

Trigonometría y Complejos

Atención: Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos. Los resultados deben simplificarse.

- 1) Resolver un triángulo del que se conocen: $b = 4 \text{ m}$, $c = 3 \text{ m}$ y $A = 105^\circ$. (2 puntos)
- 2) Demostrar que $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ (2 puntos)
- 3) Resolver la ecuación: $3 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$ (2 puntos)
- 4) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre sí, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de α , sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -5/3$, $90^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$. Después, decir el valor de α con ayuda de la calculadora. (2 puntos)
- 5) Resolver en \mathbb{C} la ecuación $z^4 + 16 = 0$ (2 puntos)

www.yoquieroaprobar.com

SOLUCIONES

1) Resolver un triángulo del que se conocen: $b = 4 \text{ m}$, $c = 3 \text{ m}$ y $A = 105^\circ$.

Por el T. del coseno: $\boxed{a} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105^\circ} = \boxed{5,59 \text{ m}}$

Para hallar el ángulo B podemos emplear el T. de los senos, más fácil en cuanto a cálculos, teniendo en cuenta que, como ya tenemos un ángulo obtuso, de las dos soluciones posibles tomaremos únicamente la correspondiente a ángulo agudo:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \sin 105^\circ}{5,59} \Rightarrow \boxed{B = 43,76^\circ}$$

Por tanto, $\boxed{C} = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 105^\circ - 43,76^\circ = \boxed{31,24^\circ}$

2) Demostrar que $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{tg} x \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x (1 + \cos x) - \operatorname{sen} x = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

3) Resolver la ecuación: $3 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x &= 0 \Rightarrow 3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 - 3 \cos^2 x + \cos^2 x + \cos x &= 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + \cos x + 3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Se trata de una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\cos x$:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \\ \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \text{ imposible} \end{cases}$$

De donde las únicas soluciones son $\boxed{x = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}}$

4) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre sí, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de α , sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -5/3$, $90^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$. Después, decir el valor de α con ayuda de la calculadora.

Teniendo en cuenta el signo de la tangente, el ángulo debe ser del 2º cuadrante. Entonces:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{25}{9} = \frac{34}{9} \Rightarrow \boxed{\cos \alpha} = -\sqrt{\frac{9}{34}} = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{34}} = \boxed{-\frac{3}{\sqrt{34}}}$$

$$\text{Como } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = -\frac{5}{3} \left(-\frac{3}{\sqrt{34}} \right) = \boxed{\frac{5}{\sqrt{34}}}$$

$$\text{Por tanto, } \boxed{\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{3}{5}; \operatorname{sec} \alpha = -\frac{\sqrt{34}}{3}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{34}}{5}}$$

Con la calculadora, hallamos que $\boxed{\alpha = 120,96^\circ}$.

5) Resolver en \mathbb{C} la ecuación $z^4 + 16 = 0$

Despejando: $z^4 = -16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}}$, donde se ha escrito $-16 = -16 + 0i$, que estaba en binómica, en polares.

Por ello, hemos de hallar todas las raíces cuartas de dicho complejo.

Para empezar, el módulo de cada una de ellas será $\sqrt[4]{16} = 2$.

Y sus argumentos respectivos:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ}{4} + \frac{360^\circ}{4} \cdot 0 = 45^\circ$$

$$\alpha_2 = \frac{180^\circ}{4} + \frac{360^\circ}{4} \cdot 1 = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

$$\alpha_3 = \frac{180^\circ}{4} + \frac{360^\circ}{4} \cdot 2 = 45^\circ + 90^\circ \cdot 2 = 225^\circ$$

$$\alpha_4 = \frac{180^\circ}{4} + \frac{360^\circ}{4} \cdot 3 = 45^\circ + 90^\circ \cdot 3 = 315^\circ$$

Por lo que las cuatro soluciones son:

$$z_1 = 2_{45^\circ}; \quad z_2 = 2_{135^\circ}; \quad z_3 = 2_{225^\circ}; \quad z_4 = 2_{315^\circ}$$

