + 4\,608 \rightarrow y = 153,6 \text{ m}$$

El pozo estará a 135,67 m de A y a 153,6 m de B.

19. **Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia $\overline{AB}$ fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas $\overline{AP}$ = 15 km, $\overline{PM}$ = 7,2 km y $\overline{MN}$ = 12 km. (MN es paralela a AB). Halla la distancia $\overline{AB}$.**

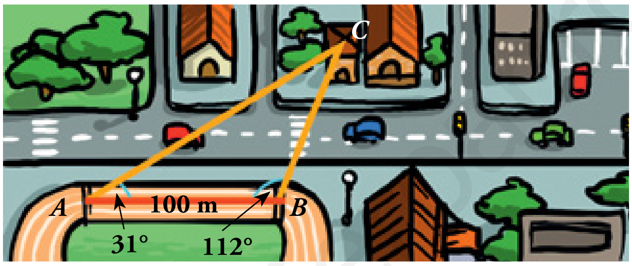




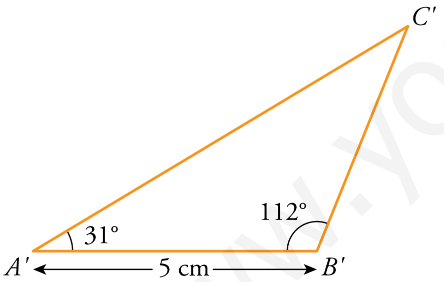
Los triángulos APB y MPN son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{12} = \frac{15}{7,2} \rightarrow \overline{AB} = \frac{15 \cdot 12}{7,2} = 25 \text{ km}$$

20. **Desde los extremos A y B de la recta de los 100 m de una pista de atletismo se ve la torre de la iglesia, C. Medimos los ángulos $\hat{A} = 31°$ y $\hat{B} = 112°$. Calcula la distancia $\overline{AC}$.**



Dibuja un triángulo $A'B'C'$, semejante a ABC, con $\overline{A'B'}$ = 5 cm.

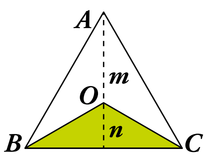


$\overline{A'C'}$ = 7,7 cm

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \rightarrow \frac{100 \text{ m}}{5 \text{ cm}} = \frac{\overline{AC}}{7,7 \text{ cm}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AC} = \frac{100 \cdot 7,7}{5} \rightarrow \overline{AC} = 154 \text{ m}$$

21. **El triángulo ABC es equilátero y se ha dividido, desde el centro, en tres partes iguales. Así, podemos afirmar que el área del triángulo verde es 1/3 del total.**



Basándote en lo anterior, justifica que $m = 2n$ (el segmento m es doble que el segmento n).

Como el área del triángulo verde es $\frac{1}{3}$ del total y la base de los dos triángulos es la misma, siendo n la altura del verde y $m + n$ la altura del total:

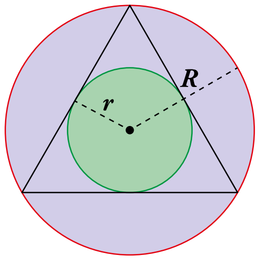
$$\frac{\cancel{b} \cdot n}{\cancel{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{b}(m+n)}{\cancel{2}}$$

$$3n = m + n \rightarrow m = 2n$$

Página 165

22. **Calcula los radios de las circunferencias inscrita, *r*, y circunscrita, *R*, a un triángulo equilátero de 12 cm de lado.**

Resuelve primero la actividad anterior.



De la actividad anterior deducimos que $R = 2r$ ($R = m$ y $r = n$).

Si llamamos h a la altura del triángulo de 12 cm de lado:

$12^2 = h^2 + 6^2$

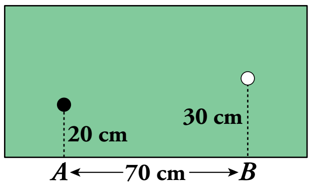
$144 = h^2 + 36$

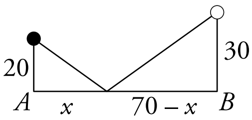
$h^2 = 108 \rightarrow h = 10{,}4$ cm

Por tanto: $\left.\begin{array}{l} R + r = 10{,}4 \\ R = 2r \end{array}\right\} \rightarrow 2r + r = 10{,}4 \rightarrow 3r = 10{,}4 \rightarrow r = \dfrac{10{,}4}{3} = 3{,}5 \text{ cm} \rightarrow R = 7 \text{ cm}$

Resuelve problemas

23. **En la mesa de billar, ¿en qué punto comprendido entre *A* y *B* debe dar la bola blanca, para que al rebotar alcance a la bola negra?**

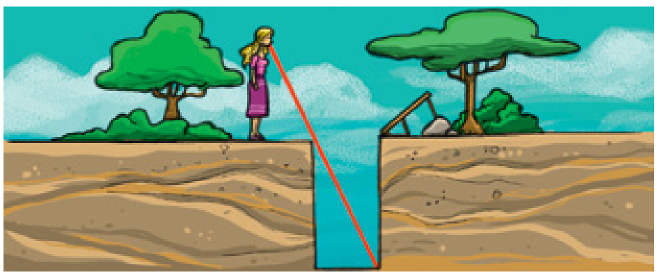


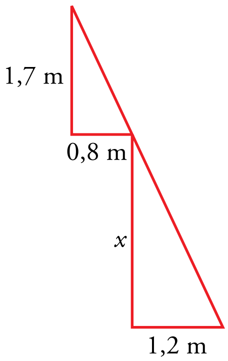


$\dfrac{20}{x} = \dfrac{30}{70 - x} \rightarrow 1\,400 - 20x = 30x \rightarrow 1\,400 = 50x \rightarrow x = 28$ cm

Debe dar a 28 cm del punto *A*.

24. **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

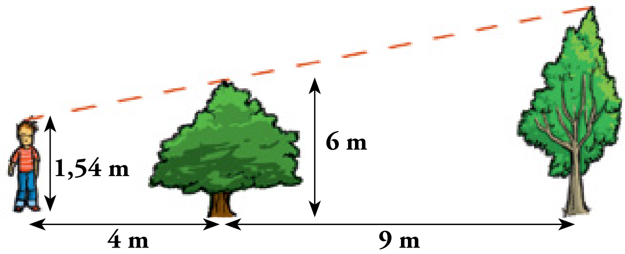


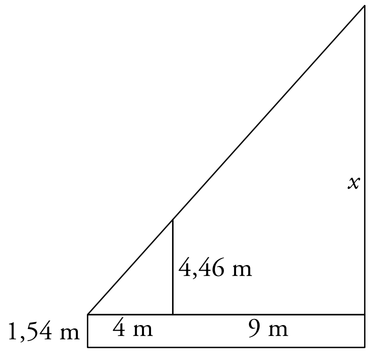


$\dfrac{x}{1{,}7} = \dfrac{1{,}2}{0{,}8} \rightarrow x = \dfrac{1{,}2 \cdot 1{,}7}{0{,}8} \rightarrow x = 2{,}55$ cm

La profundidad es de 2,55 m.

25. **Si la altura de Luis es 1,54 m, ¿cuál es la altura del árbol más alto?**



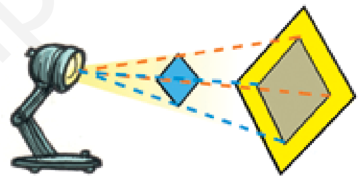


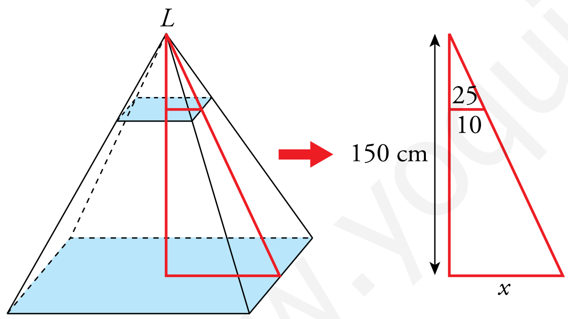
$$\frac{4,46}{4} = \frac{x}{13} \rightarrow x = \frac{4,46 \cdot 13}{4} = 14,495 \text{ m}$$

El árbol más alto tiene una altura de 14,495 + 1,54 = 16,035 m.

26. **Una lámpara, situada a 25 cm de una lámina cuadrada de 20 cm de lado, proyecta una sombra sobre una pantalla paralela que está a 1,5 m de la lámpara.**

¿Cuánto mide el lado del cuadrado proyectado?

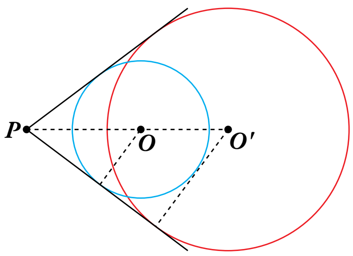


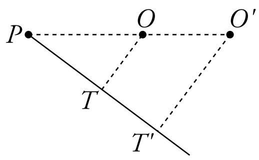


$$\frac{x}{150} = \frac{10}{25} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 150}{25} = 60$$

Por tanto, el lado del cuadrado proyectado mide 2 · 60 = 120 cm.

27. **Desde un punto P, trazamos las tangentes comunes a dos circunferencias. Las distancias de P a los centros son $\overline{PO}$ = 17 cm y $\overline{PO'}$ = 30 cm. Si el radio de la mayor mide 18 cm, ¿cuánto mide el radio de la menor?**

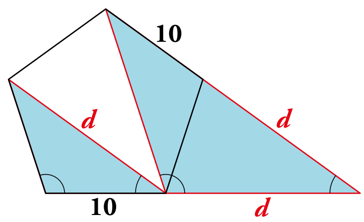




$$\frac{\overline{OT}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{O'T'}}{\overline{PO'}} \rightarrow \frac{\overline{OT}}{17} = \frac{18}{30} \rightarrow \overline{OT} = \frac{18 \cdot 17}{30} = 10,2 \text{ cm}$$

El radio de la menor mide 10,2 m.

28. **Observa y demuestra que la diagonal de un pentágono regular de 10 cm de lado es:**



$$d = 5 + 5\sqrt{5} \approx 16{,}18 \text{ cm}$$

$$\frac{d}{10} = \frac{d+10}{d}$$

Los dos triángulos sombreados son semejantes porque se pueden colocar en posición de Tales, por tanto verifican $\frac{d}{10} = \frac{d+10}{d}$.

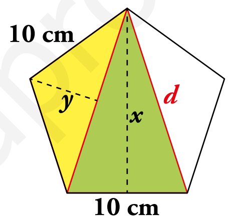
$$d^2 = 10d + 100 \rightarrow d^2 - 10d - 100 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$d = \frac{10 \pm \sqrt{100+400}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{500}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{5 \cdot 10^2}}{2} = \frac{10 \pm 10\sqrt{5}}{2} = 5 \pm 5\sqrt{5}$$

Es válido únicamente el resultado positivo $d = 5 + 5\sqrt{5}$.

29. **Observa esta figura:**



Sabiendo que $d = 5 + 5\sqrt{5} \approx 16{,}18$ cm, calcula:

a) Las distancias x e y.

b) Las áreas de los triángulos verde y amarillo.

c) El área del pentágono.

a) • $16{,}18^2 = x^2 + 5^2$

$261{,}8 - 25 = x^2 \rightarrow x^2 = 236{,}8 \rightarrow x = 15{,}4$ cm

• $10^2 = y^2 + \left(\frac{16{,}18}{2}\right)^2$

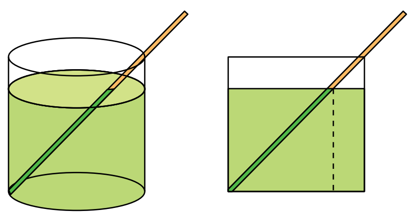
$10^2 = y^2 + 8{,}09^2 \rightarrow 100 = y^2 + 65{,}4 \rightarrow y^2 = 34{,}6 \rightarrow y = 5{,}9$ cm

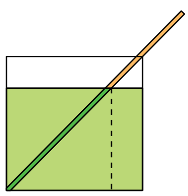
b) $A_{\text{TRIÁNGULO AMARILLO}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{16{,}18 \cdot 5{,}9}{2} = 47{,}7 \text{ cm}^2$

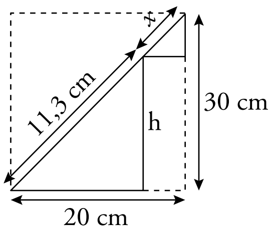
$A_{\text{TRIÁNGULO VERDE}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 15{,}4}{2} = 77 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{PENTÁGONO}} = 77 + 2 \cdot 47{,}7 = 172{,}4 \text{ cm}^2$

30. **En un bote de pintura de 20 cm de diámetro y 30 cm de altura, han olvidado la varilla de remover, que ha quedado apoyada en el borde, resbalando el extremo inferior hasta topar con la pared opuesta. Al sacar la varilla, vemos que la parte húmeda de pintura mide 11,3 cm. ¿Cuánta pintura queda en el bote?**







$30^2 + 20^2 = (11{,}3 + x)^2$

$\sqrt{900 + 400} = 11{,}3 + x \rightarrow x = \sqrt{1300} - 11{,}3 = 24{,}8$ cm

Por tanto:

$$\frac{30}{h} = \frac{11{,}3 + 24{,}8}{11{,}3} \rightarrow h = \frac{11{,}3 \cdot 30}{36{,}1} = 9{,}39$$

$V_{\text{PINTURA}} = \pi \cdot 10^2 \cdot 9{,}39 = 2\,948{,}46 \text{ cm}^3 = 2{,}94846 \text{ dm}^3$

Página 166

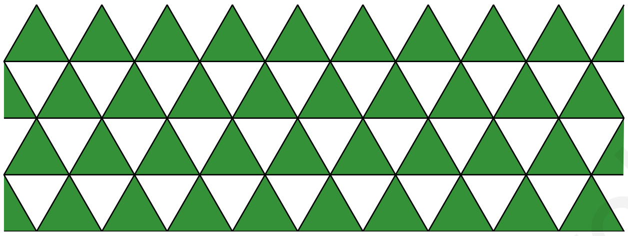
31. **Queremos construir un ortoedro de volumen 36 015 cm³ que sea semejante a otro de dimensiones 25 × 15 × 35 cm. ¿Cuánto medirán sus aristas?**

$$V = 25 \cdot 15 \cdot 35 = 13\,125 \text{ cm}^3$$

$$k^3 = \frac{36\,015}{13\,125} = 2{,}744 \;\rightarrow\; k = 1{,}4$$

Las aristas del ortoedro deben medir: $25 \cdot 1{,}4 = 35$ cm; $15 \cdot 1{,}4 = 21$ cm; $35 \cdot 1{,}4 = 49$ cm.

32. **El zócalo rectangular de una pared está formado por un mosaico de baldosines (triángulos equiláteros), blancos y verdes, distribuidos así:**



Calcula las dimensiones del zócalo, sabiendo que está formado por 205 piezas de 20 cm de lado.

Si h es la altura de cada pieza:

$$20^2 = \text{h}^2 + 10^2$$

$$400 = \text{h}^2 + 100 \;\rightarrow\; \text{h} = \sqrt{300} = 17{,}32 \text{ cm}$$

El área de cada triángulo es:

$$A = \frac{b \cdot \text{h}}{2} = \frac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 173{,}2 \text{ cm}^2$$

El área total del zócalo es:

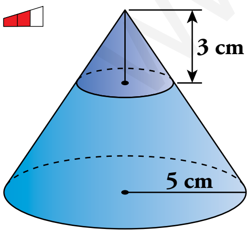
$$A_{\text{TOTAL}} = 205 \cdot 173{,}2 = 35\,506 \text{ cm}^2$$

La altura del zócalo es $4 \cdot \text{h} = 4 \cdot 17{,}32 = 69{,}28$ cm.

Por tanto su base, b, cumple la ecuación:

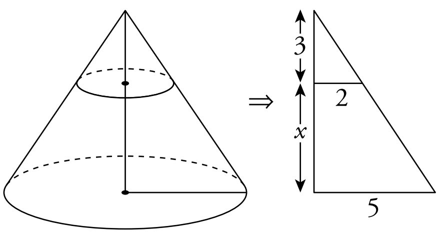
$$35\,506 \text{ cm}^2 = b \cdot 69{,}28 \;\rightarrow\; b = 512{,}5 \text{ cm}$$

33.



Para hacer un embudo de boca ancha, hemos cortado un cono de 5 cm de radio a 3 cm del vértice. La circunferencia obtenida tiene 2 cm de radio.

Calcula la superficie y el volumen del embudo.

