Página 81

Resuelve

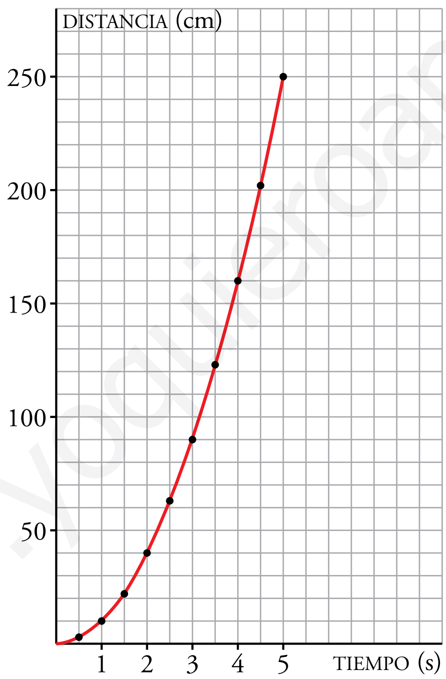
1. **Se deja caer una bola por un raíl levemente inclinado y se mide la distancia que recorre en distintos tiempos:**

TIEMPO EN s (t)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
DISTANCIA EN cm (e)	0	2,5	10	22	40	63	90	123	160	202	250

a) Representa, en tu cuaderno, los datos anteriores sobre una cuadrícula como la que tienes a la derecha. Úsalos para obtener la curva correspondiente.

b) Comprueba que los valores obtenidos responden (con muy buena aproximación) a la siguiente relación:

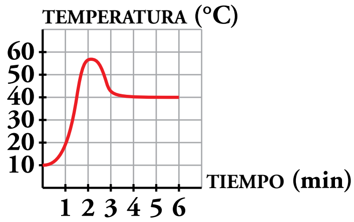
$$e = 10t^2$$



1 Conceptos básicos

Página 82

1. Esta gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo que se mantiene un rato abierto.



a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?

a) Variable independiente → tiempo (min)

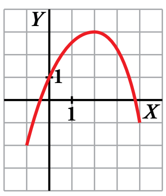
Variable dependiente → temperatura (°C)

b) Para cada valor del tiempo hay un único valor de temperatura.

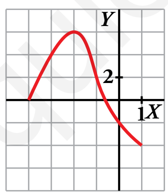
c) Dominio = [0, 6] Recorrido = [10, 58]

2. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones:

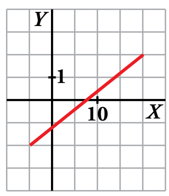
a)



b)



c)



a) *Dom f* = [–1, 4]

Rec f = [–2, 3]

b) *Dom f* = [–4, 1]

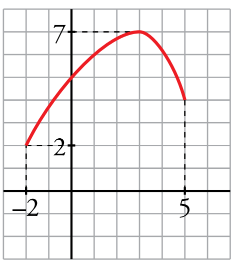
Rec f = [–4, 6]

c) *Dom f* = [–5, 20]

Rec f = [–2, 2]

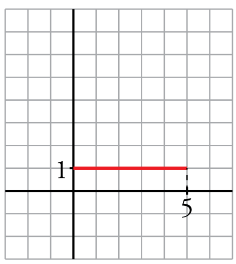
3. Representa una función cuyos dominio y recorrido sean, respectivamente, [–2, 5] y [2, 7]. Inventa otra con dominio [0, 5] y recorrido {1}.

Ejercicio de respuesta abierta. Una posible solución sería:



Dom f = [–2, 5]

Rec f = [2, 7]



Dom f = [0, 5]

Rec f = {1}

2 Cómo se presentan las funciones

Página 83

1. Vamos a analizar la gráfica de arriba correspondiente al precio de la vivienda:

a) ¿Qué quiere decir que la gráfica arranque en el 100 %? ¿Te parece razonable?

b) El máximo fue del 115 %. ¿En qué momento ocurrió? Contesta aproximadamente.

c) ¿Cuál fue el mínimo? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿Cuál fue el índice del precio en el 2006?

a) La gráfica describe la variación (en %) del precio de la vivienda en una región desde 1992 hasta 2016.

Que comience en 100 % significa que se toma como precio de referencia para analizar dicha variación el precio de la vivienda en 1992; lo cual es razonable ya que en ese año comienza el estudio.

b) En el año 2005.

c) El mínimo fue del 87 % aproximadamente. Sucedió en 2013.

d) 110 %, es decir, en el año 2006 el precio de la vivienda había aumentado un 10 % respecto al año 1992.

2. Fíjate en las funciones *altura sobre el nivel del mar - tiempo transcurrido* que se han descrito más arriba referentes a las excursiones realizadas por Félix y María.

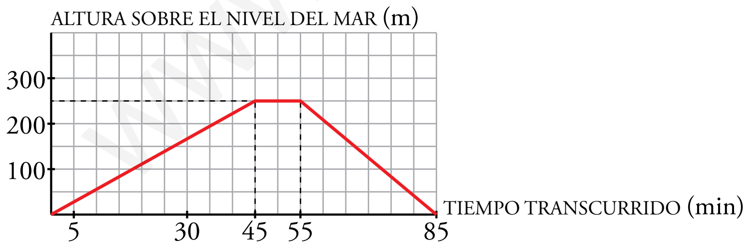
a) Representa la gráfica correspondiente a Félix.

b) Representa la gráfica correspondiente a María.

c) Si compararas las dos gráficas anteriores con las de tus compañeros, ¿cuáles serían más parecidas, las de Félix o las de María? Explica por qué.

a) Respuesta abierta (la información proporcionada en el enunciado hace que existan diferentes respuestas a esta pregunta).

b)



c) Las de María, porque tenemos datos (situación de la casa respecto al nivel del mar, tiempo que tarda en ascender la colina, altura de esta respecto al nivel del mar…) que permiten representar la gráfica con mayor precisión. En el caso de Félix, al no disponer de dicha información, existen diferentes posibilidades para representar el enunciado en una gráfica.

Página 84

3. Halla la cuota íntegra que corresponde a cada una de las siguientes bases liquidables:

a) 12 000 € **b) 25 000 €**

c) 50 000 € **d) 100 000 €**

a) Nos situamos en la 1.ª fila. Por los primeros 10 000 € no hay que pagar nada. Por los 2 000 € restantes hay que pagar el 15 %, que son 0,15 · 2 000 = 300 €. Por tanto, habrá que pagar 300 €.

b) Nos situamos en la 2.ª fila. Por los primeros 20 000 € hay que pagar 1 500 €. Por los restantes 5 000 € hay que pagar el 25 %, que son 0,25 · 5 000 = 1 250 €. Por tanto, habrá que pagar 1 500 € + 1 250 € = 2 750 €.

c) La cuota correspondiente a esta cantidad se encuentra directamente, sin cálculos, en la última fila → 11 000 €.

d) Nos situamos en la última fila. Por los primeros 50 000 € hay que pagar 11 000 €. Por los 50 000 € restantes, hay que pagar el 45 %, es decir, 0,45 · 50 000 = 22 500 €. Por tanto, hay que pagar en total 11 000 € + 22 500 € = 33 500 €.

4. La segunda columna de la tabla de arriba se puede obtener a partir del resto de los datos que hay en ella.

Explica cómo.

BASE LIQUIDABLE (€)	CUOTA ÍNTEGRA	RESTO BASE LIQUIDABLE (€)	TIPO APLICABLE (%)
10 000	0	hasta 10 000	15
20 000	0 + 15 % de 10 000 = 1 500	hasta 10 000	25
30 000	1 500 + 25 % de 10 000 = 4 000	hasta 20 000	35
50 000	4 000 + 35 % de 20 000 = 11 000	en adelante	45

Página 85

5. En el EJEMPLO 1, calcula la distancia que recorre la bola en 1, 2, 3, 4 y 5 segundos. ¿A qué tiempo corresponde una distancia de 2 m?

$t = 1 \text{ s} \rightarrow e = 0{,}1 \cdot 1^2 = 0{,}1 \text{ m}$ $t = 2 \text{ s} \rightarrow e = 0{,}1 \cdot 2^2 = 0{,}4 \text{ m}$

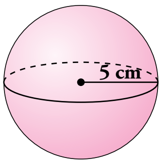
$t = 3 \text{ s} \rightarrow e = 0{,}1 \cdot 3^2 = 0{,}9 \text{ m}$ $t = 4 \text{ s} \rightarrow e = 0{,}1 \cdot 4^2 = 1{,}6 \text{ m}$

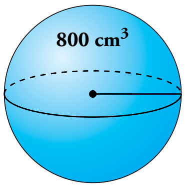
$t = 5 \text{ s} \rightarrow e = 0{,}1 \cdot 5^2 = 2{,}5 \text{ m}$

Calculamos en qué tiempo se recorren 2 m:

$2 = 0{,}1 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{20} \approx 4{,}47 \text{ s}$

6. En el EJEMPLO 2, halla el volumen de una esfera de radio 5 cm y el radio de una esfera de volumen 800 cm³.





$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3 \approx 523{,}6 \text{ cm}^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2\,400}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}} \text{ cm} \approx 5{,}76 \text{ cm}$$

7. Halla (EJEMPLO 3) el periodo de un péndulo de 1 m de largo. ¿Cuál es la longitud de un péndulo cuyo periodo es de 6 segundos?

$l = 1$ metro $\rightarrow T = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$ segundos

$T = 6$ segundos $\rightarrow 6 = \sqrt{4l} \rightarrow 36 = 4l \rightarrow l = 9$ metros

8. Calcula el tamaño aparente, A, de un objeto (EJEMPLO 4) para los siguientes valores de d:

0; 0,5; 1; 1,5; 1,9; 1,99

Para $d = 4$ se obtiene $A = -1$. Eso significa que el objeto se ve del mismo tamaño, pero invertido. Interpreta los valores de A para d:

10; 5; 2,5; 2,1; 2,01

$d = 0 \rightarrow A = 1$ $d = 0{,}5 \rightarrow A = 4/3$

$d = 1 \rightarrow A = 2$ $d = 1{,}5 \rightarrow A = 4$

$d = 1{,}9 \rightarrow A = 20$ $d = 1{,}99 \rightarrow A = 200$

$d = 10 \rightarrow A = -1/4$. El objeto se ve a 1/4 de su tamaño, e invertido.

