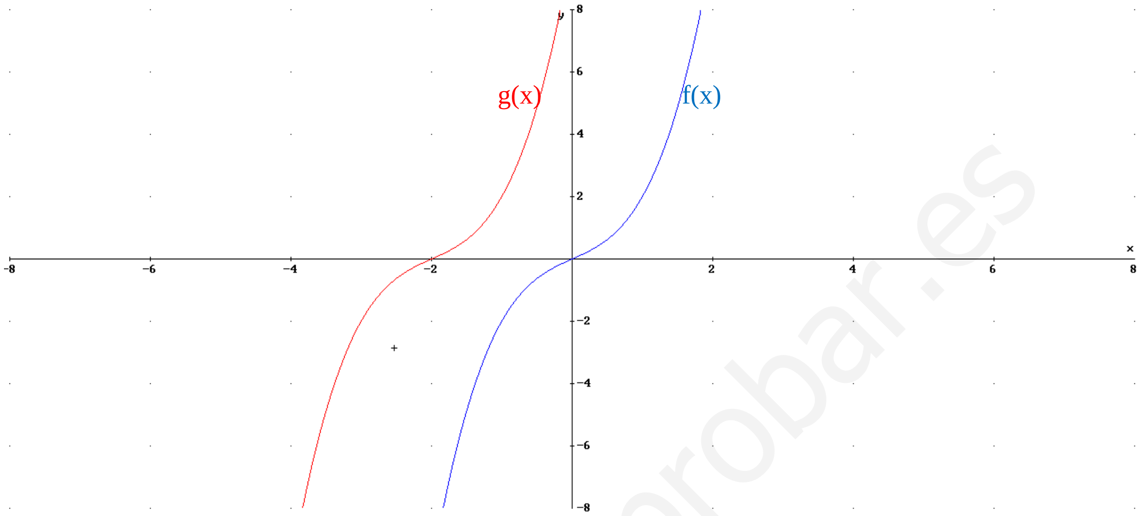
Tema 6. Funciones (II). Recta, parábola, hipérbola, exponenciales y logaritmos.

1. Traslados de las gráficas horizontales y verticales

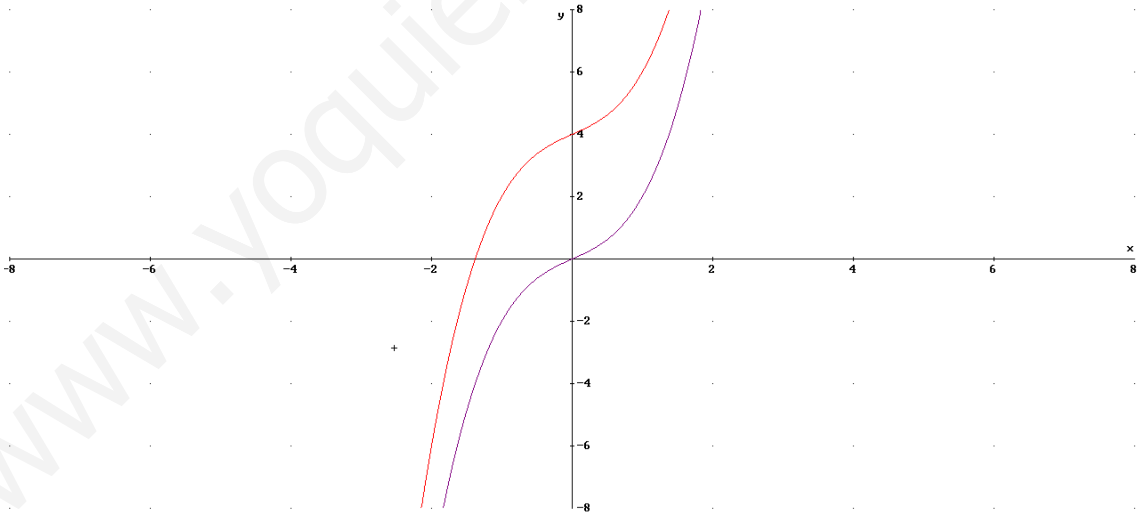
Horizontal: Sea una función y=f(x), si trasladamos la gráfica x_0 unidades en eje OX entonces la expresión analítica de la función resulta de cambiar x por $(x-x_0)$.