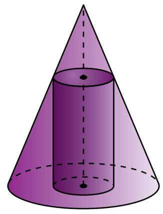


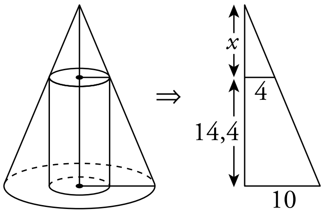
$$\frac{3+x}{5} = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; 3 + x = \frac{15}{2} \;\rightarrow\; x = 4{,}5 \text{ cm}$$

$$S = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{(3+4{,}5)^2 + 5^2} - \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{3^2 + 2^2} = 37{,}86\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}5) - \frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2 \cdot 3) = 58{,}5\pi \text{ cm}^3$$

34. **Hemos recubierto con un tejado cónico un depósito cilíndrico de 4 m de radio y 14,4 m de altura. Si el radio del cono es 10 m, ¿cuál es el volumen de la zona comprendida entre el cono y el cilindro?**





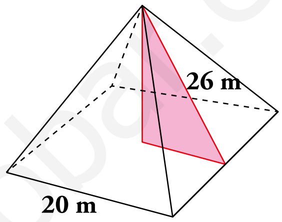
$$\frac{x}{4} = \frac{x + 14{,}4}{10} \rightarrow 10x = 4x + 57{,}6 \rightarrow x = 9{,}6 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 10^2) \cdot (14{,}4 + 9{,}6) = 800\pi \text{ m}^3 \\ V_{\text{CILINDRO}} = (\pi \cdot 4^2) \cdot 14{,}4 = 230{,}4\pi \text{ m}^3 \end{array}\right\}$$

$$V = V_{\text{CONO}} - V_{\text{CILNDRO}} = 800\pi - 230{,}4\pi = 569{,}6\pi \text{ m}^3$$

35. **En una pirámide cuadrangular regular, la arista de la base mide 20 m, y la apotema, 26 m.**

Calcula el área total y el volumen de la pirámide.



$$\left.\begin{array}{l} \text{El área de las caras es: } A = \frac{20 \cdot 26}{2} = 260 \text{ m}^2 \\ \text{El área de la base es: } A = l^2 = 20^2 = 400 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 260 \cdot 4 + 400 = 1\,040 + 400 = 1\,440 \text{ m}^2$$

Para calcular el volumen de la pirámide hay que calcular su altura, h:

$$26^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{20}{2}\right)^2$$

$$26^2 = \text{h}^2 + 10^2$$

$$676 = \text{h}^2 + 100 \rightarrow \text{h}^2 = 676 - 100 = 576 \rightarrow \text{h} = \sqrt{576} = 24 \text{ m}$$

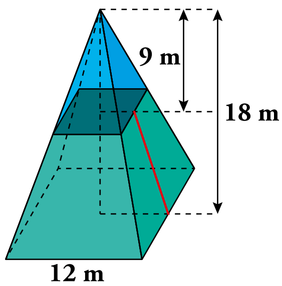
$$V = \frac{A_B \cdot \text{h}}{3} = \frac{400 \cdot 24}{3} = 3\,200 \text{ m}^3$$

36. **Observa el tronco de pirámide y calcula:**

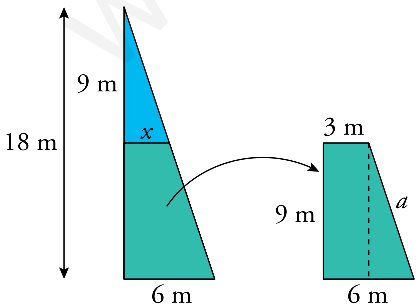
a) Su apotema (segmento rojo).

b) Su área lateral.

c) Su volumen.



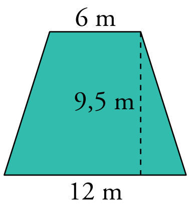
a)



Aplicando el teorema de Tales: $\frac{6}{x} = \frac{18}{9} \rightarrow x = 3 \text{ m}$

$a^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90 \rightarrow a = \sqrt{90} = 9{,}5 \text{ m}$

b)



$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{B + b}{2} \cdot \text{h} = \frac{12 + 6}{2} \cdot 9{,}5 = 85{,}5 \text{ m}^2$$

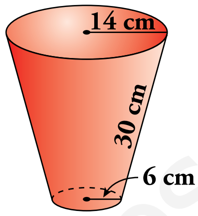
$$A_{\text{LATERAL}} = 85{,}5 \cdot 4 = 342 \text{ m}^2$$

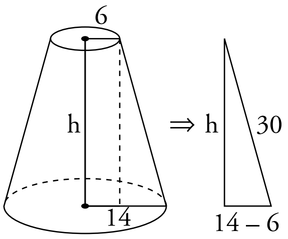
c) $A_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{12^2 \cdot 18}{3} = 864 \text{ m}^3$

$A_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{6^2 \cdot 9}{3} = 108 \text{ m}^3$

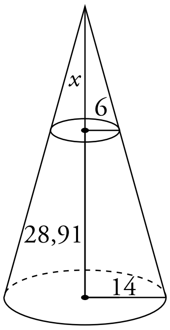
$V = 864 - 108 = 756 \text{ m}^3$

37. **Halla el volumen de una maceta como la de la figura, en la que los radios de las bases miden 6 cm y 14 cm, y la generatriz, 30 cm.**





$h = \sqrt{30^2 - 8^2} = 28{,}91$ cm



$\dfrac{x}{6} = \dfrac{x + 28{,}91}{14} \rightarrow 14x = 6x + 173{,}46 \rightarrow x = 21{,}68$ m

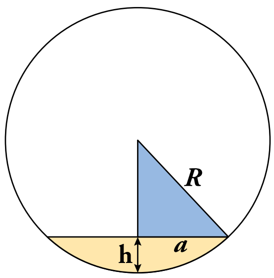
$V_{\text{CONO GRANDE}} = \dfrac{1}{3}(\pi \cdot 14^2) \cdot (28{,}91 + 21{,}68) = 3\,305{,}21\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \dfrac{1}{3}(\pi \cdot 6^2) \cdot (21{,}68) = 260{,}16\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{MACETA}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = 3\,045{,}05\pi \text{ cm}^3$

La maceta tiene un volumen de 9 561,46 cm^3.

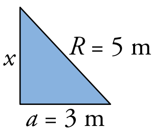
38. **Este depósito tiene un radio de cinco metros y se asienta sobre un círculo de 6 metros de diámetro.**



***R* = 5**
***a* = 3**
h = ?

Calcula su superficie y su capacidad.

Área y volumen del casquete esférico: $A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi R h$ $\quad V_{\text{CASQUETE}} = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$



$5^2 = x^2 + 3^2$

$25 = x^2 + 9 \rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow x = \sqrt{16} = 4$ m

$h = 5 - 4 = 1$ m

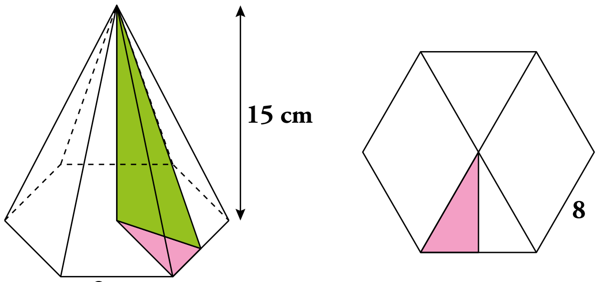
Por tanto la altura del casquete esférico del que tenemos que calcular su superficie y su capacidad es $10 - 1 = 9$ m.

$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi R h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 9 = 282{,}6 \text{ m}^2$

$V_{\text{CASQUETE}} = \dfrac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3R - h) = \dfrac{3{,}14 \cdot 9^2}{3} \cdot (3 \cdot 5 - 9) = 84{,}78 \cdot 6 = 508{,}68 \text{ m}^3$

Analiza, reflexiona y exprésate

39. **Observa la imagen e interpreta, en los cálculos adjuntos, el significado de cada letra, el objetivo perseguido y los resultados obtenidos. Añade la unidad en cada resultado.**



$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \rightarrow A_B = \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 6{,}93 = 166{,}32$$

$$a = \sqrt{15^2 + x^2} = \sqrt{225 + 48} \approx 16{,}52$$

$$A_L = \frac{8 \cdot 16{,}52}{2} \cdot 6 = 396{,}48$$

$$A_T = 166{,}32 + 396{,}48 = 562{,}8$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 166{,}32 \cdot 15 = 831{,}6$$

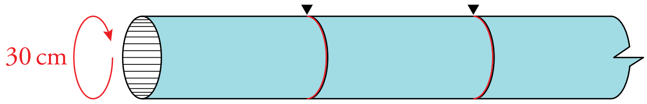
- $x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm es la apotema del hexágono regular, que calculamos para poder obtener el área de la base.

  A_B será el área de la base = 166,32 cm^2
- $a \approx 16{,}52$ cm es la apotema de la pirámide, que calculamos para obtener el área lateral.
- $A_L = 396{,}48$ cm^2 es el área lateral.
- $A_T = 562{,}8$ cm^2 es el área total.
- $V = 831{,}6$ cm^3 es el volumen de la pirámide.

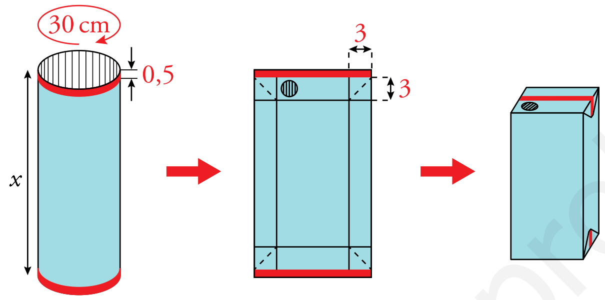
Página 167

40. **¿Has desplegado y aplanado alguna vez, sin arrugarlo, un tetrabrik de leche o de zumo? ¿Sabes cómo se fabrican? Veámoslo:**

Piensa en una máquina que va cortando a intervalos regulares un tubo de cartón con una circunferencia de 30 cm.

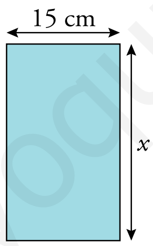


Después, los aplasta, los suelda por los cortes (0,5 cm, señalados en rojo), les marca unos dobleces, a 3 cm de los bordes, y les pone una boquilla redonda.

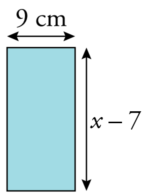


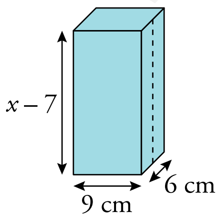
Por último, insufla aire en su interior, para expandirlos y que tomen la forma de prisma prevista por los dobleces. (Puedes comprobarlo con un envase vacío). ¿Qué longitud, *x*, debe tener cada porción de tubo, para que la capacidad del tetrabrik fabricado sea de un litro? (Redondea *x* a un número entero).

Al aplastar el cilindro queda:



Quito lo que soldamos y los dobleces y quedará:



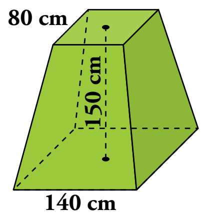


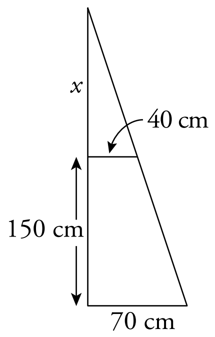
$1\,l = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

$9 \cdot 6 \cdot (x - 7) = 1\,000 \rightarrow x - 7 = \dfrac{1\,000}{54} \rightarrow x = \dfrac{1\,000}{54} + 7 \approx 26 \text{ cm}$

41. **La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm.**

Halla su volumen.





Calculamos la altura de la pirámide:

$$\frac{x+150}{x} = \frac{70}{40} \to 40x + 6\,000 = 70x \to x = 200 \text{ cm}$$

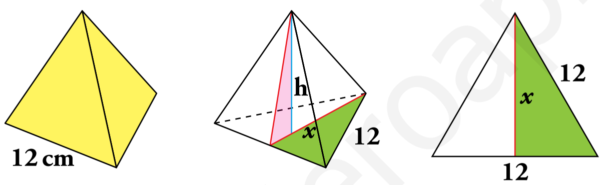
Altura = 200 + 150 = 350 cm

Volumen tronco = $V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}}$ =

$$= \frac{1}{3}140^2 \cdot 350 - \frac{1}{3}8^2 \cdot 200 = 1\,860\,000 \text{ cm}^3 = 1\,860 \text{ dm}^3$$

Problemas "+"

42. **Calcula el área y el volumen de un tetraedro regular de 12 cm de arista.**



Calculamos la altura de los triángulos que forman el tetraedro:

$$12^2 = x^2 + 6^2$$

$$144 = x^2 + 36 \to x^2 = 144 - 36 = 108 \to x = \sqrt{108} = 10{,}4 \text{ cm}$$

$$A_{\text{CARA}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 10{,}4}{2} = 62{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TETRAEDRO}} = 4 \cdot 62{,}4 = 249{,}6 \text{ cm}^2$$

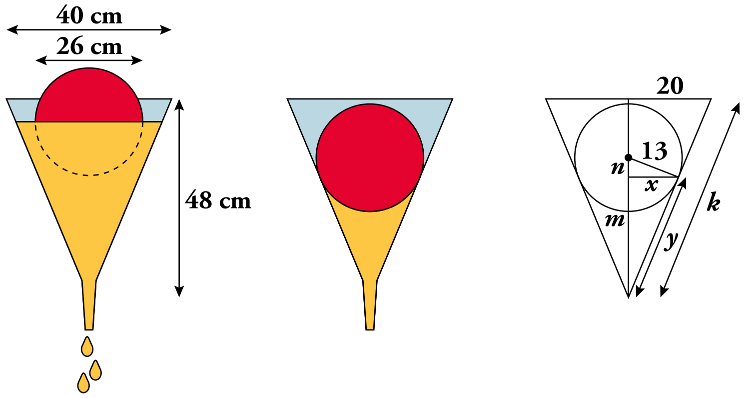
Para calcular la altura del tetraedro utilizaremos el hecho de que la altura va justo al baricentro del triángulo equilátero de la base que coincide con el ortocentro. En los triángulos equiláteros la altura coincide con la mediana y la distancia al vértice es $\frac{2}{3}$ de la mediana, es decir, $\frac{2}{3}$ de la altura, en este caso, $\frac{2}{3} \cdot 10{,}4 = 6{,}9$:

$$12^2 = h^2 + 6{,}9^2$$

$$144 = h^2 + 47{,}61 \to h^2 = 96{,}39 \to h = 9{,}8 \text{ cm}$$

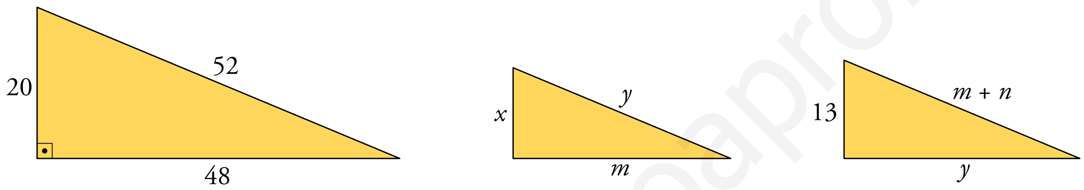
$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{62{,}4 \cdot 9{,}8}{3} = 203{,}84 \text{ cm}^3$$

43. **Experimento: Una pelota de goma, de 26 cm de diámetro, flota sobre la superficie del aceite que llena un embudo de cristal, en las condiciones que ves en la ilustración.**



El aceite gotea por la estrecha boca inferior del embudo, y la pelota va descendiendo hasta que toma contacto con el cristal. Entonces hace de tapón y el aceite deja de salir. ¿Qué cantidad de aceite queda en ese momento en el embudo?

- $k^2 = 20^2 + 48^2 \rightarrow k = 52$ cm
-



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{20}{13} = \frac{48}{y} \rightarrow y = 31{,}2 \text{ cm}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{52}{31{,}2} \rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{20}{13} = \dfrac{52}{m+n} \rightarrow m + n = 33{,}8 \text{ cm} \\ \dfrac{48}{m} = \dfrac{52}{31{,}2} \rightarrow m = 28{,}8 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow n = 5 \text{ cm}$$

La cantidad de aceite será $V_{\text{CONO}} - V_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}}$

- $V_{\text{CONO}} = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot x^2 \cdot m}{3} = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 28{,}8}{3} = \dfrac{6912}{5}\pi \text{ cm}^3$
- $V_{\text{CASQUETE}} = \dfrac{\pi \cdot (R-n)^2}{3} \cdot \left[3 \cdot R - (R-n)\right] = \dfrac{\pi \cdot (13-5)^2}{3} \cdot \left[3 \cdot 13 - (13-5)\right] =$

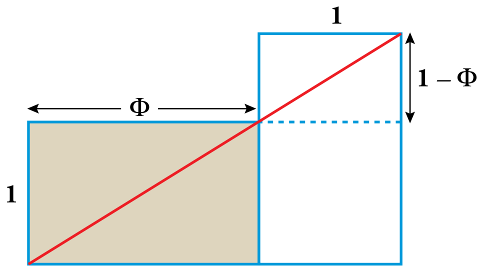
$$= \frac{\pi \cdot 8^2}{3} \cdot (39 - 8) = \frac{1984}{3}\pi \text{ cm}^3$$

- $V_{\text{ACEITE}} = \dfrac{6912}{5}\pi - \dfrac{1984}{3}\pi = \dfrac{10\,816}{15}\pi \text{ cm}^3$

Curiosidades matemáticas

Rectángulos áureos

El rectángulo que ves a continuación tiene la siguiente peculiaridad: si se le suprime un cuadrado de lado igual a su lado menor, se obtiene otro rectángulo semejante al inicial.