$d = 5 \rightarrow A = -2/3$. El objeto se ve a 2/3 de su tamaño, e invertido.

$d = 2{,}5 \rightarrow A = -4$. El objeto se ve a 4 veces su tamaño, e invertido.

$d = 2{,}1 \rightarrow A = -20$. El objeto se ve a 20 veces su tamaño, e invertido.

$d = 2{,}01 \rightarrow A = -200$. El objeto se ve a 200 veces su tamaño, e invertido.

3 Dominio de definición

Página 86

1. Halla el dominio de definición de:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 8}$

b) $y = \sqrt{x - 5}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 5}}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$

a) $x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

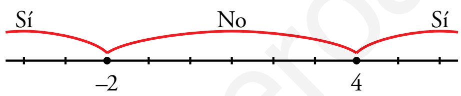
$Dom\, f = \mathbb{R} - \{x \,/\, x^2 + 2x - 8 = 0\} = \mathbb{R} - \{-4, 2\}$

b) $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 5 \geq 0\} = [5, +\infty)$

c) $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 5 > 0\} = (5, +\infty)$

d) Tenemos que resolver la inecuación $x^2 - 2x - 8 > 0$.

Las raíces de $x - 2x - 8$ son $x = 4$, $x = -2$.



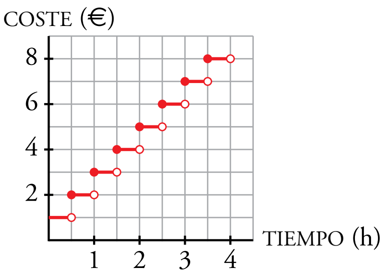
Solución: $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2x - 8 > 0\} = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

4 Funciones continuas. Discontinuidades

Página 87

1. Construye una función similar a la ①, pero para el caso de que se pague 1 € cada media hora. ¿Cuál de las opciones de pago te parece más justa?



Esta opción de pago es más justa que la del ejemplo.

2. Analiza la función ③ para valores "próximos a 2". Comprueba que cuando *x* vale 1,9; 1,99; 1,999; 2,01; 2,001, la *y* toma valores "muy grandes".

$$x = 1{,}9 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(1{,}9 - 2)^2} = 100$$

$$x = 1{,}99 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(1{,}99 - 2)^2} = 10^4$$

$$x = 1{,}999 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(1{,}999 - 2)^2} = 10^6$$

$$x = 2{,}01 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(2{,}01 - 2)^2} = 10^4$$

$$x = 2{,}001 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(2{,}001 - 2)^2} = 10^6$$

5 Crecimiento, máximos y mínimos

Página 88

1. Observa la función de la derecha y responde:

a) ¿En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente?

b) ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

a) Crece en (–5, –3) ∪ (5, +∞).

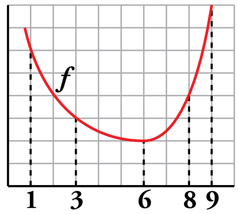
Decrece en (–∞, –5) ∪ (–3, 5).

b) Máximo relativo en el punto (–3, 5).

Mínimos relativos en los puntos (–5, 3) y (5, –2).

Página 89

2. Halla la tasa de variación media (T.V.M.) de la función f representada, en los intervalos [1, 3], [3, 6], [6, 8], [8, 9] y [3, 9].



T.V.M. $[1, 3] = \frac{3-6}{3-1} = \frac{-3}{2}$

T.V.M. $[3, 6] = \frac{2-3}{6-3} = -\frac{1}{3}$

T.V.M. $[6, 8] = \frac{4-2}{8-6} = 1$

T.V.M. $[8, 9] = \frac{8-4}{9-8} = 4$

T.V.M. $[3, 9] = \frac{8-3}{9-3} = \frac{5}{6}$

3. Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 4x + 5$ (PROBLEMA RESUELTO 2) en [0, 2], [1, 3] y [1, 4].

T.V.M. $[0, 2] = \frac{1-5}{2} = -2$

T.V.M. $[1, 3] = \frac{2-2}{3-1} = 0$

T.V.M. $[1, 4] = \frac{5-2}{4-1} = 1$

4. Halla la velocidad media de la piedra del PROBLEMA RESUELTO 3 en los intervalos [0, 1], [0, 3], [3, 4] y [4, 8].

T.V.M. $[0, 1] = \frac{35-0}{1-0} = 35$

T.V.M. $[0, 3] = \frac{75-0}{3-0} = 25$

T.V.M. $[3, 4] = \frac{80-75}{4-3} = 5$

T.V.M. $[4, 8] = \frac{0-80}{8-4} = -20$

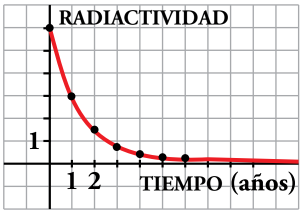
Los resultados están expresados en m/s.

6 Tendencia y periodicidad

Página 91

1. La cantidad de radiactividad que posee una sustancia se reduce a la mitad cada año. La gráfica adjunta describe la cantidad de radiactividad que hay en una porción de esa sustancia al transcurrir el tiempo.

¿A cuánto *tiende* la radiactividad con el paso del tiempo?



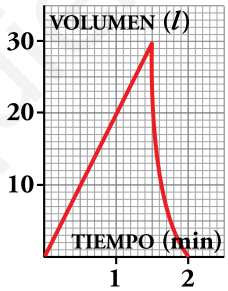
La radiactividad, con el paso del tiempo, tiende a cero.

2. La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía, automáticamente, cada dos minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica adjunta.

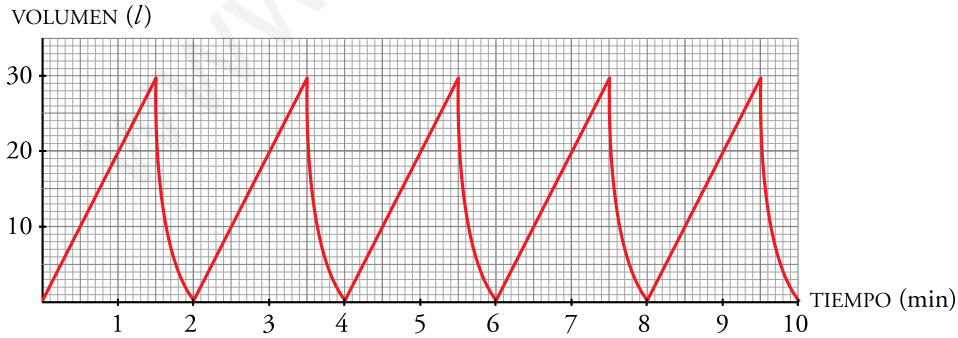
a) Dibuja la gráfica correspondiente a 10 min.

b) ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en los siguientes instantes?

I) 17 min **II) 40 min 30 s** **III) 1 h 9 min 30 s**



a)



b) I) $f(17) = f(1) = 20$ litros

II) $f(40 \text{ min } 30 \text{ s}) = f(30 \text{ s}) = 10$ litros

III) $f(1 \text{ h } 9 \text{ min } 30 \text{ s}) = f(1 \text{ min } 30 \text{ s}) = 30$ litros

Página 92

Hazlo tú. Calcula el dominio de definición de la siguiente función:

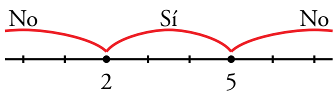
$$y = \sqrt{-2x^2 + 14x - 20}$$

$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2x^2 + 14x - 20 \geq 0\}$

Tenemos que resolver la inecuación $-2x^2 + 14x - 20 \geq 0 \xrightarrow[:(-2)]{\text{Simplificando}} x^2 - 7x + 10 \leq 0$

Las raíces del polinomio $x^2 - 7x + 10$ son:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$



Solución: $x \in [2, 5]$

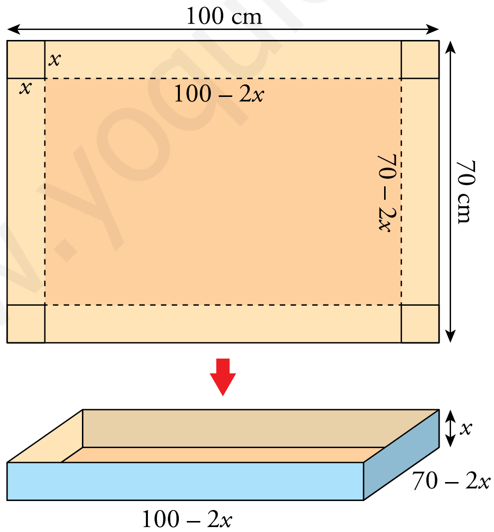
Por tanto, $Dom\ f = [2, 5]$.

Hazlo tú. Repite esta actividad para una cartulina de 1 m × 70 cm.

a) Si cortamos un cuadrado de lado x en cada esquina, obtenemos una caja de altura x y cuya base es un rectángulo de dimensiones $(100 - 2x)$ de largo y $(70 - 2x)$ de ancho.

Por tanto, el volumen de la caja en función de x es:

$$V(x) = (100 - 2x) \cdot (70 - 2x) \cdot x \to V(x) = 4x^3 - 340x^2 + 7\,000x$$

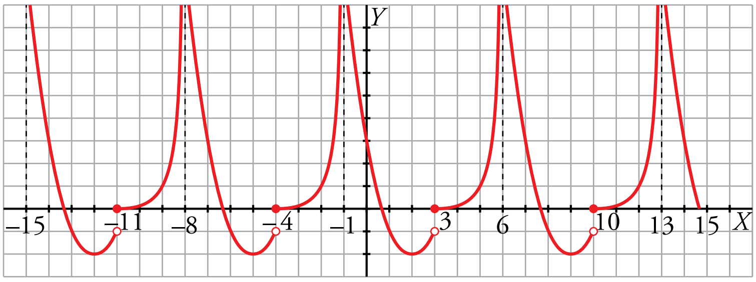


b) Para que haya caja se debe verificar:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 100 - 2x > 0 \to x < 50 \\ 70 - 2x > 0 \to x < 35 \end{array}\right\} \to 0 < x < 35 \to Dom\ V = (0, 35)$$

Página 93

Hazlo tú. Representa la función en el intervalo [–15, 15]. ¿Es creciente o decreciente en el intervalo [–24, –23]? ¿Qué ramas infinitas tiene en el intervalo [40, 49]?