Ejemplo: $f(x)=x^3+x$ si lo trasladamos 2 unidades a la izquierda ($x_0=-2$) obtendremos la sunción $g(x)=f(x+2)=(x+2)^3+(x+2)=x^3+6x^2+13x+10$

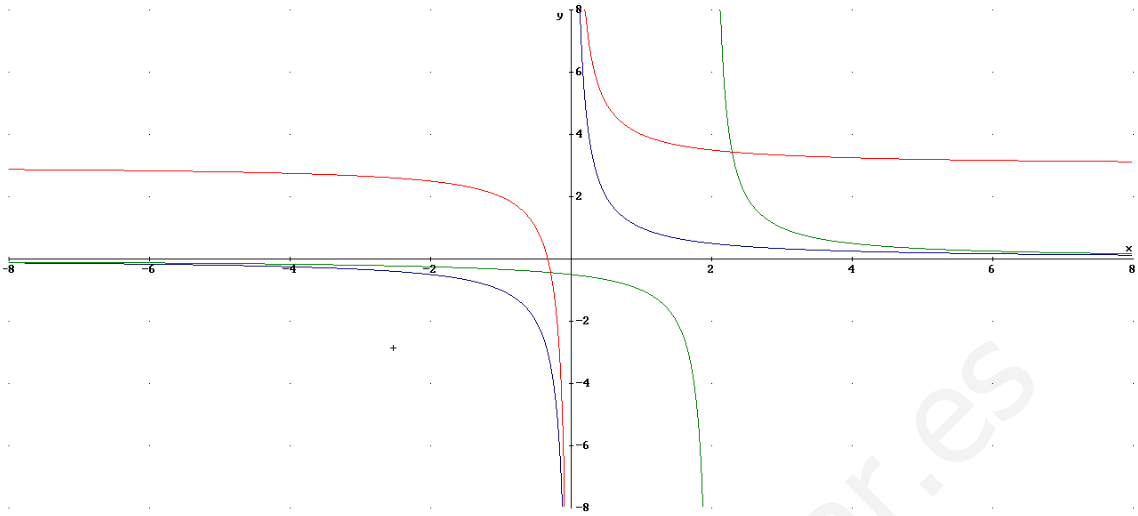


Vertical: Sea una función y=f(x), si trasladamos la gráfica y_0 unidades en eje OY entonces la expresión analítica de la función resulta de cambiar y por $(y-y_0)\rightarrow y=f(x)+y_0$

Ejemplo: $f(x)=x^3+x$ si lo trasladamos 4 unidades hacia arriba ($y_0=4$) obtendremos la sunción $g(x)=x^3+x+4$



Ejercicio obtener la expresión analítica de g(x), h(x) si f(x)=1/x



Solución: g(x)=3+1/x; h(x)=1/(x-2)

2. Funciones lineales. La recta

La expresión analítica de una recta es y=f(x)=mx+n. Se carateriza por tener un crecimiento o decrecimiento constante. Un ejemplo claro es la posición de un móvil en el tiempo en el movimiento rectilíneo uniforme. ($s=s_0+v\cdot t$, ejemplo s_0=1m, v=2m/s → s(t)=1+2t).

Veamos el significado de m y n:

1) m=pendiente de la recta, nos explica el crecimiento de la función. Si m>0 crece y si m<0 decrece. Se cumple que m=$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{var}\,iacion\;\; y}{\text{var}\,iacion\;\; x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Si por ejemplo m=2/3→la función crece de tal forma que por cada vez que aumenta 3 unidades la x la y aumenta 2.

2) n=ordenada en el origen, es el punto de corte de la gráfica con el eje OY (es decir corta en (0,n))

Obtener la expresión analítica a partir de dos puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$:

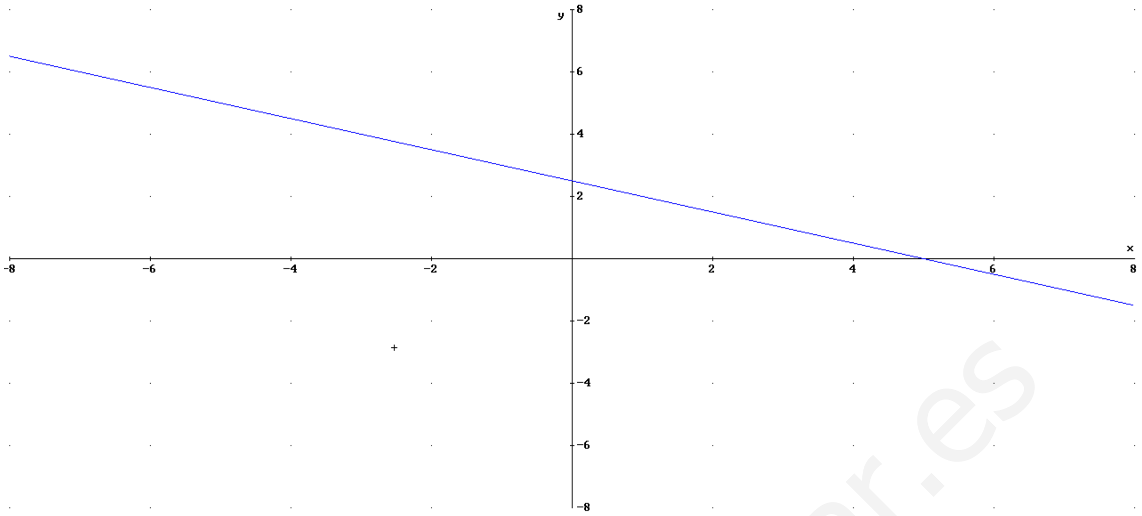
m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ → $y=y_1+m(x-x_1)$

Obtener la expresión analítica a partir de la gráfica: podemos obtener la ordenada en el origen viendo el punto de corte con el eje OY, y la pendiente a partir del crecimiento. También podemos obtenerlo a partir de identificar dos puntos en la gráfica y aplicar lo visto antes.

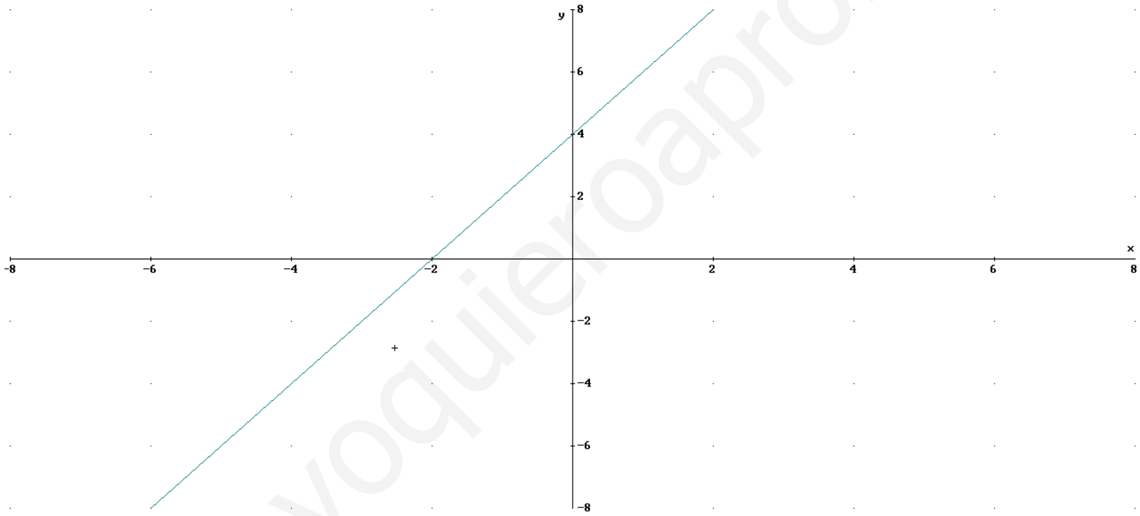
Ejemplo : obtener la expresión analítica de la recta que pasa por $P_1(1,2)$ y $P_2(-1,3)$ y dibujarla

m=$\frac{3-2}{-1-1}=-1/2$

y=2-1/2(x-1)=2.5-0.5x (decrece y corta en el eje y en 2.5)



Obtener la expresión analítica de la recta con la siguiente gráfica:

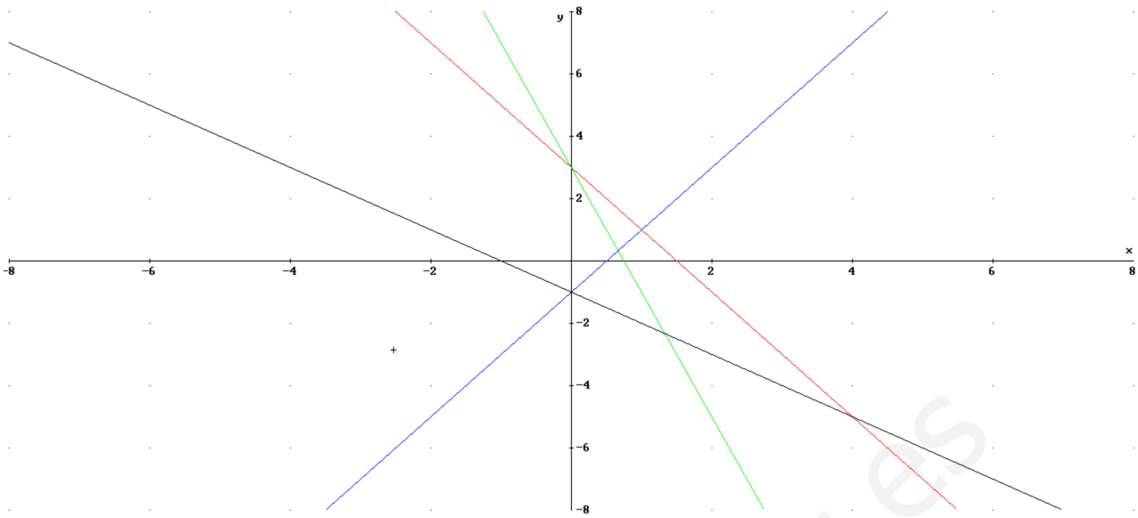


Podemos ver como n=4 y m=2, pues cada unidad que aumenta en x aumenta 2 en y.

y=2x+4

Ejercicio 1: sin necesidad de obtener la expresión analítica identifica las siguientes rectas:

a) y=-2x+3
b) y=2x-1
c) y=-4x+3
d) y=-x-1



Solución

a→roja
b→azul
c→verde
d→negra

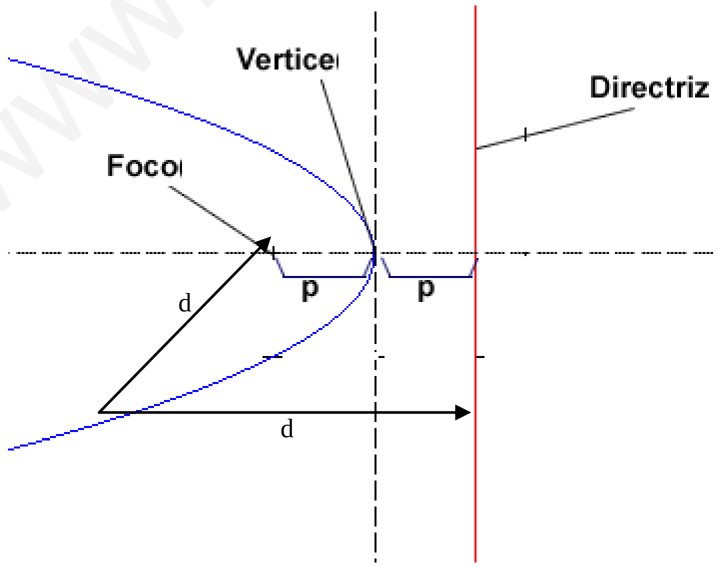
3. Función parabólica

3.1. Introducción. Lugar geométrico.

La parábola es una curva muy importante por aparecer en multitud de ocasiones en la naturaleza y la técnica. Ejemplos:

- Lanzamientos balón de baloncesto
- Chorros de agua
- Las antenas parabólicas
- …

Geométricamente una parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta (directriz) y de un punto (foco de la parábola).