$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1}$$

- **Comprueba que la relación entre los lados, Φ, es:**

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \text{(número de oro)}$$

Los rectángulos que tienen esta propiedad se denominan rectángulos áureos, y como sabes, los puedes encontrar en el carné de identidad, en las tarjetas de banda magnética y en numerosas obras de arte.

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \rightarrow \Phi^2 - \Phi = 1 \rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2 Tablas de frecuencias

Página 173

1. Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 10 intervalos con el mismo recorrido total.

Tomando $r' = 30$ y siendo 10 el número de intervalos, la longitud de cada intervalo será de $\frac{30}{10} = 3$.

INTERVALOS	MARCA DE CLASE	FRECUENCIAS
148,5 - 151,5	150	2
151,5 - 154,5	153	1
154,5 - 157,5	156	1
157,5 - 160,5	159	6
160,5 - 163,5	162	7
163,5 - 166,5	165	9
166,5 - 169,5	168	6
169,5 - 172,5	171	3
172,5 - 175,5	174	4
175,5 - 178,5	177	1

2. Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 8 intervalos. Para ello, toma $r' = 32$.

Tomando $r' = 32$ y siendo 8 el número de intervalos, la longitud de cada uno de ellos será $\frac{32}{8} = 4$.

INTERVALOS	MARCA DE CLASE	FRECUENCIAS
147,5 - 151,5	149,5	2
151,5 - 155,5	153,5	1
155,5 - 159,5	157,5	4
159,5 - 163,5	161,5	10
163,5 - 167,5	165,5	12
167,5 - 171,5	169,5	6
171,5 - 175,5	173,5	4
175,5 - 179,5	177,5	1

3 Parámetros estadísticos: $\bar{x}$ y σ

Página 175

1. Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la tabla obtenida en el ejercicio resuelto de la página 173:

x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	4	11	14	5	4

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
151	2	302	45 602
156	4	624	97 344
161	11	1 771	285 131
166	14	2 324	385 784
171	5	855	146 205
176	4	704	123 904
	40	6 580	1 083 970

$$\bar{x} = \frac{6\,580}{40} = 164,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1\,083\,970}{40} - 164,5^2} = 6,24$$

$$\text{C.V.} = \frac{6,24}{164,5} = 0,038 \to 3,8\,\%$$

2. Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la distribución de los ejercicios 1 y 2 de la página 173:

Compara los resultados entre sí y con los del ejercicio 1 de esta página.

1.ª distribución

INTERVALOS	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
148,5-151,5	150	2	300	45 000
151,5-154,5	153	1	153	23 409
154,5-157,5	156	1	156	24 336
157,5-160,5	159	6	954	151 686
160,5-163,5	162	7	1 134	183 708
163,5-166,5	165	9	1 485	245 025
166,5-169,5	168	6	1 008	169 344
169,5-172,5	171	3	513	87 723
172,5-175,5	174	4	696	121 104
175,5-178,5	177	1	177	31 329
		40	6 576	1 082 664

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{6\,576}{40} = 164,4$ cm

VAR.: $\dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{1\,082\,664}{40} - 164,4^2 = 39,24$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{39,24} = 6,26$ cm

C.V. $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{6,26}{164,4} = 0,038 \to 3,8\%$

2.ª distribución

INTERVALOS	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
147,5-151,5	149,5	2	299	44 700,5
151,5-155,5	153,5	1	153,5	23 562,25
155,5-159,5	157,5	4	630	99 225
159,5-163,5	161,5	10	1 615	260 822,5
163,5-167,5	165,5	12	1 986	328 683
167,5-171,5	169,5	6	1 017	172 381,5
171,5-175,5	173,5	4	694	120 409
175,5-179,5	177,5	1	177,5	31 506,25
		40	6 572	1 081 290

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{6\,572}{40} = 164,3$ cm

VAR.: $\dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{1\,081\,290}{40} - 164,3^2 = 37,76$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{37,76} = 6,14$ cm

C.V. $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{6,14}{164,3} = 0,037 \to 3,7\%$

Como se puede ver, las diferencias entre unas y otras son inapreciables.

4 Parámetros de posición

Página 176

1. Halla Q_1, Me, Q_3 y p_{40} en esta distribución:

0	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**5**
6	**6**	**7**	**7**	**7**	**7**	**8**	**8**	**8**	**8**	**9**	**9**	**9**	**10**	**10**

Hay 30 individuos en la distribución.

30 : 4 = 7,5 individuos en cada grupo

7,5 $\rightarrow$ individuo 8.° $\rightarrow$ $Q_1 = 3$

$7{,}5 \cdot 2 = 15$ $\rightarrow$ individuo entre 15.° y 16.° $\rightarrow$ $Me = 5{,}5$

$7{,}5 \cdot 3 = 22{,}5$ $\rightarrow$ individuo 23.° $\rightarrow$ $Q_3 = 8$

Para calcular p_{40}:

$30 \cdot \dfrac{40}{100} = 12$ $\rightarrow$ individuo entre 12.° y 13° $\rightarrow$ $p_{40} = 4{,}5$

Página 177

2. **En la siguiente distribución de notas, halla** Me, Q_1, Q_3, p_{80}, p_{90} **y** p_{99}:

NOTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.° DE ALUMNOS	6	19	37	45	109	81	39	22	30	12

NOTAS	f_i	F_i	% ACUM.
1	6	6	1,5
2	19	25	6,25
3	37	62	15,5
4	45	107	26,75
5	109	216	54
6	81	297	74,25
7	39	336	84
8	22	358	89,5
9	30	388	97
10	12	400	100

$Me = p_{50} = 5$

$Q_1 = p_{25} = 4$

$Q_3 = p_{75} = 7$

$p_{80} = 7$

$p_{90} = 9$

$p_{99} = 10$

5 Diagramas de caja

Página 179

1. Haz el diagrama de caja correspondiente a esta distribución de notas:

x_i	f_i
1	**6**
2	**15**
3	**22**
4	**24**
5	**33**
6	**53**
7	**22**
8	**16**
9	**8**
10	**1**

x_i	f_i	F_i
1	6	6
2	15	21
3	22	43
4	24	67
5	33	100
6	53	153
7	22	175
8	16	191
9	8	199
10	1	200

Comenzamos hallando Me, Q_1 y Q_3:

$n = 200$

$\frac{n}{2} = 100 \rightarrow Me = 5,5$

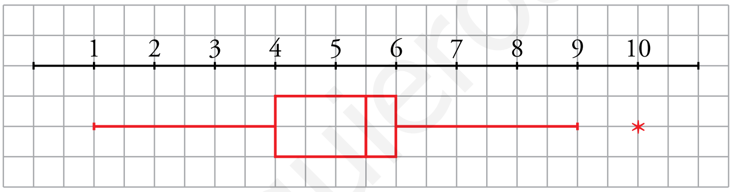
$\frac{n}{4} = 50 \rightarrow Q_1 = 4$

$\frac{3}{4} \cdot n = 150 \rightarrow Q_3 = 6$

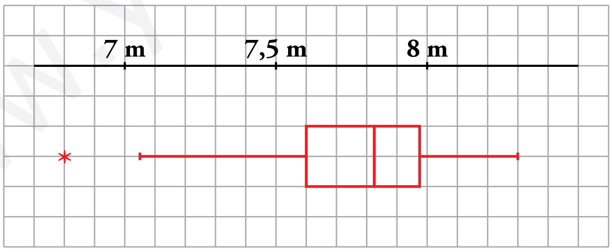
La longitud de la caja será $Q_3 - Q_1 = 6 - 4 = 2$.

$1,5 \cdot 2 = 3 \rightarrow$ Los bigotes llegarán hasta $4 - 3 = 1$ y hasta $6 + 3 = 9$.

Por tanto, el diagrama de caja y bigotes será:



2. Interpreta el siguiente diagrama de caja y bigotes relativo a las marcas de algunos saltadores de longitud:



$Me = 7,825$ m; $Q_1 = 7,6$ m; $Q_3 = 7,975$ m

Todos saltaron entre 7,05 m y 8,3 m, excepto uno que saltó 6,8 m.

Un 25 % de los saltadores saltó menos de 7,6 m.

Un 25 % saltó entre 7,6 m y 7,825 m.

Un 25 % saltó entre 7,825 m y 7,975 m.

Un 25 % saltó más de 7,975 m.

6 Estadística inferencial

Página 180

1. **Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Recoge uno de cada 100 tornillos fabricados y lo analiza.**

El conjunto de tornillos analizados, ¿es población o muestra? ¿Por qué?

Los tornillos analizados constituyen una muestra, pues solo se analiza uno de cada cien tornillos fabricados.

2. **El responsable de calidad de una empresa que fabrica pilas quiere estudiar la energía suministrada por cada pila hasta que se gasta.**

¿Puede hacer el estudio sobre la población o debe recurrir a una muestra? ¿Por qué?

Debe recurrir a una muestra porque el estudio requiere el consumo de las pilas.

3. **El dueño de un vivero tiene 285 plantas de interior. Para probar la eficacia de un nuevo fertilizante, las mide todas antes y después del semestre que dura el tratamiento.**

El conjunto de esas 285 plantas, ¿es población o muestra? ¿Por qué?

Las 285 plantas sería la población. En este caso, es posible estudiar toda la población, no hace falta trabajar con una muestra.

Ejercicios y problemas

Página 181

Practica

Tablas de frecuencias

1. **El número de faltas de ortografía que cometieron un grupo de estudiantes en un dictado fue:**

0	**3**	**1**	**2**	**0**	**2**	**1**	**3**	**0**	**4**
0	**1**	**1**	**4**	**3**	**5**	**3**	**2**	**4**	**1**
5	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**1**
2	**1**	**0**	**0**	**3**	**0**	**5**	**3**	**2**	**1**

Di cuál es la variable y de qué tipo es.

Haz una tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama adecuado.

- Variable: "Número de faltas de ortografía"

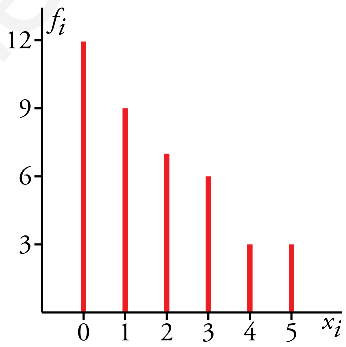
  Es una variable cuantitativa discreta.

  Llamamos x_i a dicha variable y sus valores son 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

- Tabla de frecuencias:

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3
	40

Diagrama de barras:



2. **En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:**

2,8	**3,2**	**3,8**	**2,5**	**2,7**	**3,7**	**1,9**	**2,6**	**3,5**	**2,3**
3,3	**2,6**	**1,8**	**3,3**	**2,9**	**2,1**	**3,4**	**2,8**	**3,1**	**3,9**
2,9	**3,5**	**3,0**	**3,1**	**2,2**	**3,4**	**2,5**	**1,9**	**3,0**	**2,9**
2,4	**3,4**	**2,0**	**2,6**	**3,1**	**2,3**	**3,5**	**2,9**	**3,0**	**2,7**
2,9	**2,8**	**2,7**	**3,1**	**3,0**	**3,1**	**2,8**	**2,6**	**2,9**	**3,3**

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos desde 1,65 hasta 4,05 y haz una representación adecuada.

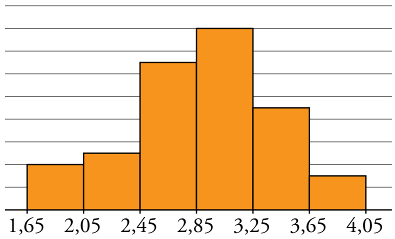
Localizamos los valores extremos: 1,9 y 3,9. Recorrido = 3,9 – 1,8 = 2,1

a) Variable: peso de los recién nacidos.

Tipo: cuantitativa continua.

b) La mejor representación es un histograma:

INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i
1,65-2,05	1,85	4
2,05-2,45	2,25	5
2,45-2,85	2,65	13
2,85-3,25	3,05	16
3,25-3,65	3,45	9
3,65-4,05	3,85	3
		50



Media, desviación típica y C.V.

3. **Halla la media, la desviación típica y el coeficiente de variación en estas distribuciones:**

x_i	f_i
0	**12**
1	**9**
2	**7**
3	**6**
4	**3**
5	**3**

INTERVALO	f_i
1,65-2,05	**4**
2,05-2,45	**5**
2,45-2,85	**13**
2,85-3,25	**17**
3,25-3,65	**8**
3,65-4,05	**3**

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	**12**	0	0
1	**9**	9	9
2	**7**	14	28
3	**6**	18	54
4	**3**	12	48
5	**3**	15	75
	40	68	214

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{68}{40} = 1,7$$

$$\text{VAR.: } \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{214}{40} - 1,7^2 = 2,46$$

$$\sigma = \sqrt{2,46} = 1,57$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,9235 \rightarrow 92,35\,\%$$

INTERVALOS	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1,65-2,05	1,85	**4**	7,4	13,69
2,05-2,45	2,25	**5**	11,25	25,31
2,45-2,85	2,65	**13**	34,45	91,29
2,85-3,25	3,05	**17**	51,85	158,14
3,25-3,65	3,45	**8**	27,6	95,22
3,65-4,05	3,85	**3**	11,55	44,47
		50	144,1	428,12

$$\bar{x} = \frac{144,1}{50} = 2,9$$

$$\text{VAR.: } \frac{428,12}{50} - 2,8^2 = 0,1524$$

$$\sigma = \sqrt{0,1524} = 0,39$$

$$\text{C.V.} = \frac{0,39}{2,9} = 0,1345 \rightarrow 13,45\,\%$$

4. **Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa B, la media es 15 000 euros, y la desviación típica, 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene más variación relativa.**

Empresa A: $\left.\begin{array}{l}\bar{x} = 100\,000 \text{ €} \\ \sigma = \ \ 12\,500 \text{ €}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{\sigma}{x} = \dfrac{12\,500}{100\,000} = 0{,}125$ o bien 12,5 %

Empresa B: $\left.\begin{array}{l}\bar{x} = 15\,000 \text{ €} \\ \sigma = \ \ 2\,500 \text{ €}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{2\,500}{15\,000} = 0{,}1\overset{\frown}{6}$ o bien 16,67 %

Tiene mayor variación relativa la empresa B.

Parámetros de posición

5. **La altura, en centímetros, de un grupo de estudiantes de una misma clase es:**

150 169 171 172 172 175 181
182 183 177 179 176 184 158

Halla la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

Colocamos los datos en orden creciente:

150 - 158 - 169 - 171 - 172 - 172 - 175 - 176 - 177 - 179 - 181 - 182 - 183 - 184

Hay 14 datos:

$\dfrac{14}{2} = 7 \ \rightarrow$ Mediana: valor intermedio de los dos centrales situados en séptima y octava posición:

$Me = \dfrac{175 + 176}{2} = 175{,}5$ cm

Significa que la mitad de los estudiantes tiene una estatura inferior a 175,5 cm.

$\dfrac{14}{4} = 3{,}5 \ \rightarrow$ $Q_1 = 171$ cm (4.° lugar)

El 25 % de los estudiantes mide menos de 171 cm de altura.

$14 \cdot \dfrac{3}{4} = 10{,}5 \ \rightarrow$ $Q_3 = 181$ cm (posición 11)

El 75 % de los estudiantes tiene una estatura inferior a 181 cm.

6. **Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones correspondientes al número de respuestas correctas en un test realizado por dos grupos de estudiantes:**

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18
24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21
29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Colocamos en orden creciente los datos:

A 18 - 20 - 22 - 22 - 23 - 24 - 25 - 25 - 27 - 28 - 30 - 30 - 31 - 32 - 35

Hay 15 datos:

• La mediana es el valor central (posición 8) $\rightarrow$ $Me = 25$

- $\frac{15}{4} = 3{,}75 \rightarrow Q_1 = 22$ (4.ª posición)
- $15 \cdot \frac{3}{4} = 11{,}25 \rightarrow Q_3 = 30$ (12.ª posición)
- $15 \cdot \frac{60}{100} = 9 \rightarrow p_{60}$ será el valor intermedio de los datos situados en 9.ª y 10.ª posición, es decir:

$$p_{60} = \frac{27 + 28}{2} \rightarrow p_{60} = 27{,}5$$

B 18 - 19 - 20 - 21 - 21 - 22 - 23 - 25 - 27 - 27 - 29 - 30 - 31 - 32

Hay 14 datos:

- Los dos valores centrales son 23 y 25 $\rightarrow Me = \frac{23 + 25}{2} = 24$
- $\frac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow Q_1 = 21$ (4.ª posición)
- $14 \cdot \frac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow Q_3 = 29$ (11.ª posición)
- $14 \cdot \frac{60}{100} = 8{,}4 \rightarrow p_{60} = 27$ (9.ª posición)

7. **Rellena la columna de los porcentajes acumulados en la siguiente tabla. Calcula, a partir de la tabla, la mediana, los cuartiles y los percentiles p_{70} y p_{90}.**

x_i	f_i	F_i	% ACUM.
0	**12**	**12**	32,4
1	**9**	**21**	56,8
2	**7**	**28**	75,7
3	**6**	**34**	91,9
4	**3**	**37**	100

$Q_1 = 0$

$Me = 1$

$Q_3 = 2$

$p_{70} = 2$

$p_{90} = 3$

8. **En la fabricación de cierto tipo de bombillas se han detectado algunas defectuosas. Se analiza el contenido de 200 cajas de 100 bombillas cada una y se obtienen los siguientes resultados:**

DEFECTUOSAS	1	2	3	4	5	6	7	8
N.º DE CAJAS	5	15	38	42	49	31	18	2

Calcula la mediana, los cuartiles y los percentiles p_{10}, p_{90} y p_{95}.