- Por ser periódica de periodo 7, en el intervalo [–24, –23] ocurre lo mismo que en el intervalo [–3, –2] (se trata de un intervalo igual pero trasladado tres periodos, es decir $3 \cdot 7 = 21$ unidades, a la derecha). La función en ese intervalo es creciente.
- La función presenta asíntotas verticales en las rectas $x = -1 + 7n,\ n \in \mathbb{Z}$.

  Por tanto, las asíntotas verticales de la función en el intervalo [40, 49] son:

  $n = 6 \rightarrow x = 41$

  $n = 7 \rightarrow x = 48$

Hazlo tú. Halla la velocidad media en la primera hora, en las dos primeras horas, en las tres primeras horas… y así sucesivamente.

Velocidad media en la primera hora = T.V.M. [0, 1] = $\frac{125-0}{1-0} = 125$ km/h

Velocidad media en las dos primeras horas = T.V.M. [0, 2] = $\frac{175-0}{2-0} = 87{,}5$ km/h

Velocidad media en las tres primeras horas = T.V.M. [0, 3] = $\frac{275-0}{3-0} = 91{,}67$ km/h

Velocidad media en las cuatro primeras horas = T.V.M. [0, 4] = $\frac{350-0}{4-0} = 87{,}5$ km/h

Velocidad media en las cinco primeras horas = T.V.M. [0, 5] = $\frac{400-0}{5-0} = 80$ km/h

Velocidad media en las seis primeras horas = T.V.M. [0, 6] = $\frac{400-0}{6-0} = 66{,}67$ km/h

Velocidad media en las siete primeras horas = T.V.M. [0, 7] = $\frac{475-0}{7-0} = 67{,}86$ km/h

Velocidad media en las ocho primeras horas = T.V.M. [0, 8] = $\frac{600-0}{8-0} = 75$ km/h

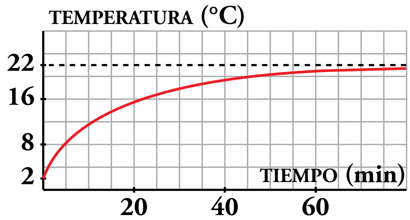
Ejercicios y problemas

Página 94

Practica

Interpretación de gráficas

1. **Hemos sacado de la nevera un vaso con agua. Esta gráfica muestra la temperatura del agua (en grados centígrados) al pasar el tiempo:**

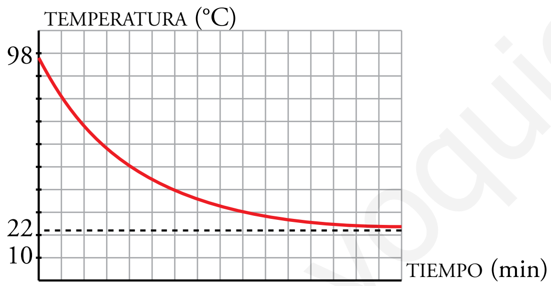


a) ¿Qué temperatura hay dentro de la nevera? ¿Y fuera?

b) Sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C. Dibuja una gráfica que muestre la temperatura del agua al pasar el tiempo.

a) Dentro de la nevera hay 2 °C y fuera 22 °C.

b)

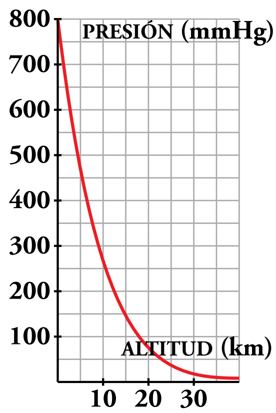


2. **La presión atmosférica a nivel del mar es, por término medio, de 760 mm de mercurio (mmHg).**

En la gráfica se aprecia cómo varía al aumentar la altura.

a) ¿A cuánto tiende la presión cuando la altura aumenta?

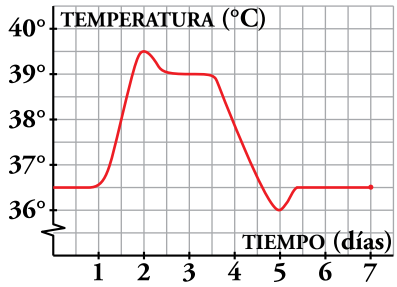
b) ¿Qué presión sufre el exterior de un avión que vuela a 10 km de altura?



a) Cuando aumenta la altura la presión tiende a 0 mmHg.

b) 260 mmHg aproximadamente.

3. **Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo:**



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo? ¿Qué temperaturas alcanza?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

a) 7 días.

b) El enfermo alcanzó la temperatura máxima el 2.º día y fue 39,5 °C.

El enfermo alcanzó la temperatura mínima el 5.º día y fue 36 °C.

c) La temperatura crece si $x \in (1, 2) \cup (5; 5{,}3)$ aproximadamente.

La temperatura decrece si $x \in (2; 2{,}5) \cup (3{,}5; 5)$ aproximadamente.

Enunciados, fórmulas y tablas

4. **Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha medido cada 5 min las distancias recorridas y ha obtenido estos datos:**

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

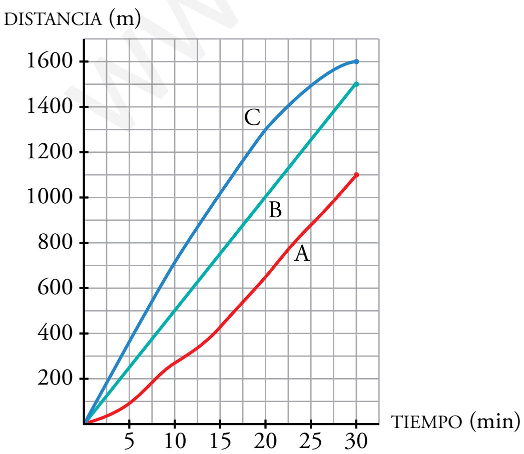
a) En unos mismo ejes, dibuja la gráfica *distancia-tiempo* de los tres nadadores. Descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento?

c) Calcula la velocidad media de cada uno.

d) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada función?

a)



b) No ha habido ningún adelantamiento.

c) $V_m\ (A) = \dfrac{1100}{30} = 36{,}67$ m/min

$V_m\ (B) = \dfrac{1500}{30} = 50$ m/min

$V_m\ (C) = \dfrac{1600}{30} = 53{,}3$ m/min

d) *Dom* A = *Dom* B = *Dom* C = [0, 30]

Rec A = [0, 1 100]; *Rec* B = [0, 1 500];

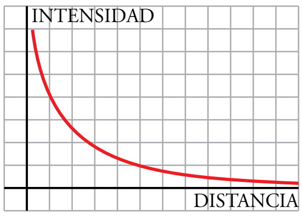
Rec C = [0, 1 600]

5. **La intensidad del sonido de un foco sonoro es menor a medida que nos alejamos de él y, además, decrece cada vez más despacio.**

a) Representa la intensidad del sonido en función de la distancia al foco sonoro.

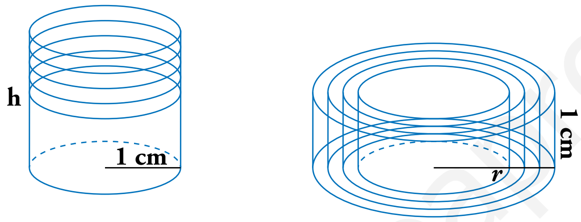
b) ¿Cuál es la tendencia?

a) Una posible gráfica es:



b) La tendencia de la función es cero: la intensidad del sonido es prácticamente nula a medida que nos alejamos del foco.

6. **El volumen, en cm^3, de un cilindro cuya base tiene 1 cm de radio en función de su altura, h, dada en cm, es $V = \pi h$. Por otro lado, el volumen de un cilindro cuya altura es 1 cm en función del radio, r, en cm, de su base es $V = \pi r^2$.**



a) Calcula el volumen de un cilindro de 1 cm de radio para alturas de 1, 2, 3, 4 y 5 cm. Representa la función.

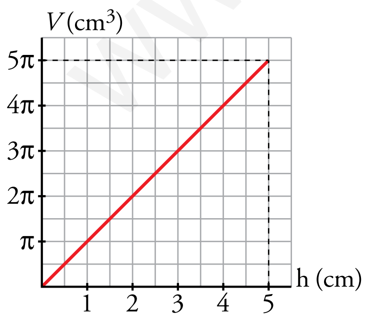
b) Halla el volumen de un cilindro de 1 cm de altura para radios de 1, 2, 3, 4 y 5 cm. Representa la función.

c) ¿Qué altura tiene un cilindro de 1 cm de radio cuyo volumen es 37,68 cm^3?

d) ¿Qué radio tiene un cilindro de 1 cm de altura cuyo volumen es 803,84 cm^3?

