Trigonometría

Atención: *Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos. Los resultados deben simplificarse.*

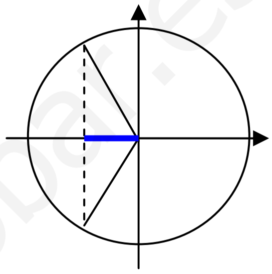
1) Sabiendo que $\alpha > 180º$ y que $\cos \alpha = -1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.
2) Resolver un triángulo del que conocemos: $a = 10m$; $b = 7m$; $B = 30º$, hallando todas las soluciones posibles.
3) Sin usar la calculadora, hallar el valor de: a) cos 5910º; b) sen (–4350º)
4) Demostrar la siguiente identidad: $\dfrac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha} = 1$
5) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60º. Alejándose 40 *m* en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30º. Averiguar la altura de la elevación.

SOLUCIONES

1) Sabiendo que α > 180º y que cos α = –1/3, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

Si α > 180º y $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \alpha$ está en el tercer cuadrante. Pues bien:
Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (-1/3)^2 = 1 - 1/9 = 8/9 \Rightarrow$
$\text{sen}\,\alpha = -\sqrt{8/9} = -\sqrt{8}/3 = -2\sqrt{2}/3$, negativo por ser del tercer cuadrante.

Por tanto, como $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-\frac{\sqrt{8}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$



Las otras razones son: $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{1}{-\frac{\sqrt{8}}{3}} = -\dfrac{3}{\sqrt{8}}$;

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$; $\quad \text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Por último, como $\cos\alpha = -1/3$, con la calculadora obtenemos que: $\alpha = 109{,}47º$. Trasladándolo al tercer cuadrante: $180º - 109{,}47º = 70{,}53º \Rightarrow \alpha = 180º + 70{,}53º = 250{,}53º =$ 250º 31’ 44” (Ver figura).

2) Resolver un triángulo del que conocemos: a = 10*m*; b = 7*m*; B = 30º, hallando todas las soluciones posibles.

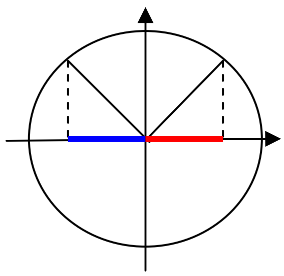
Como conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, usamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} \Rightarrow \text{sen}\,A = \frac{a\,\text{sen}\,B}{b} = \frac{10\,\text{sen}\,30}{7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = 45{,}58º$ ó $A = 180º - 45{,}58º = 134{,}41º$ (dos soluciones válidas).

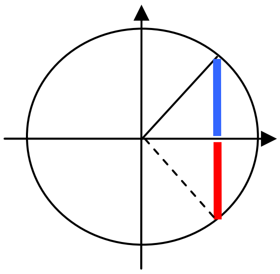
- Si $A = 45{,}58º \Rightarrow C = 180º - 45{,}58º - 30º = 104{,}42º$. Y además:
  $$\frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \Rightarrow c = \frac{b\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,B} = \frac{7\,\text{sen}\,104{,}42º}{\text{sen}\,30º} = 13{,}56\ m$$
- Si $A = 134{,}41º \Rightarrow C = 180º - 134{,}41º - 30º = 15{,}58º$. De modo que:
  $$\frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \Rightarrow c = \frac{b\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,B} = \frac{7\,\text{sen}\,15{,}58º}{\text{sen}\,30º} = 3{,}76\ m$$

3) Sin usar la calculadora, hallar el valor de: a) cos 5910º; b) sen (–4350º).



Dividiendo 5910 entre 360 se obtiene 16 de cociente y 150 de resto. Es decir: $5910º = 360º \cdot 16 + 150º$. Luego 5910º coincide, sobre la circunferencia, con 150º, después de dar 16 vueltas. Por tanto, cos 5910º = cos 150º.
Además $\cos 150º = -\cos(180 - 150º) = -\cos 30º = -\sqrt{3}/2$

De la misma forma, $4350 = 360 \cdot 12 + 30º \Rightarrow -4350º$ coincide con –30º, después de 12 vueltas en sentido negativo. Y



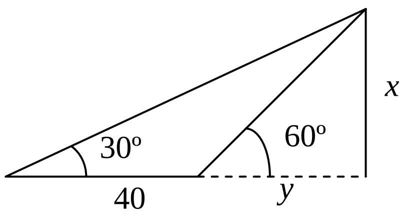
además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante: sen(–4350º) = sen(–30º) = –sen(30º) = $-\dfrac{1}{2}$.

4) Demostrar la siguiente identidad: $\dfrac{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha-\text{sen}^4\alpha}=1$.

$$\frac{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha-\text{sen}^4\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}{(\cos^2\alpha)^2-(\text{sen}^2\alpha)^2}=\frac{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}{(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}=\frac{1}{1}=1$$

5) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60º. Alejándose 40 *m* en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30º. Averiguar la altura de la elevación.



En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y, deducimos:

$$\text{tg } 60^\circ=\frac{x}{y}\quad\Rightarrow\quad x=y\text{ tg }60^\circ\qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x y 20+y, se tiene:

$$\text{tg } 30^\circ=\frac{x}{40+y}\quad\Rightarrow\quad x=(40+y)\text{ tg }30^\circ$$

Igualando:

y tg 60º = (40 + y) tg 30º = 40 tg 30º + y tg 30º $\Rightarrow$ y tg 60º – y tg 30º = 40 tg 30º $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad y(\text{tg } 60^\circ-\text{tg } 30^\circ)=40\text{ tg }30^\circ\quad\Rightarrow\quad y=\frac{40\text{ tg }30^\circ}{\text{tg }60^\circ-\text{tg }30^\circ}=20$$

Sustituyendo en (1): x = 20 tg 60º = 34,64 *m*