Hacemos la tabla de frecuencias acumuladas.

x_i	f_i	F_i	% ACUM.
1	5	5	2,5
2	15	20	10
3	38	58	29
4	42	100	50
5	49	149	74,5
6	31	180	90
7	18	198	99
8	2	200	100

Para $x_i = 4$, F_i iguala el 50 %, luego la mediana será el valor intermedio entre 4 y el siguiente, 5, esto es, $Me = 4{,}5$.

$Q_1 = p_{25} = 3$

$Q_3 = p_{75} = 6$

$p_{10} = 2{,}5$

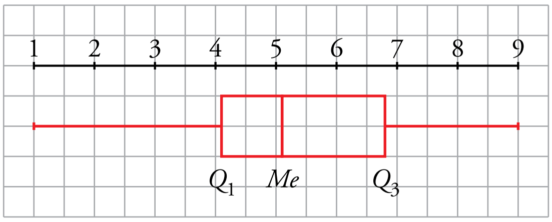
$p_{90} = 6{,}5$

$p_{95} = 7$

Página 182

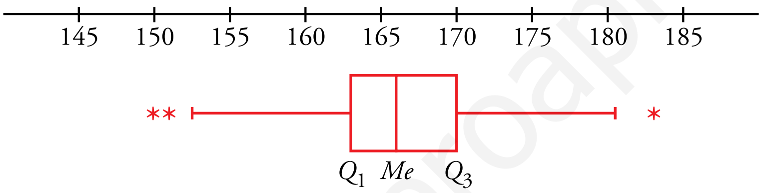
Diagramas de caja

9. Las puntuaciones obtenidas por 87 personas tienen los siguientes parámetros de posición: $Q_1 = 4{,}1$; $Me = 5{,}1$ y $Q_3 = 6{,}8$. Todas las puntuaciones están en el intervalo 1 a 9. Haz el diagrama de caja.



10. En una clase de 38 estudiantes de Primaria, las estaturas de 35 de ellos están comprendidas entre 153 cm y 179 cm. Los tres restantes miden 150 cm, 151 cm y 183 cm. Sabemos que $Q_1 = 163$; $Me = 166$ y $Q_3 = 170$.

Representa los datos en un diagrama de caja.



11. Haz el diagrama de caja correspondiente a las siguientes distribuciones.

a) La del ejercicio 5.

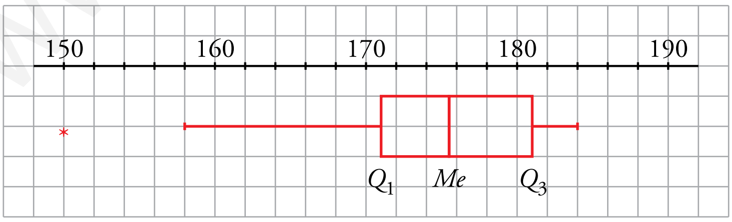
b) La A y la B del ejercicio 6.

c) La del ejercicio 7.

d) La del ejercicio 8.

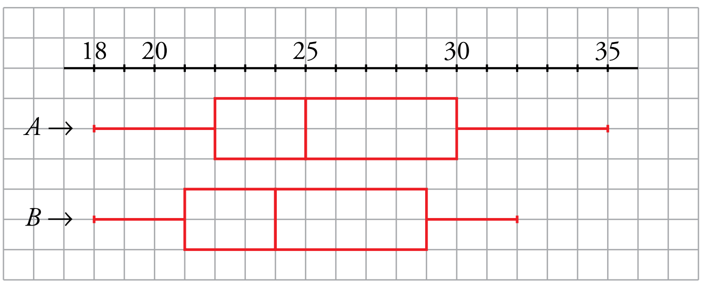
a) $Q_1 = 171$; $Me = 175{,}5$; $Q_3 = 181$

$$(Q_3 - Q_1) \cdot 1{,}5 = (181 - 171) \cdot 1{,}5 = 10 \cdot 1{,}5 = 15 \quad \begin{cases} 171 - 15 = 156 \\ 181 + 15 = 196 \end{cases}$$

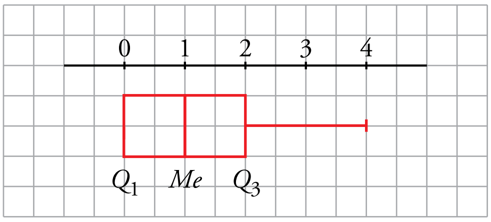


b) A: $Q_1 = 22$; $Me = 25$; $Q_3 = 30$

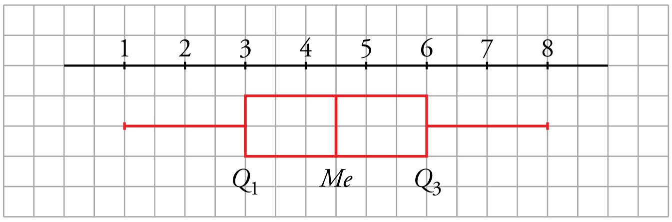
B: $Q_1 = 21$; $Me = 24$; $Q_3 = 29$



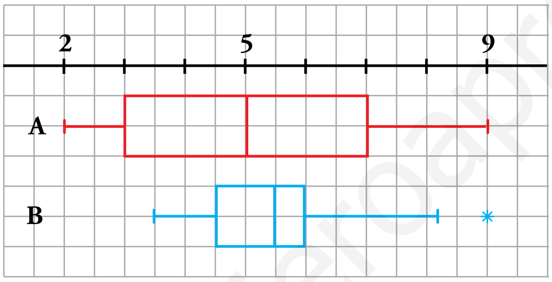
c) $Q_1 = 0$; $Me = 1$; $Q_3 = 2$



d) $Q_1 = 3$; $Me = 4,5$; $Q_3 = 6$



12. **A los estudiantes de dos clases numerosas de un mismo centro les han puesto un test. Las notas vienen reflejadas en los siguientes diagramas de caja:**



a) ¿Cuál de las clases es más homogénea?

b) ¿En cuál ha aprobado la mitad de la clase?

c) En una de las clases, la tercera nota más alta ha sido un 6,5. ¿De qué clase se trata?

d) ¿En qué clase las notas del 25 % de los estudiantes difieren en medio punto o menos?

e) ¿Cuál es el rango de las notas de cada clase?

a) Es más homogénea la clase B.

b) En la clase A ha aprobado exactamente la mitad de la clase.

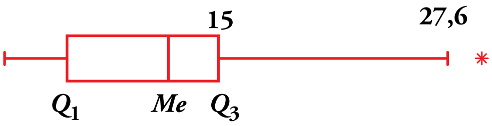
c) En la clase B, puesto que en la clase A el 25 % tiene notas entre 5 y 7.

d) En la clase B.

e) En la clase A el rango es 9 – 2 = 7.

En la clase B el rango es 9 – 3,5 = 5,5.

13. **Calcula el valor del primer cuartil correspondiente al siguiente diagrama de caja:**



27,6 – 15 = 12,6

12,6 : 1,5 = 8,4, por tanto, $Q_3 - Q_1 = 8,4 \rightarrow 15 - Q_1 = 8,4$.

Luego, $Q_1 = 6,6$.

Muestreo

14. **Se quieren realizar estos estudios estadísticos:**

I. Tipo de transporte que utilizan los vecinos de un barrio para acudir a sus trabajos.

II. Estudios que piensan seguir los estudiantes de un centro escolar al terminar la ESO.

III. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

IV. Número de horas diarias que ven la televisión los niños y las niñas de tu comunidad autónoma con edades comprendidas entre 5 y 10 años.

V. Tiempo de conversación que aguantan las baterías de los móviles que fabrican en una empresa.

VI. Preferencia de emisora de radio musical de los asistentes a un concierto.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población.

b) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

a) I → Los vecinos del barrio.

II → Alumnos y alumnas de la ESO de un centro.

III → Personas que han visto la obra.

IV → Niños y niñas de mi comunidad autónoma de entre 5 y 10 años.

V → Los móviles que fabrica la empresa.

VI → Los asistentes a un concierto.

b) I → Dependiendo del número de vecinos del barrio: si son pocos, población; si son muchos, una muestra. Aunque teniendo en cuenta que es difícil cogerlos a todos y que todos contesten a la encuesta, quizás sería mejor una muestra.

II → Población. Con encuestas en clase en las que participan todos (obviamente, siempre falta alguno).

III → Muestra. Son muchas personas y sería inoportuno molestar a tanta gente, se formarían colas…

IV → Muestra. Son demasiadas personas.

V → Es necesario recurrir a una muestra para el estudio porque llevarlo a cabo requiere el desgaste de las baterías.

VI → Será necesario recurrir a una muestra.

15. **¿Cómo se puede contar el número aproximado de palabras que tiene un cierto libro?**

— Se seleccionan, abriendo al azar, unas cuantas páginas y se cuentan las palabras en cada una.

— Se calcula el número medio de palabras por página.

— Se da un intervalo en el que pueda estar comprendido el número total de palabras.

Hazlo con alguna novela que encuentres en casa. Cuanto más homogéneas sean sus páginas, más precisión tendrás en el resultado.

- En un libro de 200 páginas, seleccionamos al azar 5 páginas. Contamos el número de palabras de estas páginas: 537, 562, 548, 324, 600.

- Calculamos el número medio de palabras:

$$\frac{538 + 562 + 548 + 324 + 600}{5} = 514,2$$

En 200 páginas, habrá 102 840 palabras.

- El número de palabras del libro estará entre 100 000 y 105 000.

16. **Para hacer un sondeo electoral en un pueblo de 2 000 electores, aproximadamente, se va a elegir una muestra de 200 individuos. Di si te parece válido cada uno de los siguientes modos de seleccionarlos y explica por qué:**

a) Se le pregunta al alcalde, que conoce a todo el pueblo, qué individuos le parecen más representativos.

b) Se eligen 200 personas al azar entre las que acuden a la verbena el día del patrón.

c) Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.

d) Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 200 de ellos.

a) No es válido. Se trata de una elección subjetiva.

b) No es válido. Probablemente haya grupos de edades mucho más representados que otros.

c) Sí es válido.

d) Sí es válido.

Página 183

Aplica lo aprendido

17. **El número de errores cometidos en un test por un grupo de personas viene reflejado en esta tabla:**

N.º DE ERRORES	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE PERSONAS	10	12	8	7	5	4	3

a) Halla la mediana, los cuartiles inferior y superior y los percentiles p_{20}, p_{40} y p_{90}. Explica su significado.

b) ¿Cuál es el número medio de errores por persona?

Completamos la siguiente tabla:

N.º DE ERRORES	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE PERSONAS	10	12	8	7	5	4	3
F_i	10	22	30	37	42	46	49
% ACUMULADO	20,4	44,9	61,2	75,5	85,7	93,9	100

a) $p_{20} = 0$ $\quad Q_1 = p_{25} = 1$ $\quad p_{40} = 1$ $\quad Me = p_{50} = 2$ $\quad p_{90} = 5$ $\quad Q_3 = p_{75} = 3$

$p_m = n$ significa que el $m\%$ de las personas comete un máximo de n errores.

b) $\bar{x} = \dfrac{[0 \cdot 10 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3]}{49} = 2,18$ errores por persona.

18. **Deseamos hacer una tabla de datos agrupados a partir de 384 datos, cuyos valores extremos son 19 y 188.**

a) Si queremos que sean 10 intervalos de amplitud 17, ¿cuáles serán esos intervalos?

b) Haz otra distribución en 12 intervalos de la amplitud que creas conveniente.

Recorrido $r = 188 - 19 = 169$

a) Buscamos un número mayor que r que sea múltiplo de 10 $\to$ $r' = 170$.

Cada intervalo tendrá longitud 17.

Como $r' - r = 1$, comenzamos 0,5 antes del primer dato y finalizamos 0,5 después del último dato.

Los intervalos son:

[18,5; 35,5); [35,5; 52,5); [52,5; 69,5); [69,5; 86,5); [86,5; 103,5);

[103,5; 120,5); [120,5; 137,5); [137,5; 154,5); [154,5; 171,5); [171,5; 188,5)

b) Ahora buscamos un múltiplo de 12 mayor que 169 $\to$ $r' = 180$.

Como $r' - r = 180 - 169 = 11$, comenzamos 5,5 antes del primer dato y finalizamos 5,5 después del último dato y cada intervalo tendrá amplitud 180 : 12 = 15.

Los intervalos son:

[13,5; 28,5); [28,5; 43,5); [43,5; 58,5); [58,5; 73,5);

[73,5; 88,5); [88,5; 103,5); [103,5; 118,5); [118,5; 133,5);

[133,5; 148,5); [148,5; 163,5); [163,5; 178,5); [178,5; 193,5)

19. **En una urbanización de 25 familias se ha observado la variable "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:**

0 1 2 3 1   1 1 3 1 2
0 1 1 1 4   1 0 1 3 4
3 2 2 1 1

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Haz el diagrama de barras.

c) Calcula la media y la desviación típica.

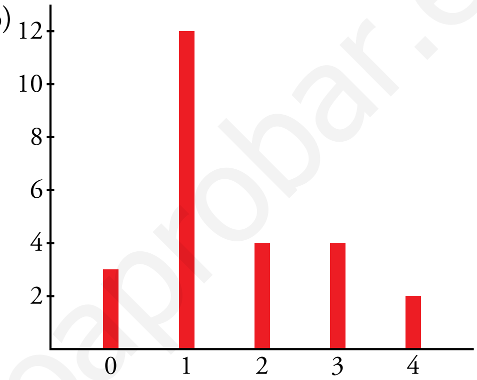
d) Halla la mediana, los cuartiles y los percentiles p_{40} y p_{90}.

e) Dibuja el diagrama de caja.

a)

x_i	f_i
0	3
1	12
2	4
3	4
4	2

b)



c)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	3	0	0
1	12	12	12
2	4	8	16
3	4	12	36
4	2	8	32
	25	40	96

$$\bar{x} = \frac{40}{25} = 1{,}6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{96}{25} - 1{,}6^2} = 1{,}13$$

d)

x_i	f_i	F_i	% ACUM.
0	3	3	12
1	12	15	60
2	4	19	76
3	4	23	92
4	2	25	100

$Q_1 = 1$

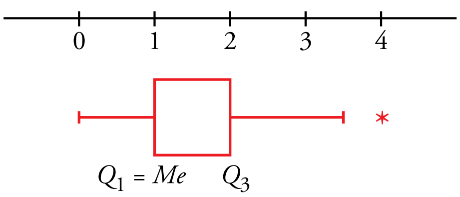
$Me = 1$

$Q_3 = 2$

$p_{40} = 1$

$p_{90} = 3$

e)

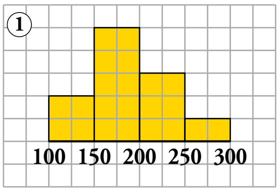


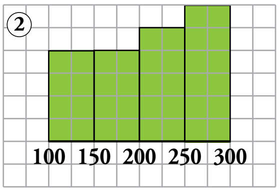
Resuelve problemas

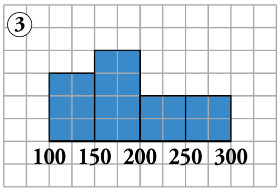
20. **Se ha medido el nivel de colesterol en cuatro grupos de personas sometidas a diferentes dietas. Las medias y las desviaciones típicas son las de la tabla:**

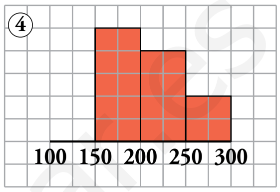
DIETA	A	B	C	D
$\bar{x}$	211,4	188,6	209,2	188,6
σ	37,5	52,6	56,3	43,1

Asocia a cada dieta la gráfica que le corresponde.









Observamos que las gráficas 1 y 3 muestran distribuciones con una media inferior a 200, mientras que las gráficas 2 y 4 muestran distribuciones con una media superior a 200.

Por tanto: A y C $\to$ 2 y 4; B y D $\to$ 1 y 3

Por otro lado, los datos en la gráfica 2 están más dispersos que en la gráfica 4, por tanto, la desviación típica es mayor. Así: C $\to$ 2; A $\to$ 4

De igual forma, los datos están más dispersos en la gráfica 3 que en la gráfica 1 y, por tanto: B $\to$ 3; D $\to$ 1.