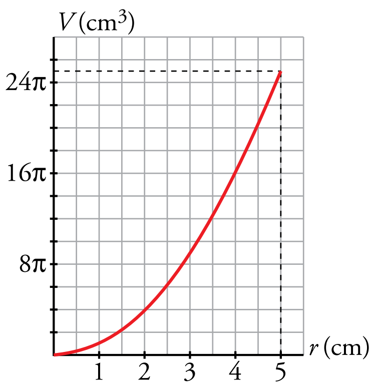
a) $V(\text{h}) = \pi\text{h}$

h	1	2	3	4	5
V	π	2π	3π	4π	5π



b) $V(r) = \pi r^2$

r	1	2	3	4	5
V	π	4π	9π	16π	25π



c) $37{,}68 = \pi\text{h} \rightarrow \text{h} = \dfrac{37{,}68}{\pi} = 12$ cm

d) $803{,}84 = \pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{\dfrac{803{,}84}{3{,}14}} = \sqrt{256} = 16$ cm

Página 95

Dominio de definición

7. **Halla el dominio de definición en cada caso:**

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{-3x}{2x+10}$ **c)** $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

d) $y = \dfrac{2}{-x}$ **e)** $y = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2-x}$

g) $y = \sqrt{x+7}$ **h)** $y = \sqrt{1-x}$ **i)** $y = \sqrt{3x-9}$

j) $y = \sqrt{-x}$ **k)** $y = \sqrt[3]{3x-4}$ **l)** $y = 1 - 5\sqrt{2x+2}$

a) $x - 3 \neq 0 \;\to\; x \neq 3$ $\qquad$ $Dom\ y = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $2x + 10 \neq 0 \;\to\; 2x \neq -10 \;\to\; x \neq -5$ $\qquad$ $Dom\ y = \mathbb{R} - \{-5\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor de x $\qquad$ $Dom\ y = \mathbb{R}$

d) $-x \neq 0 \;\to\; x \neq 0$ $\qquad$ $Dom\ y = \mathbb{R} - \{0\}$

e) $x^2 + x - 6 \neq 0 \;\to\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$ $\qquad$ $Dom\ y = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

f) $x^2 - x \neq 0 \;\to\; x(x-1) \neq 0 \;\to\; x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\qquad$ $Dom\ y = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

g) $x + 7 \geq 0 \;\to\; x \geq -7$ $\qquad$ $Dom\ y = [-7, +\infty)$

h) $1 - x \geq 0 \;\to\; x \leq 1$ $\qquad$ $Dom\ y = (-\infty, 1]$

i) $3x - 9 \geq 0 \;\to\; 3x \geq 9 \;\to\; x \geq 3$ $\qquad$ $Dom\ y = [3, +\infty)$

j) $-x \geq 0 \;\to\; x \leq 0$ $\qquad$ $Dom\ y = (-\infty, 0]$

k) $Dom\ y = \mathbb{R}$

l) $2x + 2 \geq 0 \;\to\; 2x \geq -2 \;\to\; x \geq -1$ $\qquad$ $Dom\ y = [-1, +\infty)$

8. **Halla en cada caso el dominio de definición:**

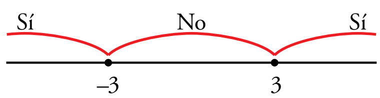
a) $y = \sqrt{x^2-9}$ **b)** $y = \sqrt{x^2+6x-7}$ **c)** $y = \sqrt{x^2}$

d) $y = \sqrt{-x^2}$ **e)** $y = \sqrt{4-x^2}$ **f)** $y = \sqrt{-x^2-x+2}$

a) $x^2 - 9 \geq 0$

$x^2 - 9 = 0 \;\to\; (x+3)(x-3) = 0$

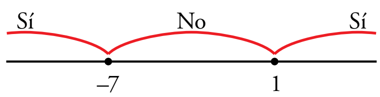
$Dom\ y = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$



b) $x^2 + 6x - 7 \geq 0$

$x^2 + 6x - 7 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \dfrac{-6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$

$Dom\ y = (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$



c) $x^2 \geq 0$ para cualquier valor de x.

$Dom\ y = \mathbb{R}$

d) $-x^2 < 0$ para cualquier valor de $x \neq 0$.

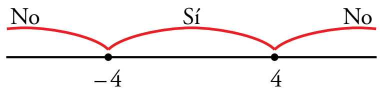
$\sqrt{-x^2}$ solo tiene sentido para $x = 0$.

$Dom\ y = \{0\}$

e) $4 - x^2 \geq 0$

$(2 - x)(2 + x) \geq 0$

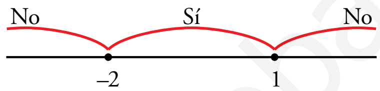
$Dom\ y = [-2, 2]$



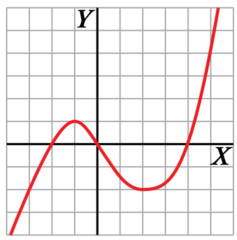
f) $-x^2 - x + 2 \geq 0$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$Dom\ y = [-2, 1]$



9. **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$. Corta al eje X en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 4$. Toma valores positivos en los intervalos $(-2, 0)$ y $(4, +\infty)$, y toma valores negativos en $(-\infty, -2)$ y $(0, 4)$.**

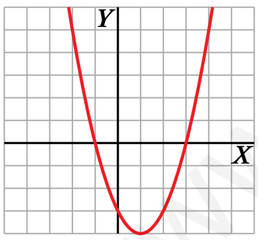


Teniendo esto en cuenta, podemos afirmar que:

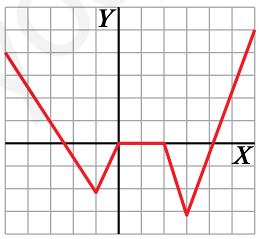
- **El dominio de definición de la función $y = \dfrac{1}{f(x)}$ es $\mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$.**
- **El dominio de definición de la función $y = \sqrt{f(x)}$ es $[-2, 0] \cup [4, +\infty)$.**

Razonando de forma similar, di el dominio de definición de $y = \dfrac{1}{f(x)}$ e $y = \sqrt{f(x)}$, para las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

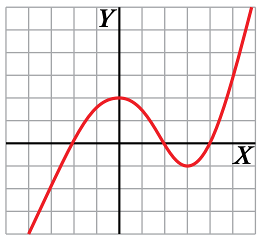
a)



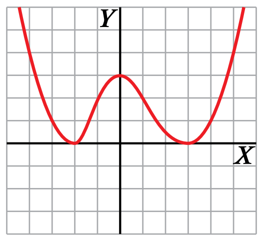
b)



c)



d)



a) $f(x) = 0$ si $x \in \{-1, 3\}$

$f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-1, 3)$

Por tanto:

$Dom\ \dfrac{1}{f(x)} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$Dom\ \sqrt{f(x)} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

b) $f(x) = 0$ si $x \in \{-2,5\} \cup [0, 2] \cup \{4,25\}$

$f(x) > 0$ si $x \in (-\infty; -2,5) \cup (4,25; +\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-2,5; 0) \cup (2; 4,25)$

Por tanto:

$Dom\ \dfrac{1}{f(x)} = (-\infty; -2,5) \cup (-2,5; 0) \cup$
$\cup\ (2; 4,25) \cup (4,25; +\infty)$

$Dom\ \sqrt{f(x)} = (-\infty; -2,5] \cup [0, 2] \cup [4,25; +\infty)$

c) $f(x) = 0$ si $x \in \{-2, 2, 4\}$

$f(x) > 0$ si $x \in (-2, 2) \cup (4, +\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -2) \cup (2, 4)$

Por tanto:

$$Dom\ \frac{1}{f(x)} = \mathbb{R} - \{-2, 2, 4\}$$

$$Dom\ \sqrt{f(x)} = [-2, 2] \cup [4, +\infty)$$

d) $f(x) = 0$ si $x \in \{-2,3\}$

$f(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

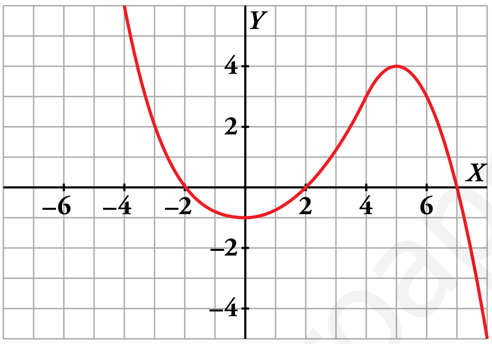
Por tanto:

$$Dom\ \frac{1}{f(x)} = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$

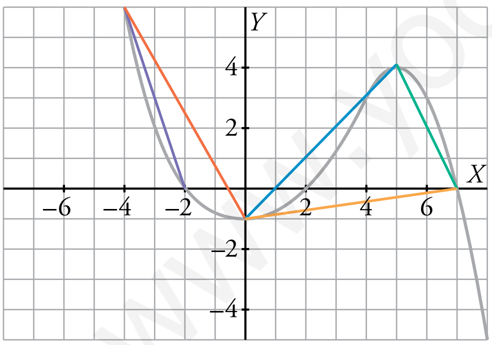
$$Dom\ \sqrt{f(x)} = \mathbb{R}$$

Características de una función

10. **Observa esta función y halla su T.V.M. en los intervalos [0, 4], [0, 5], [5, 7], [0, 7], [–4, 0] y [–4, –2].**



Copia en tu cuaderno la gráfica y dibuja en cada caso el segmento del cual estás hallando la pendiente.



$$\text{T.V.M. } [0, 4] = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [0, 5] = \frac{4+1}{5} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [5, 7] = \frac{0-4}{7-5} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [0, 7] = \frac{0+1}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, 0] = \frac{-1-6}{0+4} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \frac{0-6}{-2+4} = -3$$

11. **Halla la T.V.M. de $y = 3x^3 + 9x^2 - 3x - 9$ en los intervalos [–2, 0], [–1, 0], [–3, –1] y [0, 1].**

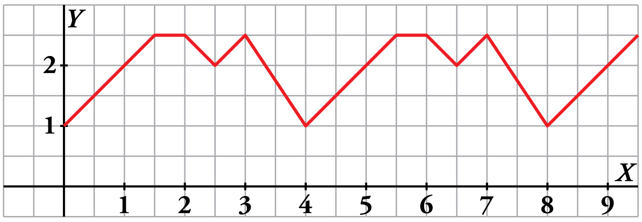
$$\text{T.V.M. } [-2, 0] = \frac{-9-9}{0+2} = -9$$

$$\text{T.V.M. } [-1, 0] = \frac{-9-0}{0+1} = -9$$

$$\text{T.V.M. } [-3, -1] = \frac{0-0}{-1+3} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [0, 1] = \frac{0+9}{1} = 9$$

12. **Explica por qué es periódica esta función:**

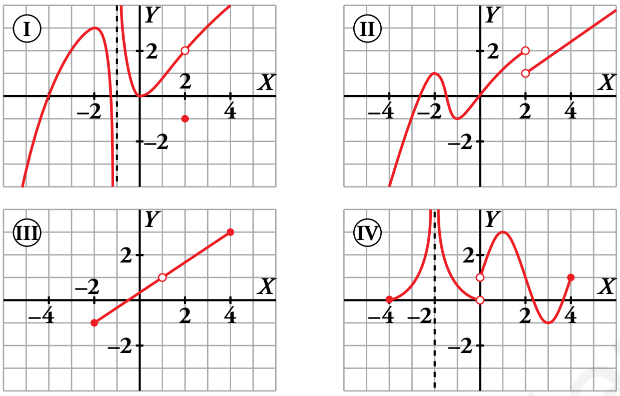


Da su periodo y los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

La función es periódica de periodo 4.

