

1º) Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \frac{5x}{x^2+3} dx$

b) $\int (1 + 5x)^3 dx$

c) $\int \left(\frac{x^2}{8} - \frac{1}{(3-2x)^2} \right) dx$

d) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}}$

Resolución

a) $\int \frac{5x}{x^2+3} dx = \frac{5}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{5}{2} \cdot L(x^2 + 3) + c$

b) $\int (1 + 5x)^3 dx = \frac{1}{5} \cdot \int (1 + 5x)^3 \cdot 5 dx = \frac{(1+5x)^4}{20} + c$

c) $\int \left(\frac{x^2}{8} - \frac{1}{(3-2x)^2} \right) dx = \int \frac{x^2}{8} dx - \int \frac{1}{(3-2x)^2} dx = \frac{1}{8} \cdot \int x^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \int (3 - 2x)^{-2} \cdot (-2) dx = \frac{x^3}{24} - \frac{1}{2 \cdot (3-2x)} + c$

d) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = \sqrt{x+3} + c$

2º) Calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x) = \frac{1+e^x}{e^x}$ que cumple $F(0) = 1$

Resolución

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{e^x} dx = \int \frac{1}{e^x} dx + \int dx = -\int -e^{-x} dx + \int dx = -\frac{1}{e^x} + x + c$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 2$$

La primitiva es $F(x) = -\frac{1}{e^x} + x + 2$

3º) Calcula el área de la región del plano limitada por la función $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, el eje Ox y la recta $x = -1$.

Resolución

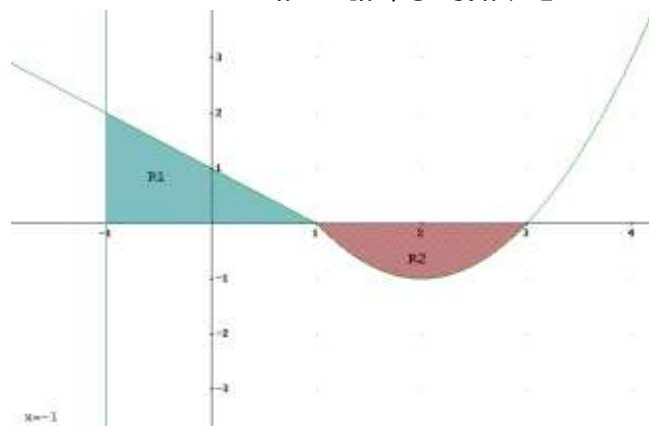
$$\text{Área} = A(R_1) + A(R_2)$$

$$A(R_1) = \int_{-1}^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 2u^2$$

$$A(R_2) = \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| =$$

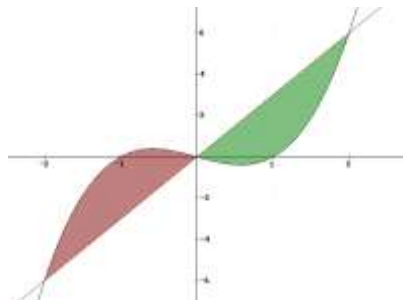
$$= \left| 9 - 18 + 9 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) \right| = \frac{4}{3}u^2$$

$$\text{Área} = A(R_1) + A(R_2) = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}u^2$$



4º) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = 3x$

Resolución



$$\text{Cortes de las funciones: } x^3 - x = 3x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Por simetría:

$$\text{Área} = 2 \cdot \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = 2 \cdot (-4 + 8) = 8u^2$$