21. **En la clase de educación física se ha pedido a cada estudiante que lance 10 veces la pelota de baloncesto desde la línea de personal. Estos resultados son las canastas conseguidas por cada estudiante:**

4 5 7 3 5   2 6 5 4 4   5 8 6 5 7
4 3 5 7 1   2 4 3 6 3   3 5 4 4 2

a) Construye y representa una tabla de frecuencias. Amplía la tabla con las columnas necesarias para hallar la media y la desviación típica. Calcula también el coeficiente de variación.

b) Construye la tabla de frecuencias acumuladas y de porcentajes acumulados y, a partir de ella, halla Q_1, Me, Q_3, p_{30}, p_{90} y p_{99}.

c) Represента los datos en un diagrama de caja.

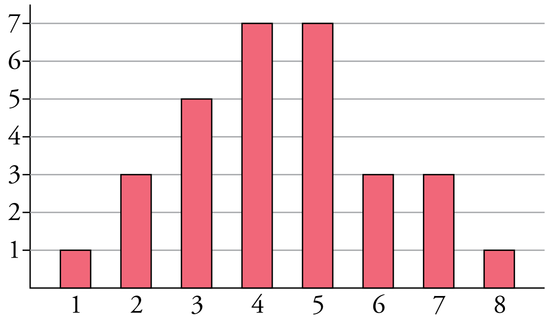
a) En la clase hay 30 estudiantes:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1	1	1	1
2	3	6	12
3	5	15	45
4	7	28	112
5	7	35	175
6	3	18	108
7	3	21	147
8	1	8	64
		132	664

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{132}{30} = 4{,}4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{664}{30} - 4{,}4^2} = \sqrt{2{,}77} = 1{,}66$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1{,}66}{4{,}4} = 0{,}38$$



b)

x_i	f_i	F_i	% ACUM.
1	1	1	3,33
2	3	4	13,33
3	5	9	30
4	7	16	53,33
5	7	23	76,66
6	3	26	86,66
7	3	29	96,66
8	1	30	100

$Q_1 = 3$

$Me = 4$

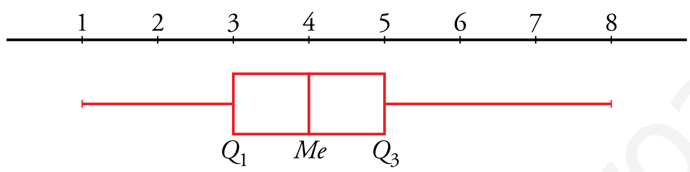
$Q_3 = 5$

$p_{30} = 3{,}5$

$p_{90} = 7$

$p_{99} = 7$

c)



Curiosidades matemáticas

¿Sabías que...?

Los teclados de los ordenadores tienen, todos, la misma distribución de los caracteres; cada letra, número o signo tiene su lugar, fijo. Esa distribución, heredada de las antiguas máquinas de escribir, fue ideada por Christopher Sholes (Inglaterra, 1867), basándose en un estudio estadístico sobre la frecuencia de aparición de cada letra en la lengua inglesa. Puso las más frecuentes "más a mano".

- **Si metieras en un bombo todas las letras de las dos líneas que estás leyendo y sacaras una al azar, ¿cuál de ellas tendría mayor probabilidad de ser elegida?**
- **¿Qué letra es la más usada en castellano? Diseña un proyecto para averiguarlo.**

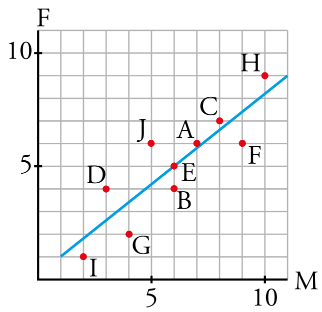
- A simple vista vemos que las letras que más aparecen son la "a" y la "e". Respectivamente aparecen 21 y 17 veces.
- Respuesta abierta.

1 Dos variables relacionadas. Correlación

Página 185

1. Identifica los restantes puntos del diagrama de dispersión del ejemplo de las notas en matemáticas y en física.

A cada estudiante *a*, *b*, …, le corresponderá el punto A, B, … en el diagrama de dispersión.



Página 187

2. En las siguientes distribuciones bidimensionales referentes a tus compañeros y compañeras de clase, estima si la correlación será positiva o negativa, muy fuerte, fuerte, débil o casi nula:

a) Medida de un palmo - Medida del pie.

b) Número de horas semanales de estudio - Número de horas semanales viendo la televisión.

c) Número de horas semanales de estudio - Número de suspensos en la última evaluación.

d) Estatura - Peso.

e) Nota en matemáticas en el último examen - Número de asignaturas suspensas en la última evaluación.

f) Peso - Nota en matemáticas.

g) Estatura media de los padres - Estatura del alumno.

h) Distancia de su casa al centro de estudios - Tiempo medio que tarda en llegar.

i) Número de libros leídos al año - Número de asignaturas suspensas en la última evaluación.

a) Positiva y fuerte.

b) Habrá una correlación negativa y muy fuerte.

c) Habrá una correlación negativa (a más horas semanales de estudio, menos número de suspensos) fuerte.

d) Correlación positiva débil.

e) Negativa y débil.

f) No habrá correlación.

g) Correlación positiva y fuerte.

h) Correlación positiva y muy fuerte.

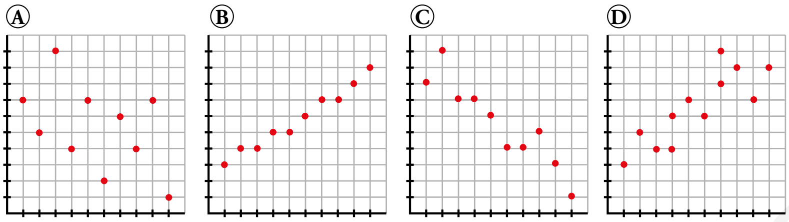
i) Correlación negativa débil.

2 El valor de la correlación

Página 188

1. **Los siguientes números son los valores absolutos de los coeficientes de correlación, *r*, de las distribuciones bidimensionales representadas a continuación:**

0,75 0,47 0,92 0,97



Asigna cada cual a la suya, cambiando el signo cuando convenga.

Ⓐ → –0,47

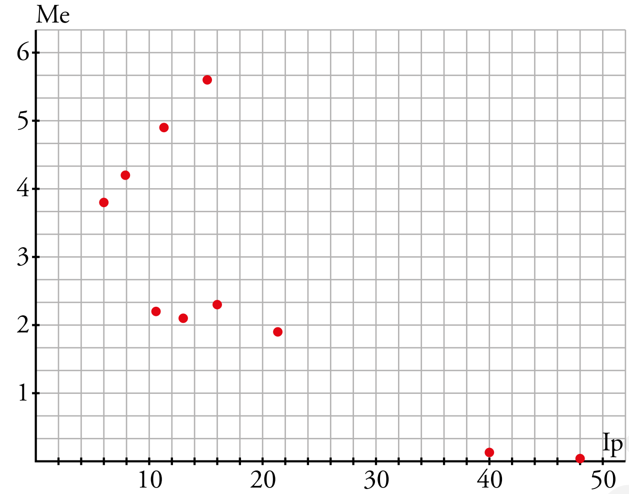
Ⓑ → 0,97

Ⓒ → –0,92

Ⓓ → 0,75

Página 189

2. Representa la nube de puntos y la recta de regresión de la distribución bidimensional IP - Me del ejercicio resuelto anterior.



3. Indica cuál de estos valores se ajusta mejor al valor de la correlación de la distribución del ejercicio 2.

0,5 –0,99 0,82 –0,77 0,99

$r = -0{,}77$

3 La recta de regresión para hacer estimaciones

Página 190

1. Estima, con los datos del ejemplo 1, el alargamiento correspondiente a una temperatura de 45 ºC. ¿Consideras fiable la estimación?

$y = 0{,}12x \rightarrow \hat{y}\,(45) = 5{,}4$ mm

La estimación es muy fiable.

2. Estima, con los datos del ejemplo 2, el peso de un nuevo jugador cuya estatura sea de 180 cm. ¿Consideras fiable la estimación?

Hallamos gráficamente el peso que corresponde a 180 cm: $\hat{y}\,(180) = 77$ kg.

La estimación no será muy fiable puesto que, aunque la correlación es relativamente alta, 180 no está en el intervalo de datos considerados.

Página 191

3. Estima, mediante la recta de regresión, la presión correspondiente a 1 000 m. ¿Es fiable la estimación?

Efectuamos la estimación con la ecuación de la recta de regresión:

$\hat{y}(1\,000) = 760 - 0{,}0824 \cdot 1\,000 = 677{,}6$ mm

Es muy fiable la estimación, ya que la correlación es muy buena y 1 000 está dentro del intervalo de valores considerados.

4. Estima la presión correspondiente a una altura de 6 000 m. Comenta cómo de fiable es esa estimación.

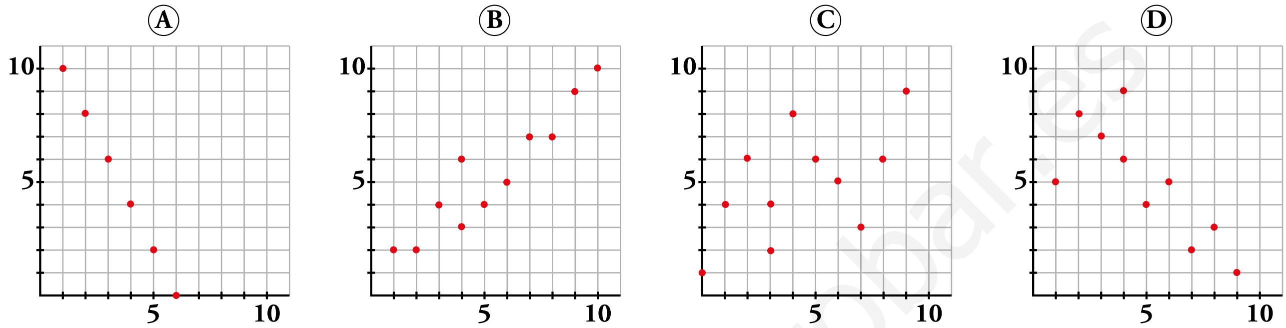
En este caso $\hat{y}(6\,000) = 760 - 0{,}0824 \cdot 6\,000 = 265{,}6$ mm y la estimación no es muy fiable porque aunque la correlación es muy buena, 6 000 está fuera del intervalo de datos disponibles.

Ejercicios y problemas

Página 192

Practica

1. **a) Traza, a ojo, la recta de regresión en cada una de estas cuatro distribuciones bidimensionales:**

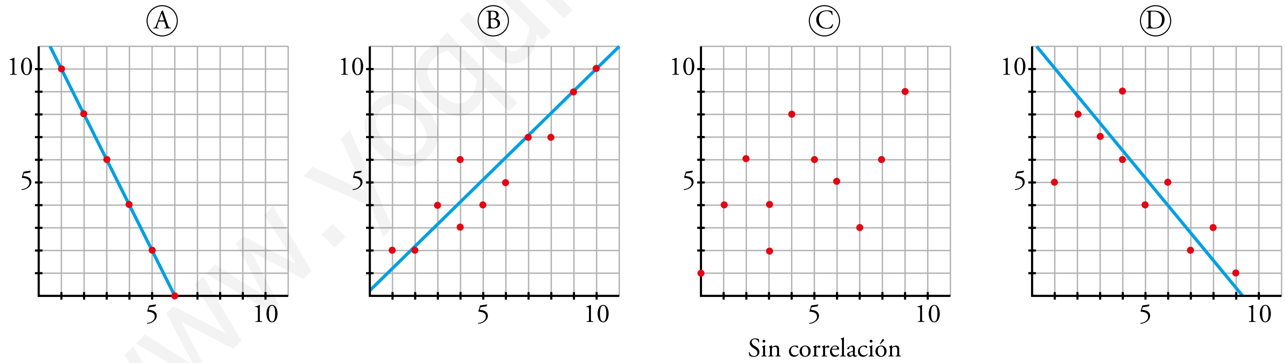


b) ¿Cuáles de ellas tienen correlación positiva y cuáles tienen correlación negativa?

c) Una de ellas presenta relación funcional. ¿Cuál es? ¿Cuál es la expresión analítica de la función que relaciona las dos variables?

d) Ordena de menor a mayor las correlaciones de las cuatro (en valor absoluto): en primer lugar, la que presenta correlación más débil, y, en último lugar, aquella cuya correlación es más fuerte.

a)



b) A y D tienen correlación negativa y B correlación positiva. En el caso de C no se aprecia correlación.

c) La A presenta una relación funcional:

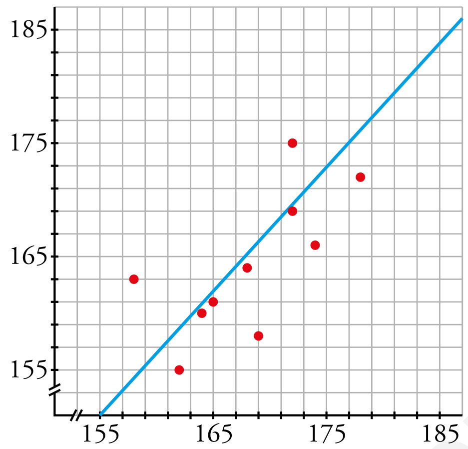
(6, 0) y (5, 2) pertenecen a la recta $\rightarrow$ $m = \dfrac{2-0}{5-6} = -2 \rightarrow y = -2(x-6)$

d) C < D < B < A

2. **Las estaturas de 10 chicas (x_i) y las de sus respectivas madres (y_i) son:**

x_i	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
y_i	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

Representa los valores sobre papel cuadriculado mediante una nube de puntos, traza a ojo la recta de regresión y di si la correlación es positiva o negativa y más o menos fuerte de lo que esperabas.



Se trata de una correlación positiva y fuerte.

3. **Estos son los resultados que hemos obtenido al tallar y pesar a varias personas:**

ESTATURA (cm)	156	163	171	177	184
PESO (kg)	48	75	65	73	81

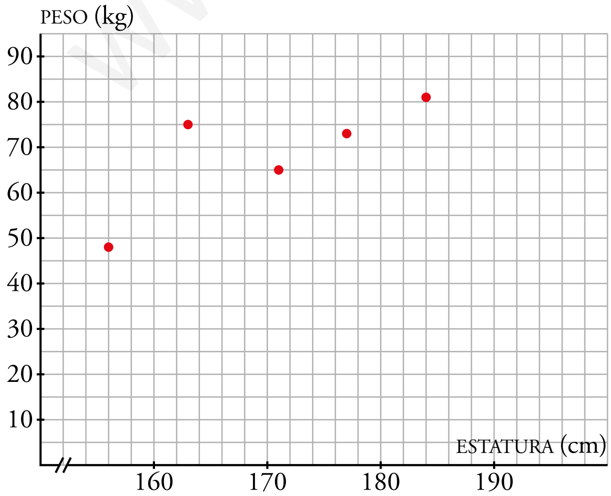
a) ¿Es una distribución bidimensional? ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuáles son los individuos?

b) Representa la nube de puntos.

c) ¿Es una relación estadística o funcional?

a) Sí es una distribución bidimensional ya que a cada individuo (personas que pesamos y tallamos) tiene dos valores asociados correspondientes a las dos variables que se relacionan: estatura (cm) y peso (kg).

b)

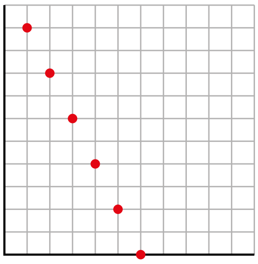


c) Es una relación estadística.

4. **Representa el diagrama de dispersión correspondiente a la siguiente distribución y di cuál de estos tres valores puede ser su coeficiente de correlación:**

$r = 1$ $\quad r = -0,98$ $\quad r = -1$

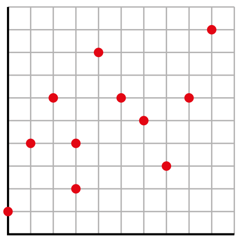
x	1	2	3	4	5	6
y	10	8	6	4	2	0



$r = -1$, la dependencia es funcional.

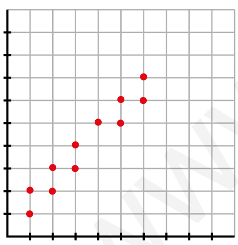
5. **Representa la nube de puntos de la siguiente distribución y estima cuál de estos tres puede ser su coeficiente de correlación: $r = 0,98$; $r = -0,51$; $r = 0,57$.**

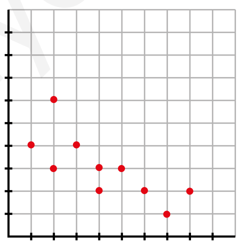
x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

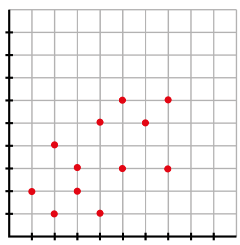


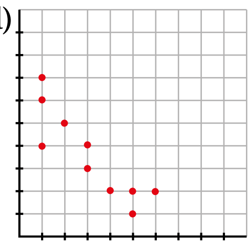
$r = 0,57$

6. **Los coeficientes de correlación de estas distribuciones bidimensionales son, en valor absoluto: 0,55; 0,75; 0,87 y 0,96. Asigna a cada una el suyo, cambiando el signo cuando proceda:**

a)


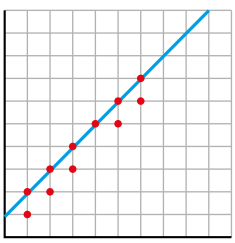
b)


c)


d)


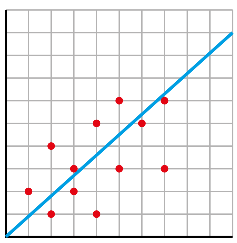
a) $r = 0,96$ b) $r = -0,75$ c) $r = 0,55$ d) $r = -0,87$

7. **Traza la recta de regresión de las distribuciones a) y c) del ejercicio anterior y estima, en cada una de ellas, los valores que corresponden a $x = 0$ y a $x = 10$. ¿En cuál son más fiables las estimaciones?**

a)


$x = 0 \rightarrow 0,9$

$x = 10 \rightarrow 11$

c)


$x = 0 \rightarrow 0$

$x = 10 \rightarrow 9$

Serán más fiables las estimaciones de la distribución a).