$f(1) = 2$; $f(3) = 2{,}5$; $f(20) = f(0) = 1$; $f(23) = f(3) = 2{,}5$; $f(42) = f(2) = 2{,}5$

13. **Observa estas gráficas discontinuas y contesta:**



a) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad? Explica la razón de discontinuidad en cada punto.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) Indica, si tiene, los máximos y los mínimos relativos.

d) ¿En qué intervalos es creciente? ¿Y decreciente?

a) (I) Discontinua en $x = -1$. Tiene ramas infinitas.
Discontinua en $x = 2$. Tiene un punto desplazado.

(II) Discontinua en $x = 2$. No está definida en este punto y, además, en él da un salto.

(III) Discontinua en $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$. No está definida.
Discontinua en $x = 1$ porque no está definida.

(IV) Discontinua en $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$. No está definida.
Discontinua en $x = -2$. Tiene ramas infinitas.
Discontinua en $x = 0$. No está definida y presenta un salto.

b) *Dom* (I) = $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ — *Dom* (II) = $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Dom (III) = $[-2, 1) \cup (1, 4]$ — *Dom* (IV) = $[-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 4]$

c) (I) Máximo relativo en $(-2, 3)$. Mínimo relativo en $(0, 0)$

(II) Máximo relativo en $(-2, 1)$. Mínimo relativo en $(-1, -1)$.

(III) No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

(IV) Máximo relativo en $(1, 3)$. Mínimo relativo en $(3, -1)$.

d) (I) Crece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

(II) Crece en $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1)$.

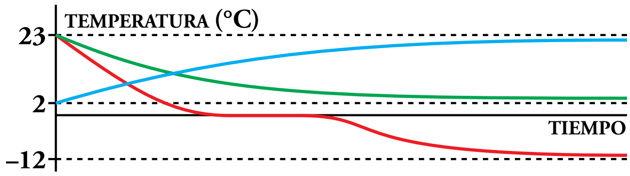
(III) Crece en $(-2, 1) \cup (1, 4)$. No decrece.

(IV) Crece en $(-4, -2) \cup (0, 1) \cup (3, 4)$. Decrece en $(-2, 0) \cup (1, 3)$.

Página 96

Resuelve problemas

14. **Observa las siguientes gráficas de funciones:**



a) Relaciona cada curva con estos enunciados sobre la temperatura de un vaso de agua:

I. Cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Cuando se saca de la nevera y se deja en la mesa.

III. Cuando pasa de la mesa al congelador.

b) ¿A qué temperatura está la casa? ¿Y el congelador? ¿Y la nevera?

a) I - verde. II - azul. III - roja.

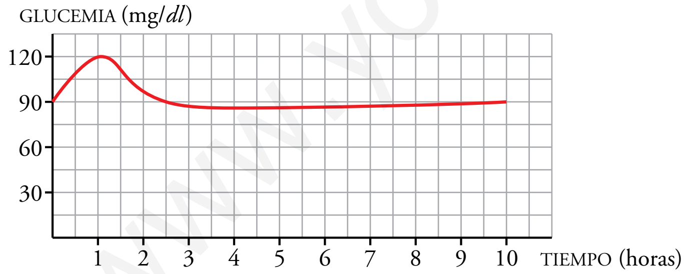
b) La casa está a 23 °C, el congelador a –12 °C y la nevera a 2 °C.

15. **Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. Luego, en las 3 h siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 h.**

a) Representa la curva de glucemia en el tramo desde que ingiere la glucosa hasta que vuelve a su nivel normal.

b) Indica en qué momentos alcanza su máximo y en cuáles su mínimo.

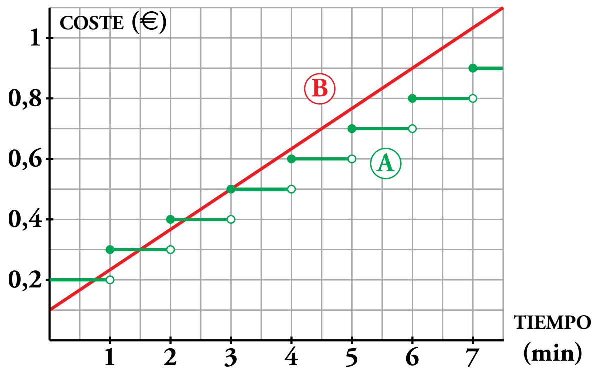
a)



b) El máximo es de 120 mg/*gl* al cabo de 1 h de iniciar la toma. El mínimo está ligeramente por debajo de 90 mg/*dl* y se alcanza a las 4 h de iniciar la toma.

La tendencia de la función es 90 mg/*dl* (tener la glucemia en un nivel normal).

16. **Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:**



a) Determina cuánto vale una llamada de 3 minutos con cada una de las dos compañías.

b) ¿Y una llamada de media hora?

c) Razona por qué elegirías una u otra compañía.

a) Una llamada de 3 min cuesta 0,50 € en cualquiera de las dos compañías.

b) La compañía A cobra 3,20 € por 30 minutos.

La compañía B cobra 0,10 € más 0,40 € por cada 3 min. Por tanto, por 30 min cobrará $0{,}1 + 0{,}40 \cdot 10 = 4{,}10$ €.

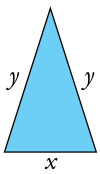
c) Si habitualmente hiciera llamadas cortas (de 3 min o menos), contrataría con B. Si hiciera llamadas largas con frecuencia, contrataría con la compañía A.

17. **Un triángulo isósceles tiene 20 cm de perímetro. Llama x al lado desigual e y a los lados iguales.**

a) Haz una tabla de valores y, a partir de ella, escribe la función que relaciona el valor de y con el de x.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

a)



x	2	4	6	8	10
y	9	8	7	6	5

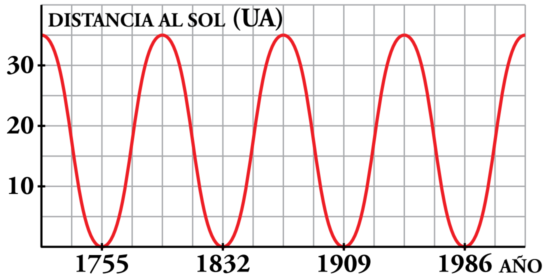
$$x + 2y = 20 \;\rightarrow\; 2y = 20 - x \;\rightarrow\; y = \frac{20 - x}{2}$$

b) Para que el triángulo exista:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 2y > x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 20 - x > x \end{array}\right\} \rightarrow \mathit{Dominio} = (0,\, 10)$$

Por tanto, observamos que el último par de valores de la tabla no se corresponde con un triángulo real.

18. **La órbita del cometa Halley es una elipse muy excéntrica, uno de cuyos focos es el Sol. Esta función relaciona la distancia del cometa al Sol con el tiempo:**



a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿En qué año volverá a acercarse al Sol?

a) Es una función periódica de periodo T = 1 832 – 1 755 = 77 años.

b) 1 986 + 77 = 2 063 → El año 2063

19. **La gráfica adjunta describe el valor de una empresa desde que se fundó.**

a) ¿Cuál era su valor en el momento de la apertura?

b) ¿A cuánto se redujo su valor después de 4 meses?

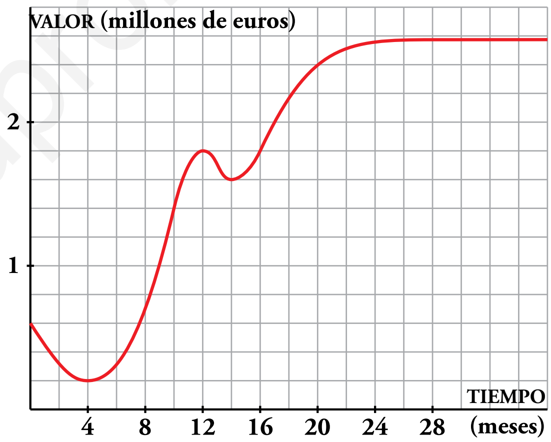
c) ¿Cuál es la T.V.M. en el intervalo [4, 12]? Da el resultado en miles de euros por mes.

d) ¿Cuál es la T.V.M. en [12, 14] y en [14, 20]?

e) Esta función tiene un máximo y dos mínimos relativos. Descríbelos.

f) ¿Cuál parece la tendencia de esta función para los próximos meses?

g) Haz una descripción global del valor de esta empresa en sus tres primeros años.



a) El valor de la empresa en el momento de la apertura era de 600 000 €.

b) Después de 4 meses su valor se redujo a 200 000 €.

c) T.V.M. [4, 12] = $\dfrac{1\,800\,000 - 200\,000}{12 - 4}$ = 200 000 €/mes

d) T.V.M. [12, 14] = $\dfrac{1\,600\,000 - 1\,800\,000}{14 - 12}$ = –100 000 €/mes

T.V.M. [14, 20] = $\dfrac{2\,400\,000 - 1\,600\,000}{20 - 14}$ = 133 333,33 €/mes

e) Máximo relativo en (12, 1 800 000)

Mínimos relativos en (4, 200 000) y (14, 1 600 000)

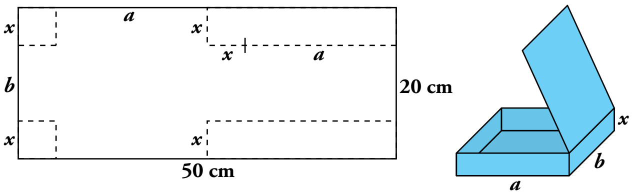
f) Parece que el valor de la empresa, para los próximos meses, tiende a 2 600 000 €.

g) El valor de la empresa tiene un brusco descenso en los cuatro primeros meses. A partir de aquí crece rápidamente durante 8 meses y tiene una ligera caída en los dos meses siguientes. A partir del mes 14.º crece rápidamente durante otros 6 meses y después cada vez más despacio. Su precio se aproxima a 2 600 000 €.

Página 97

Problemas "+"

20. **Con un rectángulo de cartulina de 50 cm × 20 cm, queremos fabricar una caja con tapadera.**



a) Obtén la expresión del volumen.

b) Dando valores a x, representa la gráfica de la función $V(x)$.

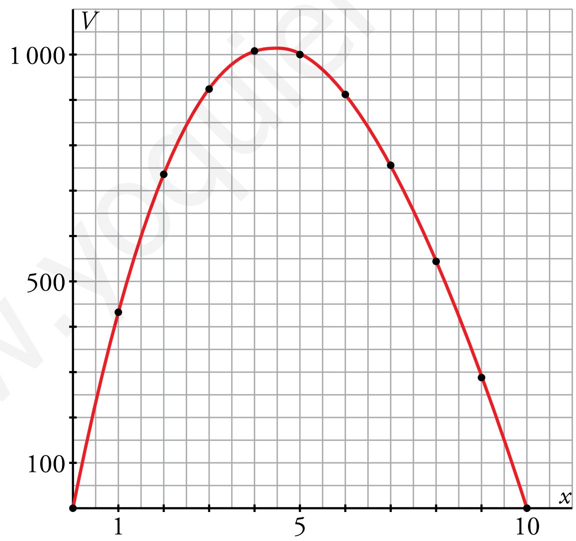
c) ¿Cuál es el dominio de $V(x)$?

a) $a = \dfrac{50 - 2x}{2} = 25 - x$; $b = 20 - 2x$

$V = (25 - x)(20 - 2x)x = 2x^3 - 70x^2 + 500x$

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	0	432	736	924	1 008	1 000	912	756	544	288	0

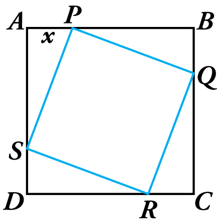


c) *Dom* $V = (0, 10)$, pues el volumen solo tiene sentido para valores positivos de x, a y b.

a es positivo si $0 < x < 25$.

b es positivo si $0 < x < 10$.

21. **Dibuja un cuadrado *ABCD* de 7 cm de lado. Sobre el lado *AB*, marca un punto *P* que diste *x* de *A*, y dibuja un nuevo cuadrado *PQRS* inscrito en el anterior.**



a) Observa que si $x = 3$ cm, entonces $\overline{AS} = 7 - 3 = 4$ cm. ¿Cuánto mide $\overline{PS}$? ¿Cuál es el área del nuevo cuadrado?

b) Construye la gráfica de la función que relaciona *x* con el área del cuadrado inscrito. Di su dominio.

a) $\overline{PS} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm. Área del cuadrilátero interior $= 5^2 = 25$ cm^2

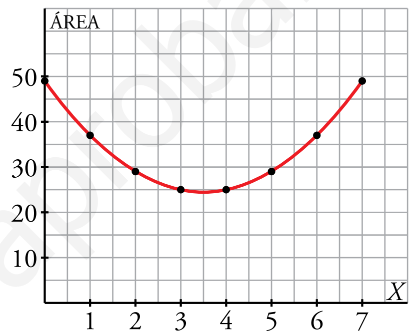
b) $A = \left(\sqrt{x^2 + (7 - x)^2}\right)^2 =$

$= x^2 + 49 + x^2 - 14x =$

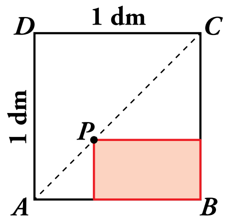
$= 2x^2 - 14x + 49$

El dominio es (0, 7).

x	ÁREA
0	49
1	37
2	29
3	25
4	25
5	29
6	37
7	49



22. **En un cuadrado *ABCD* de lado 1 dm dibuja la diagonal *AC*. Para cada punto *P* de esta diagonal, se forma un rectángulo, como en la figura.**

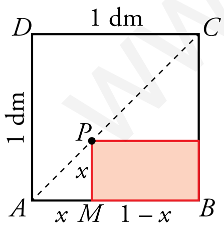


a) Halla su área cuando *P* dista de *AB*: 1/4 dm, 1/2 dm y 3/4 dm.

b) Dibuja la gráfica de la función que relaciona la distancia de *P* a *AB* con el área del rectángulo.

c) Indica el dominio de definición de la función.

a)



$$\left.\begin{array}{l}\text{Los triángulos } \widehat{ABC} \text{ y } \widehat{AMP} \text{ son semejantes} \\ \text{(son rectángulos con un ángulo agudo común)} \\ \widehat{ABC} \text{ es isósceles } (\overline{AB} = \overline{BC} = 1 \text{ dm})\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{AMP} \text{ también es isósceles}$$

Sea $x = \overline{AM} \rightarrow \overline{PM} = \overline{AM} = x$ y $\overline{MB} = 1 - x$

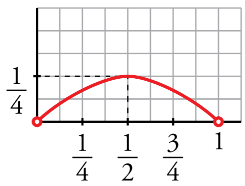
$$\left.\begin{array}{l}x = \overline{PM} \\ y = \text{área del rectángulo}\end{array}\right\} \rightarrow y = x \cdot (1 - x) \rightarrow y = -x^2 + x$$

$x = \frac{1}{4}$ dm $\to y = -\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \to y = \frac{3}{16}$ dm^2

$x = \frac{1}{2}$ dm $\to y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \to y = \frac{1}{4}$ dm^2

$x = \frac{3}{4}$ dm $\to y = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \to y = \frac{3}{16}$ dm^2

b) $y = -x^2 + x$



c) *Dominio* = (0, 1)

23. **Una función, $f(x)$, es periódica de periodo 5, y su T.V.M. en [1, 3] es 1.**

a) ¿Qué podemos decir de la T.V.M. de la función en el intervalo [6, 8]? ¿Y en el intervalo [11, 13]?

b) ¿Qué T.V.M. tiene la función en [3, 6]?

c) ¿Cuál es la tasa de variación media de la función en el intervalo [4, 9]? ¿Y en [8, 43]?

a) Si $f(x)$ es periódica de periodo 5 $\to f(a) = f(a + 5n)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{ll} f(6) = f(1) & (6 = 1 + 5 \cdot 1) \\ f(8) = f(3) & (8 = 3 + 5 \cdot 1) \end{array}\right\} \to \text{T.V.M. } [6, 8] = \text{T.V.M. } [1, 3] = 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(11) = f(1) & (11 = 1 + 5 \cdot 2) \\ f(13) = f(3) & (13 = 3 + 5 \cdot 2) \end{array}\right\} \to \text{T.V.M. } [11, 13] = \text{T.V.M. } [1, 3] = 1$$

b) T.V.M. [1, 3] = 1 $\to \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 1 \to f(3) - f(1) = 2 \to f(3) = f(1) + 2$

$f(6) = f(1)$ ($f(x)$ es periódica de periodo 5 y $6 = 1 + 5 \cdot 1$)

T.V.M. [3, 6] $= \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{f(1) - (f(1) + 2)}{3} = -\frac{2}{3}$

c) $f(9) = f(4)$ ya que $f(x)$ es periódica de periodo 5 y $9 = 4 + 5 \cdot 1$

T.V.M. [4, 9] $= \frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \frac{0}{5} = 0$

$f(8) = f(3)$ ($f(x)$ periódica de periodo 5 y $8 = 3 + 5 \cdot 1$)

$f(43) = f(3)$ ($f(x)$ periódica de periodo 5 y $43 = 3 + 5 \cdot 8$)

T.V.M. [8, 43] $= \frac{f(43) - f(8)}{43 - 8} = \frac{f(3) - f(3)}{35} = \frac{0}{35} = 0$

Reflexiona sobre la teoría

24. **La expresión analítica de una función es de la forma $y = ax^3 + bx^2 + c$. Si sabemos que los puntos $A(0, -2)$, $B(1, 5)$ y $C(-2, -22)$ pertenecen a la gráfica, ¿cuáles serán los valores de a, b y c?**

$A(0, -2) \rightarrow -2 = c$

$$\left.\begin{array}{l} B(1, 5) \rightarrow 5 = a + b + c = a + b - 2 \\ C(-2, -22) \rightarrow -22 = -8a + 4b - 2 \end{array}\right\} a = 7 - b$$

$-22 = -8(7 - b) + 4b - 2 \rightarrow -22 = -56 + 8b + 4b - 2 \rightarrow 12b = 36 \rightarrow b = 3$

$a = 7 - b = 4$

Los valores buscados son: $a = 4$, $b = 3$, $c = -2$.

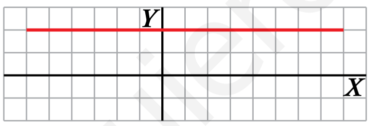
25. **Calcula el valor de a, b y c para que los puntos $A(-12, a)$, $B(3/4, b)$ y $C(0, c)$ pertenezcan a la gráfica de la función $y = 3x^2 - x + 3$.**

$A(-12, a) \rightarrow a = 432 + 12 + 3 = 447$

$B\left(\frac{3}{4}, b\right) \rightarrow b = 3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) - \left(\frac{3}{4}\right) + 3 = \frac{63}{16}$

$C(0, c) \rightarrow c = 3$

26. **Observa esta gráfica y responde:**



a) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

b) ¿Tiene máximos o mínimos relativos?

c) Halla la T.V.M. de la función en los intervalos [0, 5], [–1, 6] y [–5, 0]. ¿Qué ocurre?

a) *Dominio* = $[-6, 8]$ *Recorrido* = $\{2\}$

b) No tiene extremos relativos.

c) T.V.M. $[0, 5] = \frac{2-2}{5-0} = \frac{0}{5} = 0$

T.V.M. $[-1, 6] = \frac{2-2}{6-(-1)} = \frac{0}{7} = 0$

T.V.M. $[-5, 0] = \frac{2-2}{0-(-5)} = \frac{0}{5} = 0$

La función es constante por ello la tasa de variación media en cualquier intervalo es 0.

27. **a) Calcula la T.V.M. de la función $y = 2x - 3$ en los intervalos [0, 1], [5, 6], [1, 5] y [0, 7].**

b) Observa que en todos los intervalos el valor obtenido es igual. ¿Con qué elemento característico de la recta coincide ese valor?

c) Generaliza completando esta frase en tu cuaderno: "En las funciones lineales, la T.V.M. en cualquier intervalo es igual a …".

a) T.V.M. $[0, 1] = \dfrac{-1+3}{1} = 2$ T.V.M. $[5, 6] = \dfrac{9-7}{1} = 2$

T.V.M. $[1, 5] = \dfrac{7+1}{5-1} = 2$ T.V.M. $[0, 7] = \dfrac{11+3}{7} = 2$

b) Coincide con la pendiente de la recta $y = 2x - 3$.

c) En las funciones lineales, la T.V.M. en cualquier intervalo es igual a su pendiente.