Página 193

Resuelve problemas

8. **Se ha hecho un estudio con ratones para ver los aumentos de peso (en g) mensuales que producen ciertas sustancias A, B y C (en mg diarios). Los datos obtenidos vienen dados en esta tabla:**

SUSTANCIA	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES A	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES B	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES C
1	3	2	3
2	1	2	3
3	3	1	2
4	5	3	0
5	6	0	1
6	4	3	–1
7	6	4	1
8	5	1	–2
9	7	3	–4
10	7	1	–2

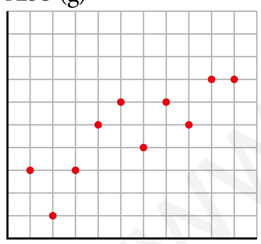
Los resultados negativos quieren decir que en lugar de aumentar, el peso disminuye.

a) Represente la nube de puntos de cada distribución.

b) Indica si la correlación es positiva o negativa en cada una de ellas.

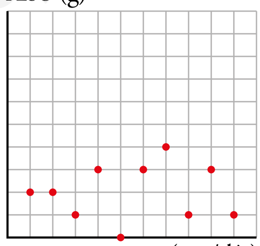
c) Ordena las correlaciones de menos a más fuerte.

a) y b) Sustancia A



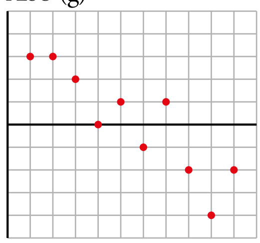
Correlación positiva.

Sustancia B



Correlación positiva.

Sustancia C



Correlación negativa.

c) Sustancia B < Sustancia A < Sustancia C.

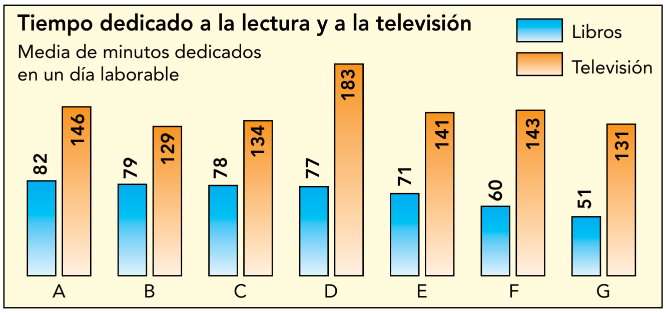
9. **La correlación entre las temperaturas medias mensuales de una ciudad española y el tiempo que sus habitantes dedican a ver la televisión, es de –0,89. ¿Te parece razonable este valor? Explica su significado.**

¿Será positiva o negativa la correlación entre la lluvia caída mensualmente y el consumo televisivo de sus habitantes?

Parece razonable que si las temperaturas aumentan, disminuye el tiempo que los habitantes dedican a ver la televisión, ya que parece lógico pensar que la gente pasa más tiempo en la calle.

La correlación entre la lluvia caída mensualmente y el consumo televisivo de sus habitantes será positiva porque si llueve, es lógico pensar que la gente pasará más tiempo en casa.

10. **En una encuesta realizada en 7 países europeos, se obtuvieron los datos de este gráfico:**

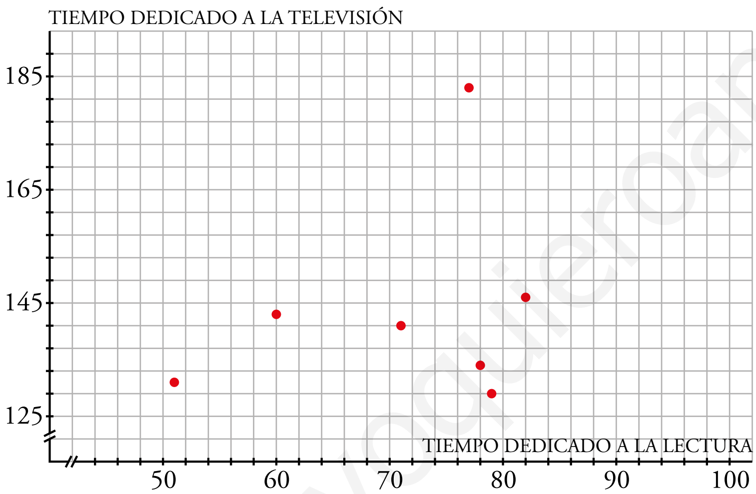


a) ¿Cómo crees que será la correlación entre los tiempos dedicados a la lectura y a la televisión?

b) Haz la nube de puntos correspondiente a estas dos variables y contrasta lo que observas en ella con tu respuesta del apartado a).

a) Esta respuesta depende de los alumnos y alumnas, que después comprobarán en el apartado b) lo acertado de su intuición.

b)



Se trata de una correlación positiva muy débil.

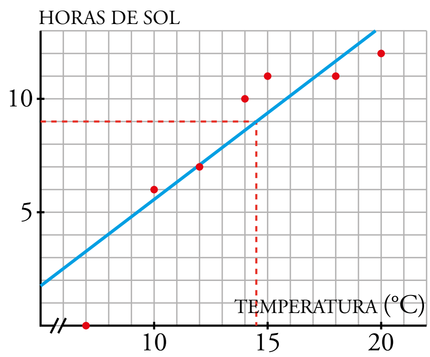
11. **Para realizar unos estudios sobre energía solar, se ha medido cada uno de los días de una semana la temperatura máxima y el número de horas de sol, obteniéndose los siguientes resultados:**

S: N.° DE HORAS DE SOL	T: TEMPERATURA (°C)
7	12
10	14
0	7
6	10
11	15
12	20
11	18

a) Traza a ojo la recta de regresión T-S.

b) Si el lunes siguiente a la medición hubo 9 horas de sol, ¿qué temperatura máxima cabe esperar que hiciera? ¿Qué fiabilidad tiene tu predicción?

a)



b) Cabe esperar que hiciera una temperatura máxima de 14,5 °C.

La fiabilidad es muy precisa porque la correlación es fuerte y la medición que nos piden está próxima a los valores que conocemos.

Curiosidades matemáticas

Encuentra explicaciones razonables a estos hechos

1. Suele decirse que la mayoría de los accidentes de automóvil se producen cerca de la casa del conductor. ¿Es más peligroso circular por nuestro barrio que a muchos kilómetros de nuestra residencia?

2. Es fácil demostrar que los niños con pies grandes leen mejor que los que tienen pies pequeños. ¿Influye el tamaño del pie en la capacidad para la lectura?

3. Se ha constatado que, en los pueblos de una cierta comarca, cuantos más nidos de cigüeña hay en sus tejados, más nacimientos de niños se producen. ¿Tienen que ver, pues, las cigüeñas con los nacimientos?

1. Los conductores se sienten más seguros en un entorno cercano y eso puede causar que bajen la guardia y tengan accidentes.

2. Los niños de los cursos superiores leen mejor que los que empiezan el colegio. Estos niños son mayores y tienen los pies más grandes.

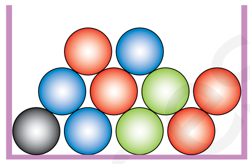
3. Si hay más nidos, lo más probable es que haya más tejados y, por tanto, que el pueblo de la comarca sea más grande. Por tanto, habrá más nacimientos.

2 Sucesos aleatorios

Página 197

1. En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

Sacamos una bola y anotamos su color.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

a) Sí, porque depende del azar.

b) E = {NEGRO, ROJO, AZUL, VERDE}

c) Respuesta libre.

2. Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña.

Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa dos sucesos que tengan más de un caso.

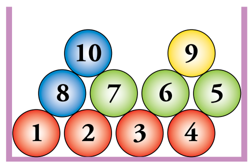
a) Sí, porque depende del azar.

b) E = {FRESA, NARANJA, LIMÓN, PIÑA}

c) Respuesta libre.

3. En una urna hay 10 bolas numeradas.

Sacamos una bola y anotamos el número.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

a) Sí, porque depende del azar.

b) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

c) Respuesta libre.

4. Daniel le ha regalado a su hermana María una caja de bombones de chocolate.

Saca un bombón y ve si es de chocolate.

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

No. No depende del azar, todos los bombones son de chocolate.

3 Probabilidad de un suceso

Página 199

1. En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 17?

b) Si solo hubiera diez bolas numeradas del 11 al 20, ¿cuál sería la probabilidad de obtener el 17?

a) $P[17] = \frac{1}{90}$

b) $P[17] = \frac{1}{10}$

2. En una caja hay dos tipos de galletas: las de chocolate, *CH*, y las normales, *N*. Sacamos una al azar, la miramos y la devolvemos a la caja.

Si hemos extraído 27 galletas de chocolate y 13 galletas normales, ¿qué valores asignarías a P [*CH*] y a P [*N*]?

27 + 13 = 40, por tanto:

$P[CH] = \frac{27}{40}$ y $P[N] = \frac{13}{40}$

4 Ley de Laplace para experiencias regulares

Página 200

1. Extraemos una carta de una baraja española con 40 naipes. Halla la probabilidad de obtener:

a) El as de espadas. **b) El rey de bastos.**

c) Una figura (sota, caballo o rey). **d) Una copa.**

a) $P[\text{AS ESPADAS}] = \dfrac{1}{40}$ b) $P[\text{REY BASTOS}] = \dfrac{1}{40}$

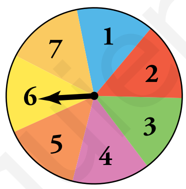
c) $P[\text{FIGURA}] = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10}$ d) $P[\text{COPAS}] = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$

2. En un campamento hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar a su portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

$32 + 13 + 15 + 23 = 83$ jóvenes en total:

$P[\text{EUROPEO}] = \dfrac{32}{83}$

3. Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?



Hay 7 números en total. Hay 3 números pares.

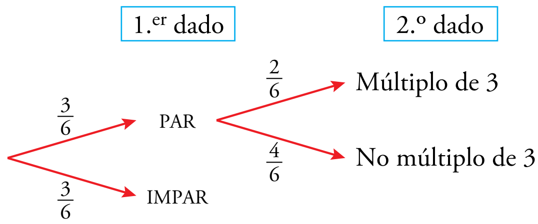
$P[\text{PAR}] = \dfrac{3}{7}$

5 Experiencias compuestas. Diagramas en árbol

Página 203

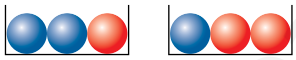
1. Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de obtener par en el primero y múltiplo de 3 en el segundo.

Se trata de experiencias independientes.



$$P[1.^{\text{o}}\ \text{PAR y } 2.^{\text{o}}\ \dot{3}] = P[1.^{\text{o}}\ \text{PAR}] \cdot P[2.^{\text{o}}\ \dot{3}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2. Sacamos una bola de la 1.ª urna y la echamos en la 2.ª. Luego, sacamos una bola de la 2.ª urna.



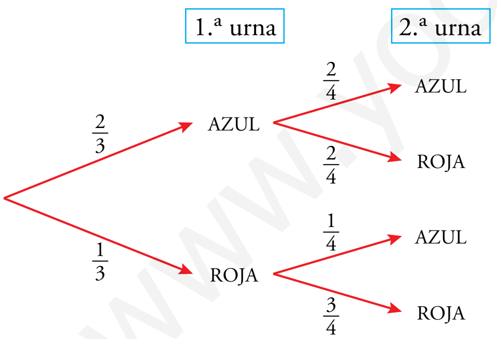
1.ª urna **2.ª urna**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sacadas sean azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna bola sea azul? Hazlo mediante la probabilidad del suceso contrario.

Se trata de experiencias dependientes:

a)



$$P[\text{AZUL } 1.^{\text{a}} \text{ y AZUL } 2.^{\text{a}}] = P[\text{AZUL } 1.^{\text{a}}] \cdot P[\text{AZUL } 2.^{\text{a}}/\text{AZUL } 1.^{\text{a}}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

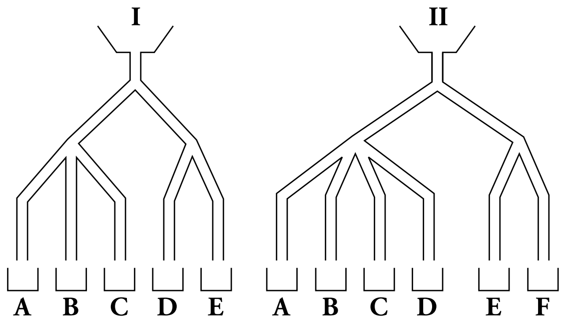
b) $P[\text{alguna AZUL}] = 1 - P[\text{ninguna AZUL}] = 1 - P[\text{ROJA } 1.^{\text{a}} \text{ y ROJA } 2.^{\text{a}}] =$

$$= 1 - P[\text{ROJA } 1.^{\text{a}}] \cdot P[\text{ROJA } 2.^{\text{a}}/\text{ROJA } 1.^{\text{a}}] = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

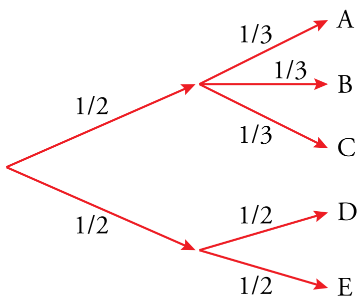
3. **¿Cuál es la probabilidad de que cada bola que se deja caer por el embudo caiga en cada casillero?**

a) En el aparato I.

b) En el aparato II.



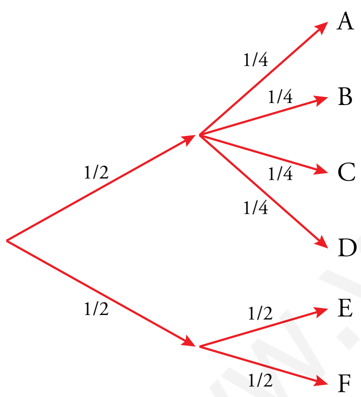
a)



$P[\text{A}] = P[\text{B}] = P[\text{C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[\text{D}] = P[\text{E}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b)



$P[\text{A}] = P[\text{B}] = P[\text{C}] = P[\text{D}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$P[\text{E}] = P[\text{F}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

6 Tablas de contingencia

Página 204

Interpretar una tabla

TIPO DE ACTIVIDAD EXTRAESCOLAR

CURSO	CULTURAL	DEPORTIVA	NINGUNA	TOTAL
1.°	12	36	72	120
2.°	15	40	45	100
3.°	21	44	35	100
4.°	24	40	16	80
TOTAL	72	160	168	400

Observa la tabla que tienes arriba y responde:

a) ¿Cuántos estudiantes del centro participan en actividades culturales? ¿Cuántos de ellos son de 2.°?

b) ¿Cuántos estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar? De ellos, ¿cuántos son de 4.°?

c) ¿Cuántos estudiantes de 3.° participan en actividades deportivas?

d) ¿Cuántos estudiantes que participan en actividades deportivas son de 3.°?

a) $\frac{72}{400} \cdot 100 = 18 \rightarrow$ El 18 % de estudiantes del centro participan en actividades culturales.

$\frac{15}{72} \cdot 100 = 20{,}83 \rightarrow$ El 20,83 % son de 2.°.

b) $\frac{168}{400} \cdot 100 = 42 \rightarrow$ El 42 % de los estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar.

$\frac{16}{168} \cdot 100 = 9{,}5 \rightarrow$ El 9,5 % son de 4.°.

c) El 44 % de alumnos de 3.° participan en actividades deportivas.

d) $\frac{44}{160} \cdot 100 = 27{,}5 \rightarrow$ El 27,5 % de los que participan en actividades deportivas son de 3.°.

Página 205

1. Explica el significado de los números 120, 168, 12, 45 y 40 de la tabla del ejercicio resuelto anterior.

120 → Número de alumnos de 1.º.

168 → Número de alumnos con NINGUNA actividad extraescolar.

12 → Número de alumnos de 1.º con actividad extraescolar CULTURAL.

45 → Número de alumnos de 2.º con NINGUNA actividad extraescolar.

40 → Número de alumnos de 4.º con actividad extraescolar DEPORTIVA.