28. **Di, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) Si una función es discontinua en un punto, dicho punto no pertenece al dominio de definición.

b) Si un punto no pertenece al dominio de definición de una función, esta no puede ser continua en ese punto.

c) Una función periódica podemos asegurar que es continua.

d) La pendiente de una recta es la T.V.M. de cualquiera de sus intervalos.

e) La T.V.M. de una función periódica en cualquier intervalo de longitud igual al periodo es 0.

f) Si en una parábola la T.V.M. de un intervalo es 0, el vértice está en el punto medio de dicho intervalo.

g) Todas las funciones no lineales tienen al menos un máximo o un mínimo relativo.

a) Falsa. Una función discontinua por saltos puede estar definida en esos puntos (saltos) de discontinuidad.

b) Verdadera. Para que una función sea continua en un punto es necesario que esté definida en él.

c) Falsa. No es necesario que una función sea continua para que sea periódica.

d) Verdadera.

Supongamos que la recta tiene una expresión $y = mx + n$. Su pendiente es m. Vamos a calcular la T.V.M. en un intervalo cualquiera $[a, b]$.

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(mb + n) - (ma + n)}{b - a} = \frac{mb - ma}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$$

e) Verdadero. En los extremos del intervalo la función tendrá el mismo valor.

f) Verdadero, las parábolas son simétricas respecto a una recta vertical que pasa por su vértice, por lo que si T.V.M. $[a, b] = 0$ entonces $f(a) = f(b)$ y, en consecuencia, $x = a$ y $x = b$ son simétricos respecto a la abscisa del vértice.

g) Falso, por ejemplo, $y = x^3$ no tiene extremos relativos.

Página 98

Investiga

Funciones encadenadas

Supón que construyes una aplicación informática para la función $f_1(x) = \frac{1+x}{1-x}$, de forma que si escribes un número, x, y aprietas "ENTER", se transforma en $f_1(x)$.

Y si vuelves a pulsar "ENTER", repite la transformación sobre el resultado anterior, tantas veces como pulses.

- **Calcula los sucesivos resultados al introducir inicialmente $x = 3$ y pulsar repetidas veces la tecla "ENTER".**

$$\boxed{3} \xrightarrow{f_1(x)} \boxed{-2} \xrightarrow{f_1(x)} \boxed{-1/3} \xrightarrow{f_1(x)} \boxed{1/2} \xrightarrow{f_1(x)} \boxed{3} \xrightarrow{f_1(x)} \ldots$$

Volvemos a obtener 3, por tanto, los resultados se repiten de forma cíclica.

Llamemos ahora $f_2(x)$ a la función que transforma x en el resultado que se obtiene al pulsar "ENTER" dos veces; $f_3(x)$, al resultado de pulsar tres veces; …; $f_n(x)$, al resultado de pulsar n veces.

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f_2"'] \arrow[rrr, bend right=50, "f_3"'] & \boxed{} \arrow[r, "f_1"] & \boxed{} \arrow[r, "f_1"] & \boxed{} \arrow[r, "f_1"] & \ldots \end{tikzcd}$$

- **Calcula $f_{12}(3)$, $f_{13}(3)$, $f_{14}(3)$ y $f_{15}(3)$.**

$f_1(3) = -2$ $\quad f_2(3) = -\frac{1}{3}$ $\quad f_3(3) = \frac{1}{2}$ $\quad f_4(3) = 3$

$f_5(3) = -2$ $\quad f_6(3) = -\frac{1}{3}$ $\quad f_7(3) = \frac{1}{2}$ $\quad f_8(3) = 3$

…

Luego, $f_{12}(3) = 3$, $f_{13}(3) = -2$, $f_{14}(3) = -\frac{1}{3}$ y $f_{15}(3) = \frac{1}{2}$

• **Generaliza y define la función $f_n(x)$.**

$$f_1(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$f_2(x) = f_1\left(f_1(x)\right) = \frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{x}$$

$$f_3(x) = f_1\left(f_1\left(f_1(x)\right)\right) = f_1\left(f_2(x)\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$$

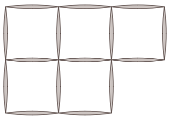
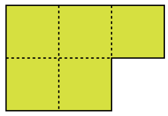
$$f_4(x) = f_1\left(f_1\left(f_1\left(f_1(x)\right)\right)\right) = f_1\left(f_3(x)\right) = \frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} = x$$

Por tanto:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} & \text{si} \quad n = 4k+1 \quad k \in \mathbb{N} \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad n = 4k+2 \quad k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si} \quad n = 4k+3 \quad k \in \mathbb{N} \\ x & \text{si} \quad n = 4k \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Página 99

Entrénate resolviendo problemas

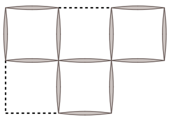
- A  B 

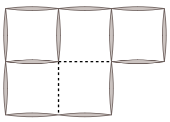
a) Consigue que en la figura A queden solo tres cuadrados suprimiendo tres palillos.

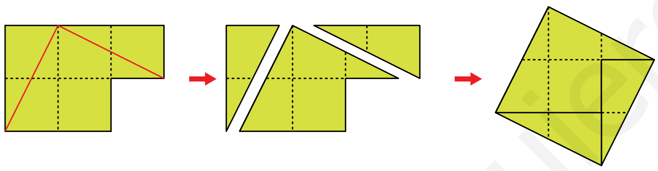
b) Consigue que en A queden solo tres cuadrados suprimiendo dos palillos.

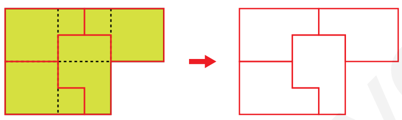
c) Parte la figura B en tres piezas dándole dos cortes rectos. Construye con ellas un cuadrado.

d) Parte la figura B en cuatro piezas idénticas.

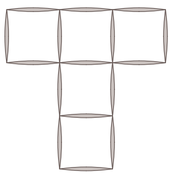
a) 

b) 

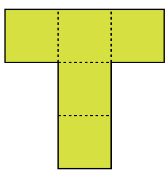
c) 

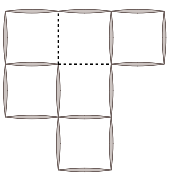
d) 

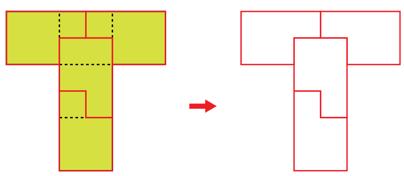
- **a) Cambiando de lugar dos palillos, consigue, en C, que queden cuatro cuadrados.**

C 

b) Parte la figura D en cuatro piezas idénticas.

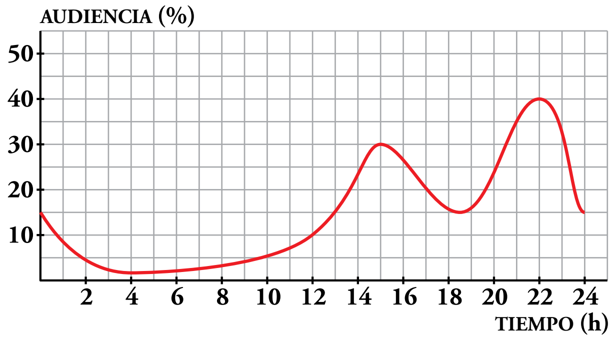
D 

a) 

b) 

Autoevaluación

1. Esta curva muestra la audiencia de televisión en un día de diario.



a) Descríbela, teniendo en cuenta los momentos más significativos.

b) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

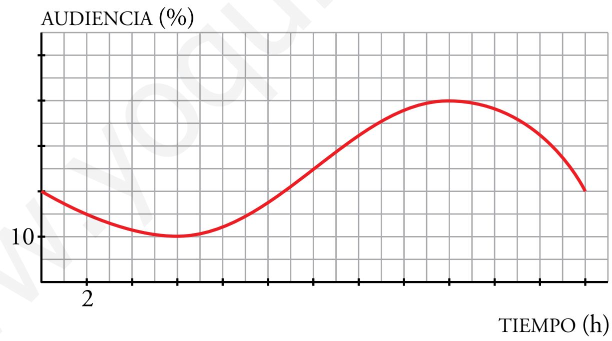
c) Dibuja en tu cuaderno la curva que crees que puede corresponder a un domingo.

d) Dibuja en tu cuaderno la curva del 31 de diciembre.

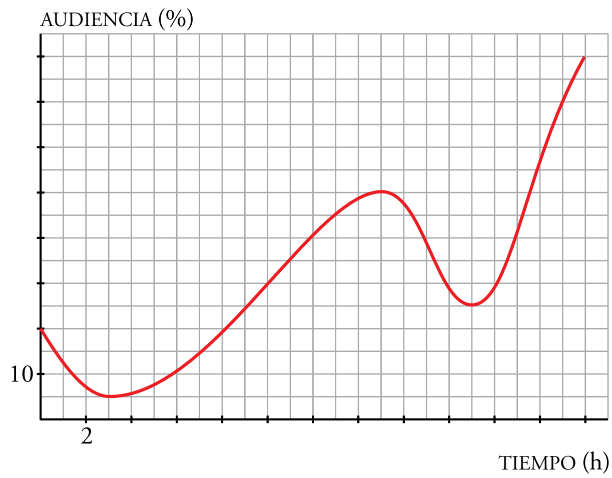
a) La audiencia (en %) disminuye entre las doce y las cuatro de la madrugada, alcanzando a esta hora su mínimo absoluto. A partir de este momento aumenta hasta las tres de la tarde, instante en el que vuelve a decrecer hasta las seis y media de la tarde. Desde las seis y media hasta las diez de la noche aumenta, alcanzando a esta hora su máximo absoluto. A partir de las diez vuelve a decrecer.

b) *Dominio* = [0, 24] *Recorrido* = [2,5; 40]

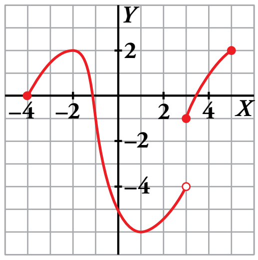
c) Pregunta de respuesta abierta. Una posible solución es:



d) Pregunta de respuesta abierta. Una posible solución es:



2. Observa la gráfica y halla:



a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

a) *Dom* = $[-4; 5]$; *Recorrido* = $[-6, 2]$

b) Máximos relativos en los puntos $(-2, 2)$ y $(5, 2)$.