2. Explica lo que significa, para la tabla del ejercicio resuelto anterior, estas expresiones y da su valor:

a) ***P*** **[1.º]** **b)** ***P*** **[CULTURAL]**

c) ***P*** **[4.º / CULTURAL]** **d)** ***P*** **[CULTURAL / 4.º]**

a) $P[1.°]$ → Probabilidad de que, elegido al azar, un alumno sea de 1.º.

$$P[1.°] = \frac{120}{400} = 0{,}3$$

b) $P[\text{CULTURAL}]$ → Probabilidad de elegir a un alumno con actividad extraescolar CULTURAL.

$$P[\text{CULTURAL}] = \frac{72}{400} = 0{,}18$$

c) $P[4.° / \text{CULTURAL}]$ → Probabilidad de que habiendo elegido un alumno con actividad CULTURAL, este resulte ser de 4.º.

$$P[4.° / \text{CULTURAL}] = \frac{24}{72} = 0{,}375$$

d) $P[\text{CULTURAL} / 4.°]$ → Probabilidad de elegir a un alumno con actividad CULTURAL entre todos los de 4.º.

$$P[\text{CULTURAL} / 4.°] = \frac{24}{80} = 0{,}3$$

3. Queremos analizar, partiendo de los datos de la tabla del ejercicio resuelto anterior, la evolución del absentismo (falta de participación) en actividades extraescolares cualesquiera, al aumentar la edad. Calcula las proporciones que convenga y compáralas.

Debemos observar la probabilidad de los que no hacen ninguna actividad en cada uno de los cursos, es decir:

$P[\text{NINGUNA} / 1.°] = \dfrac{72}{120} = 0{,}6$ $P[\text{NINGUNA} / 2.°] = \dfrac{45}{100} = 0{,}45$

$P[\text{NINGUNA} / 3.°] = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$ $P[\text{NINGUNA} / 4.°] = \dfrac{16}{80} = 0{,}2$

Por tanto, según pasan los cursos, cada vez hay menos alumnos que no hacen ninguna actividad extraescolar.

4. En una bolsa hay 40 bolas huecas, y dentro de cada una hay un papel en el que pone SÍ o NO, según esta tabla:

	🔴	🟢	🔵	TOTAL
SÍ	15	4	1	20
NO	5	4	11	20
TOTAL	20	8	12	40

a) Describe los sucesos SÍ, NO, 🔴, 🔴 / SÍ, SÍ / 🔴 y calcula sus probabilidades.

b) Hemos sacado una bola roja. ¿Qué probabilidad hay de que haya SÍ en su interior? ¿Y si la bola es azul?

c) Se ha sacado una bola y dentro pone SÍ. ¿Cuál es la probabilidad de que sea 🔴? ¿Y 🟢? ¿Y 🔵?

a) SÍ → sacar una bola al azar y que sea SÍ.

NO → sacar una bola al azar y que sea NO.

🔴 → sacar una bola al azar y que sea roja.

🔴 / SÍ → de entre las bolas que dicen SÍ, sacar una roja.

SÍ / 🔴 → de entre las bolas rojas, sacar una que dice SÍ.

$P[\text{SÍ}] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ $P[\text{NO}] = 1 - P[\text{SÍ}] = \frac{1}{2}$

$P[$🔴$] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ $P[$🔴 / SÍ$] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $P[$SÍ / 🔴$] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

b) $P[$SÍ / 🔴$] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $P[$SÍ / 🔵$] = \frac{1}{12}$

c) $P[$🔴 / SÍ$] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $P[$🟢 / SÍ$] = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ $P[$🔵 / SÍ$] = \frac{1}{20}$

Ejercicios y problemas

Página 206

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

1. **Indica el espacio muestral de cada una de las siguientes experiencias aleatorias:**

a) Señalo al azar una provincia en un mapa de Galicia.

b) Lanzo un cubo de Rubik recién montado y anoto el color de la cara de arriba.

c) Señalo una palabra cualquiera de un libro elegido al azar y observo cuál es la primera vocal que aparece.

d) Saco una carta de una baraja española y observo el palo.

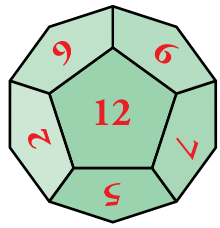
a) E = {La Coruña, Lugo, Orense, Pontevedra}

b) E = {azul, amarillo, rojo, verde, blanco, naranja}

c) E = {a, e, i, o, u}

d) E = {oros, copas, espadas, bastos}

2. **Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.**



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Menos de 5" **B = "Más de 4"**

C = "Número par" **D = "No múltiplo de 3"**

a) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) A = {1, 2, 3, 4} B = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

C = {2, 4, 6, 8, 10, 12} D = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11}

3. **Escogemos al azar un día cualquiera de la semana.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Fin de semana"

B = "Los que empiezan por la letra M"

C = "Los que acaban en *es*"

a) E = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}

b) A = {Sábado, Domingo}

B = {Martes, Miércoles}

C = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes}

4. **Escogemos una bola al azar de cada urna. Un caso es, por ejemplo, Azul-Negra.**

1.ª urna **2.ª urna**

a) Describe el espacio muestral.

b) Haz lo mismo si en la segunda urna hubiera una blanca y una negra.

a) E = {roja-negra, azul-negra, verde-negra}

b) E = {roja-negra, roja-blanca, azul-negra, azul-blanca, verde-negra, verde-blanca}

5. **Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.**

a) Completa el espacio muestral: E = {CC, C+, …}

b) Describe los sucesos A = "La primera salió C".

c) Repite la actividad suponiendo que lanzamos tres monedas en lugar de dos. Describe: B = "Obtener dos veces C" y D = "No obtener ninguna C".

a) E = {CC, C+, +C, ++}

b) A = {CC, C+}

c) E = {CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++}

B = {CC+, C+C, +CC}

D = {+++}

Experiencias simples

6. **Lanzamos un dado correcto. Calcula las probabilidades de que el resultado sea:**

a) 1 o 2. **b) Mayor que 2.** **c) Par.**

d) Mayor que 1. **e) Menor que 1.** **f) Menor que 7.**

a) $P[1 \text{ o } 2] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ b) $P[> 2] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ c) $P[\text{PAR}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

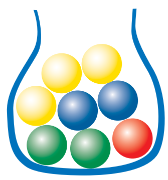
d) $P[> 1] = \frac{5}{6}$ e) $P[< 1] = 0$ f) $P[< 7] = 1$

7. **Se extrae al azar una bola de la siguiente bolsa. Calcula la probabilidad de que:**

a) Sea azul.

b) No sea verde.

c) Sea roja o azul.

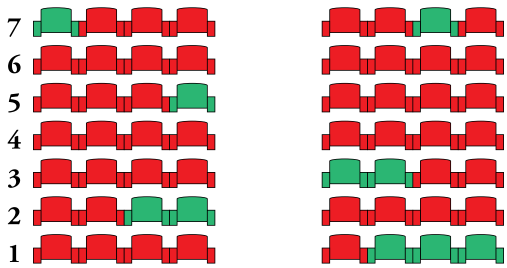


a) $P[\text{AZUL}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{no VERDE}] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

c) $P[\text{ROJA o AZUL}] = \frac{3}{8}$

8. **En la taquilla del cine me enseñan los huecos que quedan libres en verde:**



Si digo que me asignen un hueco al azar, calcula la probabilidad de que me siente:

a) En primera fila.

b) Más atrás de la cuarta fila.

c) En algún sitio que no sean las dos primeras filas.

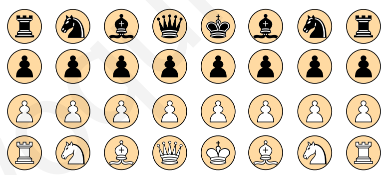
Hay 10 huecos libres:

a) $P[\text{FILA } 1.^{a}] = \dfrac{3}{10}$

b) $P[\text{MÁS ATRÁS DE FILA } 4.^{a}] = \dfrac{3}{10}$

c) $P[\text{no } 1.^{a} \text{ o } 2.^{a}] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

9. **Metemos en una bolsa pequeñas cartulinas circulares, cada una con una pieza dibujada del juego de ajedrez. Observa las piezas que componen el juego. Elegimos una al azar.**



a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un peón? ¿Y de obtener un peón negro?

b) ¿Qué probabilidad hay de sacar una torre? ¿Y un caballo blanco? ¿Y uno de los reyes?

a) $P[\text{PEÓN}] = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad P[\text{PEÓN NEGRO}] = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

b) $P[\text{TORRE}] = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad P[\text{REY}] = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$

10. **Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos, A, B, C y D, de la actividad 2.**

$P[A] = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad P[B] = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

$P[C] = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad P[D] = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

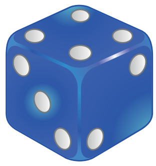
11. **Halla la probabilidad de los sucesos, A, B y C de la actividad 3.**

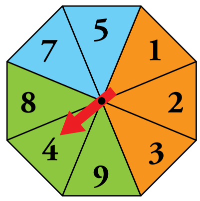
$P[A] = \dfrac{2}{7}$ $\qquad P[B] = \dfrac{2}{7}$ $\qquad P[C] = \dfrac{5}{7}$

Página 207

Experiencias compuestas independientes

12. **Tiramos un dado y hacemos girar la ruleta:**





a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números sean pares? ¿Y de que alguno de los dos sea impar?

b) Halla la probabilidad de obtener un número mayor que 2 en el dado y un color que no sea azul en la ruleta.

c) Calcula la probabilidad de obtener un 6 o un 5 en el dado.

d) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados sea mayor que 10.

a) $P[\text{PAR y PAR}] = P[\text{DADO PAR}] \cdot P[\text{RULETA PAR}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

b) $P[> 2 \text{ DADO y no RULETA AZUL}] = P[> 2 \text{ DADO}] \cdot P[\text{no AZUL RULETA}] = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

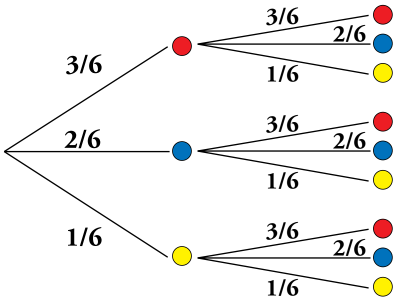
c) $P[6 \text{ o } 5 \text{ en DADO}] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d) $P[\text{SUMA} > 10] = \frac{13}{48}$

SUMA	RULETA							
DADO	1	2	3	4	5	7	8	9
1	2	3	4	5	6	8	9	10
2	3	4	5	6	7	9	10	11
3	4	5	6	7	8	10	11	12
4	5	6	7	8	9	11	12	13
5	6	7	8	9	10	12	13	14
6	7	8	9	10	11	13	14	15

13. **Tiramos dos dados iguales. Cada uno tiene tres caras rojas, dos azules y una amarilla.**

El siguiente diagrama en árbol muestra las posibles combinaciones con sus probabilidades:



Calcula, a partir del diagrama en árbol, la probabilidad de obtener:

a) Dos caras rojas.

b) Una cara amarilla y una roja.

c) Dos caras iguales.

d) Dos caras distintas.

a) $P[\text{2 CARAS ROJAS}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{AMARILLA y ROJA}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $P[\text{2 IGUALES}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

d) $P[\text{2 DISTINTAS}] = 1 - P[\text{2 IGUALES}] = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$

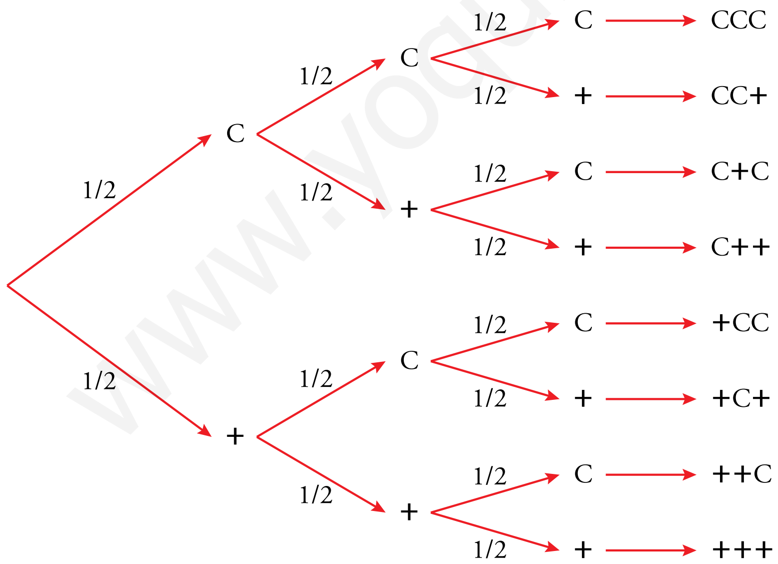
14. **Tiramos tres monedas.**

a) Construye un diagrama en árbol con las posibles combinaciones.

b) Calcula la probabilidad de obtener dos caras y una cruz.

c) ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna cruz?

a)



b) $P[\text{2C y 1+}] = P[\text{CC+}] + P[\text{C+C}] + P[\text{+CC}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

c) $P[\text{alguna CRUZ}] = 1 - P[\text{ninguna CRUZ}] = 1 - P[\text{CCC}] = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Experiencias compuestas dependientes. Probabilidad condicionada

15. **Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de estos sucesos:**

a) Un 5 y un rey.

b) Dos espadas.

c) Ninguna copa (no copa y no copa).

d) Dos figuras (sota, caballo o rey).

e) Una figura y una no figura.

a) $P[5 \text{ y REY}] = P[5] \cdot P[\text{REY}/5] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{390} = \frac{2}{195}$

b) $P[2 \text{ ESPADAS}] = P[\text{ESPADA } 1.^a] \cdot P[\text{ESPADA } 2.^a/\text{ESPADA } 1.^a] =$

$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$$

c) $P[\text{ninguna COPA}] = P[\text{no COPA } 1.^a] \cdot P[\text{no COPA } 2.^a/ \text{ no COPA } 1.^a] =$

$$= \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{3}{4} \cdot \frac{29}{39} = \frac{87}{156} = \frac{29}{52}$$

d) $P[2 \text{ FIGURAS}] = P[\text{FIGURA } 1.^a] \cdot P[\text{FIGURA } 2.^a/\text{FIGURA } 1.^a] =$

$$= \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{3}{10} \cdot \frac{11}{39} = \frac{33}{390} = \frac{11}{130}$$

e) $P[\text{FIGURA y no FIGURA}] = P[\text{FIGURA } 1.^a] \cdot P[\text{no FIGURA } 2.^a/ \text{ FIGURA } 1.^a] =$

$$= \frac{12}{40} \cdot \frac{28}{39} = \frac{3}{10} \cdot \frac{28}{39} = \frac{84}{390} = \frac{14}{65}$$

16. **Lanzamos una moneda: si sale cara, tomo una carta de una baraja; si sale cruz, no sigo jugando.**

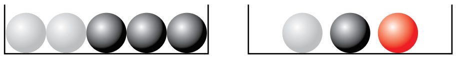
a) ¿Qué probabilidad hay de obtener OROS o FIGURA?

b) ¿Qué probabilidad hay de que ninguna sea ni ORO ni FIGURA?

a) $P[\text{OROS o FIGURA}] = P[\text{CARA}] \cdot P[\text{OROS o FIGURA/CARA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{40} = \frac{19}{80}$

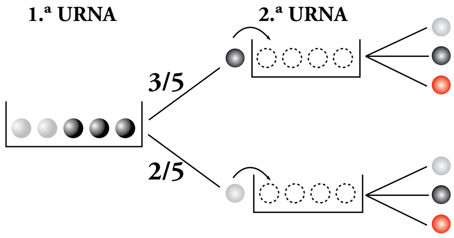
b) $P[\text{ni OROS ni FIGURA}] = 1 - P[\text{OROS o FIGURA}] = 1 - \frac{19}{80} = \frac{61}{80}$

17. **Cogemos al azar una bola de la 1.ª urna, la echamos en la 2.ª y sacamos una bola de esta 2.ª urna.**



1.ª urna **2.ª urna**

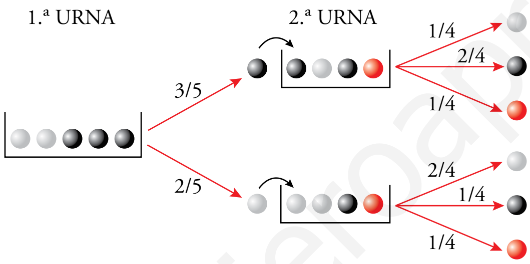
Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol. Completa la composición de la segunda urna y las probabilidades de cada rama.



Calcula, a partir del diagrama, estas probabilidades:

a) P**[1.ª y 2.ª]** **b)** P**[1.ª y 2.ª]** **c)** P**[2.ª]**

d) P**[2.ª]** **e)** P**[2.ª]**



a) $P[1.^a \ \text{y}\ 2.^a\ ] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

b) $P[1.^a \ \text{y}\ 2.^a\ ] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

c) $P[2.^a\ ] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

d) $P[2.^a\ ] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{20} + \frac{4}{20} = \frac{7}{20}$

e) $P[2.^a\ ] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

18. **Calcula las siguientes probabilidades condicionadas correspondientes a la experiencia de las urnas del ejercicio anterior:**

a) ***P*****[1.ª ⚫ y 2.ª ⚪]** **b)** ***P*****[2.ª ⚪ y 1.ª ⚪]**

c) ***P*****[2.ª ⚫ y 1.ª ⚫]** **d)** ***P*****[2.ª ⚪ y 1.ª ⚫]**

e) ***P*****[2.ª 🔴 y 1.ª ⚫]** **f)** ***P*****[2.ª 🔴 y 1.ª ⚪]**

¿Qué ocurre con las dos últimas probabilidades? Explica por qué.

Las probabilidades del enunciado son las siguientes:

a) *P*[1.ª ⚫ y 2.ª ⚪] $= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$

b) *P*[2.ª ⚪ y 1.ª ⚪] $= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

c) *P*[2.ª ⚫ y 1.ª ⚫] $= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

d) *P*[2.ª ⚪ y 1.ª ⚫] $= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$

e) *P*[2.ª 🔴 y 1.ª ⚫] $= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$

f) *P*[2.ª 🔴 y 1.ª ⚪] $= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

Aplicando la igualdad $P[\text{A y B}] = P[\text{A}] \cdot P[\text{B/A}]$ podemos calcular las siguientes probabilidades condicionadas:

a) *P*[1.ª ⚫/2.ª ⚪] $= \frac{3/20}{7/20} = \frac{3}{7}$

b) *P*[2.ª ⚪/1.ª ⚪] $= \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}$

c) *P*[2.ª ⚫/1.ª ⚫] $= \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}$

d) *P*[2.ª ⚪/1.ª ⚫] $= \frac{3/20}{3/5} = \frac{1}{4}$

e) *P*[2.ª 🔴/1.ª ⚫] $= \frac{3/20}{3/5} = \frac{1}{4}$

f) *P*[2.ª 🔴/1.ª ⚪] $= \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}$

Las dos últimas probabilidades son iguales porque como no hay bolas rojas en la primera urna, el número de bolas rojas en la segunda urna siempre será 1.

Página 208

Tablas de contingencia

19. **En un centro escolar hay 1 000 alumnos repartidos como indica esta tabla:**

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	187	113
NO USAN GAFAS	413	287

Se elige al azar uno de ellos. Di cuál es la probabilidad de que:

a) Sea chico.

b) Sea chica.

c) Use gafas.

d) No use gafas.

e) Sea una chica con gafas.

f) Sabiendo que es una chica, use gafas.

	CHICOS	CHICAS	TOTAL
USAN GAFAS	187	113	300
NO USAN GAFAS	413	287	700
TOTAL	600	400	1 000

a) $P[\text{CHICO}] = \dfrac{600}{1000} = \dfrac{3}{5}$

b) $P[\text{CHICA}] = \dfrac{400}{1000} = \dfrac{2}{5}$

c) $P[\text{USE GAFAS}] = \dfrac{300}{1000} = \dfrac{3}{10}$

d) $P[\text{NO USE GAFAS}] = \dfrac{700}{1000} = \dfrac{7}{10}$

e) $P[\text{CHICA CON GAFAS}] = \dfrac{113}{1000}$

f) $P[\text{USE GAFAS/CHICA}] = \dfrac{113}{400}$

20. **Hoy hay tres partidos: de baloncesto, de fútbol y de tenis. De los 40 amigos que hay en casa, 21 prefieren fútbol y 5, tenis. Hay 10 chicos que quieren baloncesto, 9 chicas que quieren fútbol y 3 chicas que prefieren ver el tenis. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:**

a) Sea chico.

b) No quiera ver el tenis.

c) Sea un chico que quiere ver el tenis.

d) Sea una chica que quiera ver el baloncesto.

e) Sabiendo que es una chica, que quiera ver fútbol.

f) Sabiendo que prefiere ver tenis, que sea un chico.

	BALONCESTO	FÚTBOL	TENIS	TOTAL
CHICOS	10	12	2	24
CHICAS	4	9	3	16
TOTAL	14	21	5	40

a) $P[\text{CHICO}] = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

b) $P[\text{NO QUIERE TENIS}] = \frac{21+14}{40} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$

c) $P[\text{CHICO QUIERE TENIS}] = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$

d) $P[\text{CHICA QUIERE BALONCESTO}] = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

e) $P[\text{FÚTBOL/CHICA}] = \frac{9}{16}$

f) $P[\text{CHICO/QUIERE TENIS}] = \frac{2}{5}$

21. **Se han hecho análisis de sangre 200 personas para determinar su grupo sanguíneo, así como el Rh. Los resultados se resumen en esta tabla:**

	GRUPO A	GRUPO B	GRUPO AB	GRUPO O	TOTALES
RH+	74	12	6	70	162
RH–	18	3	1	16	38
TOTALES	92	15	7	86	200

a) Si elegimos al azar una persona de entre esas 200, ¿cuál es la probabilidad de que su grupo sanguíneo sea A? ¿Y de que sea O? ¿Y de que tenga Rh+?

b) Si elegimos al azar una persona del grupo sanguíneo B, ¿cuál es la probabilidad de que tenga Rh+?

c) Sabiendo que una persona es del grupo A o B, ¿cuál es la probabilidad de que sea Rh+?

a) $P[\text{GRUPO A}] = \frac{92}{200} = \frac{23}{50}$ $\quad P[\text{GRUPO O}] = \frac{86}{200} = \frac{43}{100}$

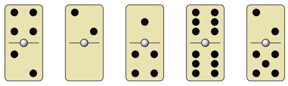
$P[\text{Rh+}] = \frac{162}{200} = \frac{81}{100}$

b) $P[\text{Rh+/B}] = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

c) $P[\text{Rh+/A o B}] = \frac{74+12}{92+15} = \frac{86}{107}$

Resuelve problemas

22. **¿Conoces el dominó? Es un juego cuyas fichas son de este tipo:**



Hay fichas con todas las posibles combinaciones con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, incluyendo las dobles como el 6-6 del dibujo.

a) Comprueba que en total son 28 fichas.

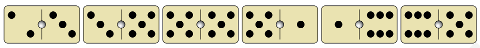
Si sacamos una al azar, halla la probabilidad de que:

b) La suma de los números sea 6.

c) La suma sea un número impar.

d) El producto de los dos números sea menor que 6.

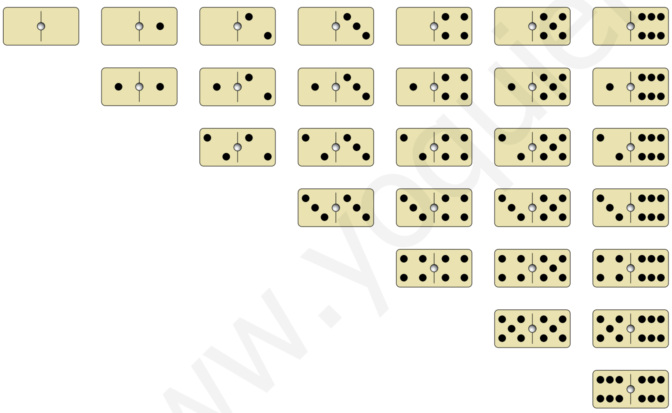
En el desarrollo del juego, las fichas se van poniendo sobre la mesa y se van enlazando unas con otras, así:



La siguiente ficha debe tener un 2, y se situaría a la izquierda, o un 5, e iría a la derecha.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que, sacando al azar una de las restantes fichas, pueda enlazar con una de las que están sobre la mesa?

a) Las fichas posibles son:



En total son 28 fichas.

b) $P[\text{SUMA } 6] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

c) $P[\text{SUMA IMPAR}] = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

d) $P[\text{PRODUCTO} < 6] = \frac{13}{28}$

e) Casos posibles = 22 porque ya hay 6 fichas sobre la mesa.

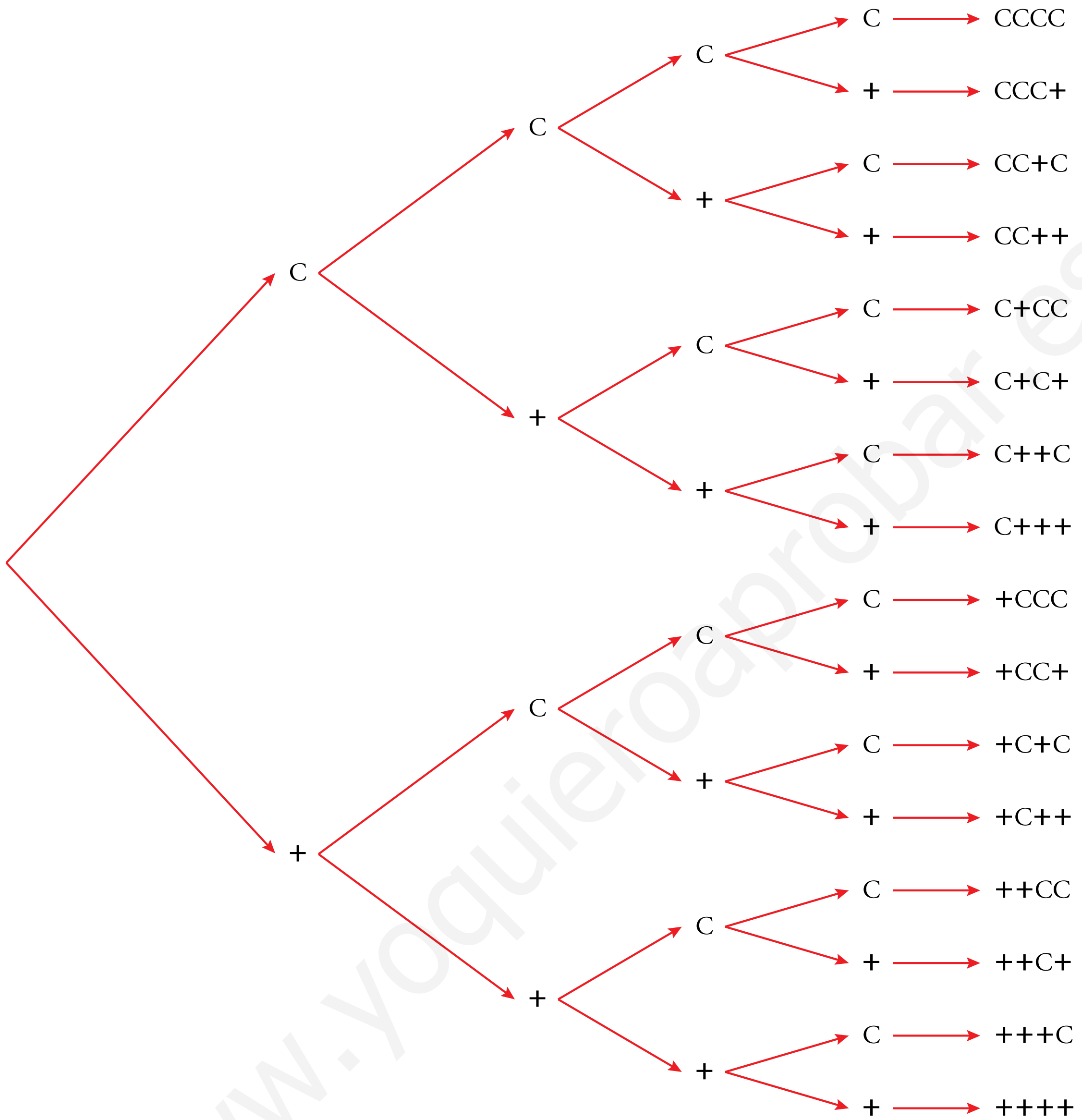
Casos favorables = 8 porque de las 13 fichas que podrían usarse, 5 ya están en la mesa.

$P[\text{ENLAZAR}] = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$

23. **Lanzamos cuatro monedas. Calcula:**

P **[2 caras]** ***P*** **[Ninguna cara]** ***P*** **[Alguna cara]**

Observamos el diagrama de árbol:



$P[\text{2 caras}] = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P[\text{Ninguna cara}] = \frac{1}{16}$

$P[\text{Alguna cara}] = \frac{15}{16}$

24. **Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:**

a) Sea 5. **b) Sea 6.** **c) Sea 4.**

PRODUCTO	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

a) $P[\text{PRODUCTO } 5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) $P[\text{PRODUCTO } 6] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

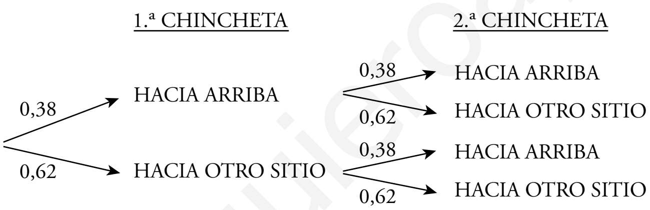
c) $P[\text{PRODUCTO } 4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

25. **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?**

$P[\text{LAS TRES MENORES QUE } 5] = P[< 5] \cdot P[< 5] \cdot P[< 5] = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$

26. **Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.**

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?



$P[\text{DISTINTA FORMA}] = 0{,}38 \cdot 0{,}62 + 0{,}62 \cdot 0{,}38 = 0{,}47$

27. **En un laboratorio, para que un medicamento salga al mercado tiene que pasar tres controles. La probabilidad de superar el primero es 0,89; la de superar el segundo es 0,93 y la de superar el tercero es 0,85.**

¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto no sea apto para salir al mercado?

$P[\text{no APTO}] = 1 - P[\text{APTO}] = 1 - 0{,}89 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}85 = 1 - 0{,}70 = 0{,}3$

Página 209

28. **Una botella contiene 20 bolas de colores negro, rojo y verde. No sabemos cuántas de cada color, ni podemos verlo, porque la botella es opaca. Solo podemos ver, cuando la tumbamos, el color de la bola que queda junto al tapón, que es transparente.**

Durante unos días hacemos 1 000 veces la experiencia de *agitar*, *inclinar la botella* y *anotar el color de la bola que se ve*. Al final, hemos obtenido estos resultados:

$$f(●) = 461 \qquad f(●) = 343 \qquad f(●) = 196$$

Vamos a estimar el número n de bolas negras:

$$f_r(●) = \frac{461}{1\,000} = 0{,}461 \;\text{ y }\; P[●] = \frac{n}{20}$$

Como $f_r(●) \approx P[●]$, hacemos:

$$0{,}461 \approx \frac{n}{20} \;\rightarrow\; n \approx 20 \cdot 0{,}461 = 9{,}22$$

Estimamos que el número de bolas negras es 9. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la botella?

Procedemos de forma análoga al caso de la bola negra:

$f_r[\text{ROJA}] = \dfrac{343}{1\,000} = 0{,}343$ y $P[\text{ROJA}] = \dfrac{r}{20}$

Como $f_r[\text{ROJA}] \approx P[\text{ROJA}] \rightarrow 0{,}343 \approx \dfrac{r}{20} \rightarrow r \approx 0{,}343 \cdot 20 = 6{,}86$

Estimamos que el número de bolas rojas es 7.

$f_r[\text{VERDE}] = \dfrac{196}{1\,000} = 0{,}196$ y $P[\text{VERDE}] = \dfrac{v}{20}$

$0{,}196 \approx \dfrac{v}{20} \rightarrow v \approx 0{,}196 \cdot 20 = 3{,}92$

Estimamos que el número de bolas verdes es 4.

9 negras + 7 rojas + 4 verdes = 20 bolas.

29. **En un cajón hay 20 calcetines, pero no sabemos de qué colores. Sacamos un calcetín, anotamos el color y lo devolvemos al cajón. Lo hacemos cien veces y obtenemos 42 veces un calcetín negro; 8 veces uno rojo, y 50 veces uno blanco.**

Estima cuántos calcetines hay de cada color.

$f_r[\text{NEGRO}] = \frac{42}{100} \approx P[\text{NEGRO}] = \frac{n}{20}$

$0{,}42 \approx \frac{n}{20} \to n \approx 20 \cdot 0{,}42 = 8{,}4$

$f_r[\text{ROJO}] = \frac{8}{100} \approx P[\text{ROJO}] = \frac{r}{20}$

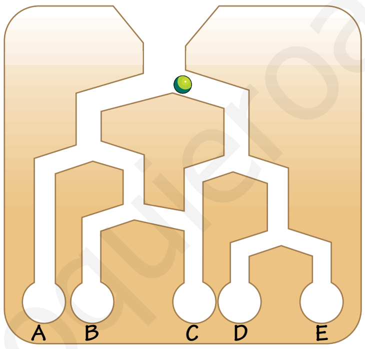
$0{,}08 \approx \frac{r}{20} \to r \approx 0{,}08 \cdot 20 = 1{,}6$

$f_r[\text{BLANCO}] = \frac{50}{100} \approx P[\text{BLANCO}] = \frac{b}{20}$

$0{,}5 \approx \frac{b}{20} \to b \approx 0{,}5 \cdot 20 = 10$

Estimamos que hay 8 calcetines negros, 2 calcetines rojos y 10 calcetines blancos.

30. **¿Cuál es la probabilidad de que una bola caiga en cada uno de los depósitos?**



$P[A] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P[C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$P[D] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P[E] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$