Mínimos relativos en los puntos $(-4, 0)$ y $(1, -6)$.

c) Crece en $(-4, -2) \cup (1, 5)$.

Decrece en $(-2, 1)$.

d) Es continua en $(-4, 3) \cup (3, 5)$.

Es discontinua en $x = 3$.

3. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{4x + 8}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x - 7}$ **c)** $y = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$

a) $4x + 8 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq -2$

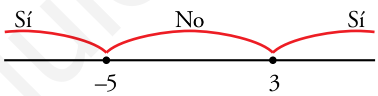
Dom = $[-2, +\infty)$

b) $x - 7 \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 7$

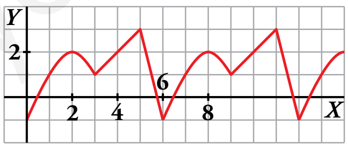
Dom = $(-\infty, 7) \cup (7, +\infty)$

c) $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$

Dom = $(-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$



4. a) ¿Es periódica esta función?



b) ¿Cuál es su periodo?

c) Halla los valores de la función en los puntos de abscisas: $x = 2$; $x = 4$; $x = 40$; $x = 42$.

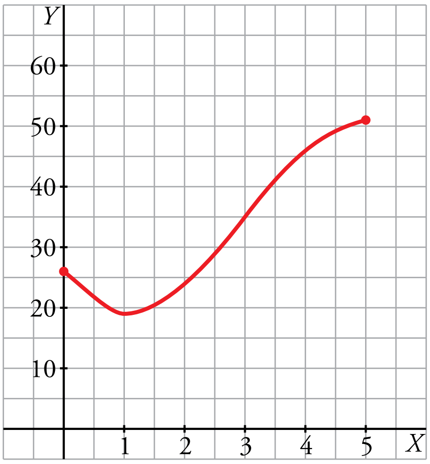
a) y b) Es periódica de periodo 6.

c) $f(2) = 2$; $f(4) = 2$; $f(40) = f(4) = 2$; $f(42) = f(0) = -1$

5. Representa la función $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 26$, definida en [0, 5], dándole a x valores enteros.

Supón que y es el valor en bolsa, en millones de euros, de una empresa que acaba de cambiar de dirección, y que x es el número de meses transcurridos desde que cambió de dirección.

Describe su evolución en estos cinco meses, señalando crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.



x	0	1	2	3	4	5
y	26	19	24	35	46	51

- Decrece en el intervalo (0, 1).
- Crece en el intervalo (1, 5).
- Tiene un mínimo relativo en el punto (1, 19).
- Tiene dos máximos relativos, uno en el punto (0, 26) y otro en el punto (5, 51).

6. Calcula la tasa de variación media de la función de ecuación $y = x^2 + 4x - 5$ en los intervalos [–5, 2], [–2, 1] y [1, 2].

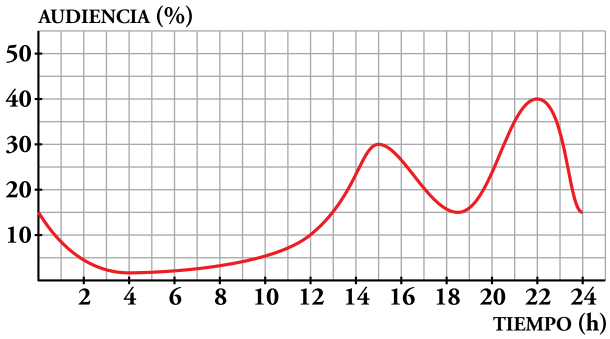
T.V.M. $[-5, 2] = \dfrac{7 - 0}{2 + 5} = 1$

T.V.M. $[-2, 1] = \dfrac{0 + 9}{1 + 2} = 3$

T.V.M. $[1, 2] = \dfrac{7 - 0}{2 - 1} = 7$

Autoevaluación

1. Esta curva muestra la audiencia de televisión en un día de diario.



a) Descríbela, teniendo en cuenta los momentos más significativos.

b) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

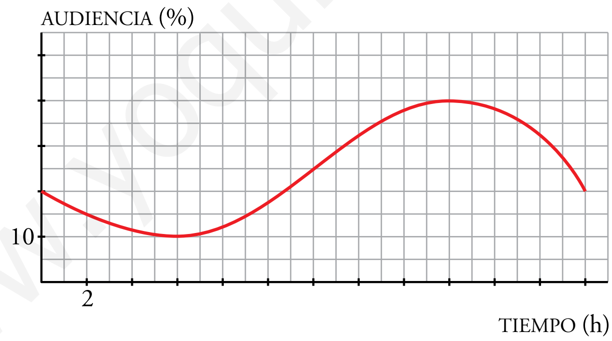
c) Dibuja en tu cuaderno la curva que crees que puede corresponder a un domingo.

d) Dibuja en tu cuaderno la curva del 31 de diciembre.

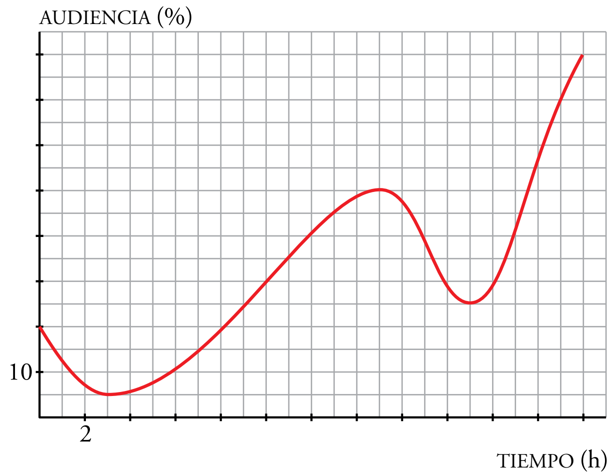
a) La audiencia (en %) disminuye entre las doce y las cuatro de la madrugada, alcanzando a esta hora su mínimo absoluto. A partir de este momento aumenta hasta las tres de la tarde, instante en el que vuelve a decrecer hasta las seis y media de la tarde. Desde las seis y media hasta las diez de la noche aumenta, alcanzando a esta hora su máximo absoluto. A partir de las diez vuelve a decrecer.

b) *Dominio* = [0, 24] *Recorrido* = [2,5; 40]

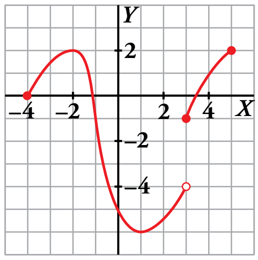
c) Pregunta de respuesta abierta. Una posible solución es:



d) Pregunta de respuesta abierta. Una posible solución es:



2. Observa la gráfica y halla:



a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

a) *Dom* = [–4; 5]; *Recorrido* = [–6, 2]

b) Máximos relativos en los puntos (–2, 2) y (5, 2).

Mínimos relativos en los puntos (–4, 0) y (1, –6).

c) Crece en $(-4, -2) \cup (1, 5)$.

Decrece en (–2, 1).

d) Es continua en $(-4, 3) \cup (3, 5)$.

Es discontinua en $x = 3$.

3. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{4x+8}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-7}$ **c)** $y = \sqrt{x^2+2x-15}$

a) $4x + 8 \geq 0 \ \rightarrow\ x \geq -2$

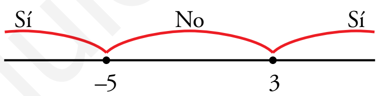
$Dom = [-2, +\infty)$

b) $x - 7 \neq 0 \ \rightarrow\ x \neq 7$

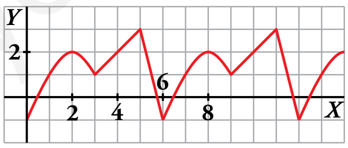
$Dom = (-\infty, 7) \cup (7, +\infty)$

c) $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$

$Dom = (-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$



4. a) ¿Es periódica esta función?



b) ¿Cuál es su periodo?

c) Halla los valores de la función en los puntos de abscisas: $x = 2$; $x = 4$; $x = 40$; $x = 42$.

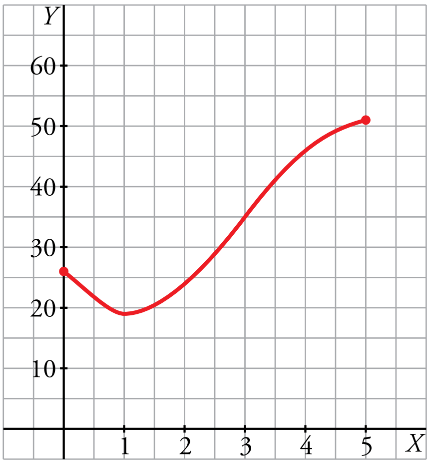
a) y b) Es periódica de periodo 6.

c) $f(2) = 2$; $f(4) = 2$; $f(40) = f(4) = 2$; $f(42) = f(0) = -1$

5. **Representa la función $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 26$, definida en [0, 5], dándole a x valores enteros.**

Supón que y es el valor en bolsa, en millones de euros, de una empresa que acaba de cambiar de dirección, y que x es el número de meses transcurridos desde que cambió de dirección.

Describe su evolución en estos cinco meses, señalando crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.



x	0	1	2	3	4	5
y	26	19	24	35	46	51

- Decrece en el intervalo (0, 1).
- Crece en el intervalo (1, 5).
- Tiene un mínimo relativo en el punto (1, 19).
- Tiene dos máximos relativos, uno en el punto (0, 26) y otro en el punto (5, 51).

6. **Calcula la tasa de variación media de la función de ecuación $y = x^2 + 4x - 5$ en los intervalos [–5, 2], [–2, 1] y [1, 2].**

$$\text{T.V.M. } [-5, 2] = \frac{7 - 0}{2 + 5} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [-2, 1] = \frac{0 + 9}{1 + 2} = 3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{7 - 0}{2 - 1} = 7$$