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

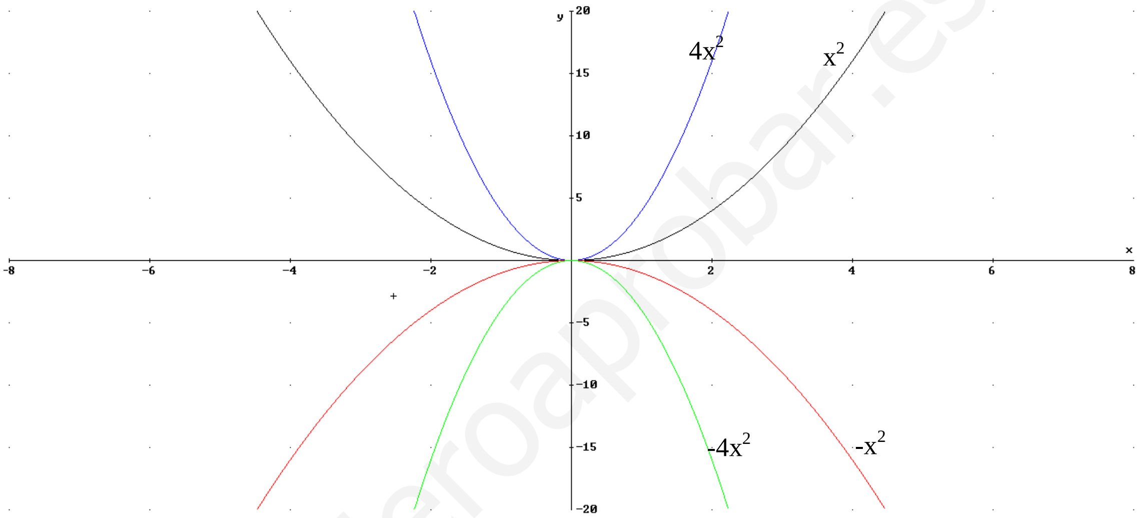
3.2 La parábola como función

En este tema no nos centraremos en la parábola como lugar geométrico sino como función. La parábola es la gráfica de toda función asociada a un polinomio de segundo grado, es decir $y=f(x)=ax^2+bx+c$.

Veamos casos particulares:

3.2.1 Función parabólica del tipo $y=ax^2$

Si tenemos la función $y=f(x)=ax^2$. Para entender como es la parábola en función del parámetro a veamos 4 casos distintos:



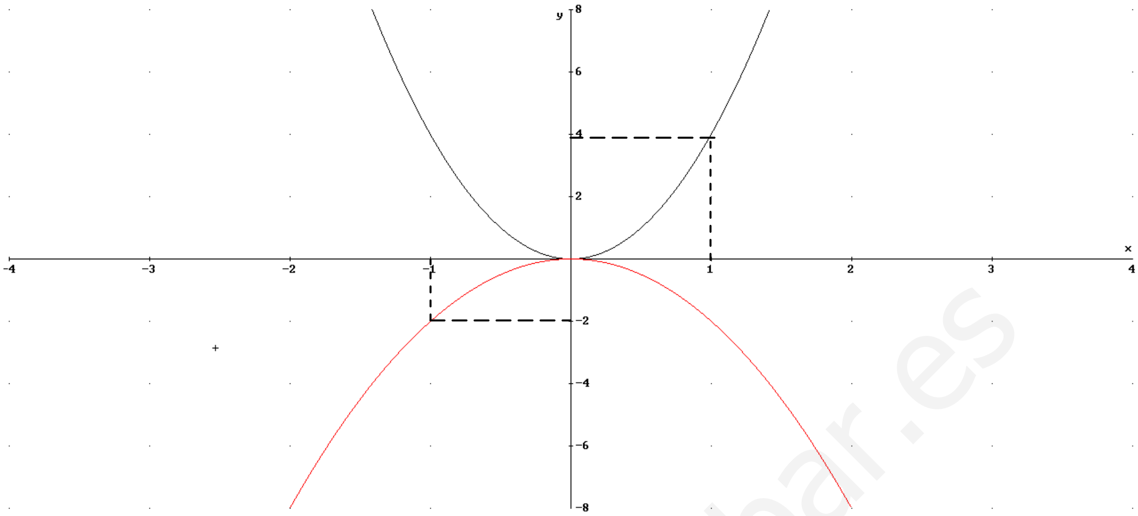
Vemos que difieren si aes positiva o negativa, así tenemos:

a) Si a>0, sus propiedades son las siguientes:
- Su vértice en origen V(0,0) que es un mínimo
- Cóncava
- Simétrica con eje OY (par)
- Creciente en $(0,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$
- A mayor valor de a más rápido crece y decrece

b) Si a<0, sus propiedades son las siguientes:
- Su vértice en origen V(0,0) que es un máximo
- Convexa
- Simétrica con eje OX (par)
- Decreciente en $(0,\infty)$ y creciente en $(-\infty,0)$
- A menor valor (más negativo) de a más rápido crece y decrece

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 2: obtener la expresión analítica de las siguientes gráficas:



Solución

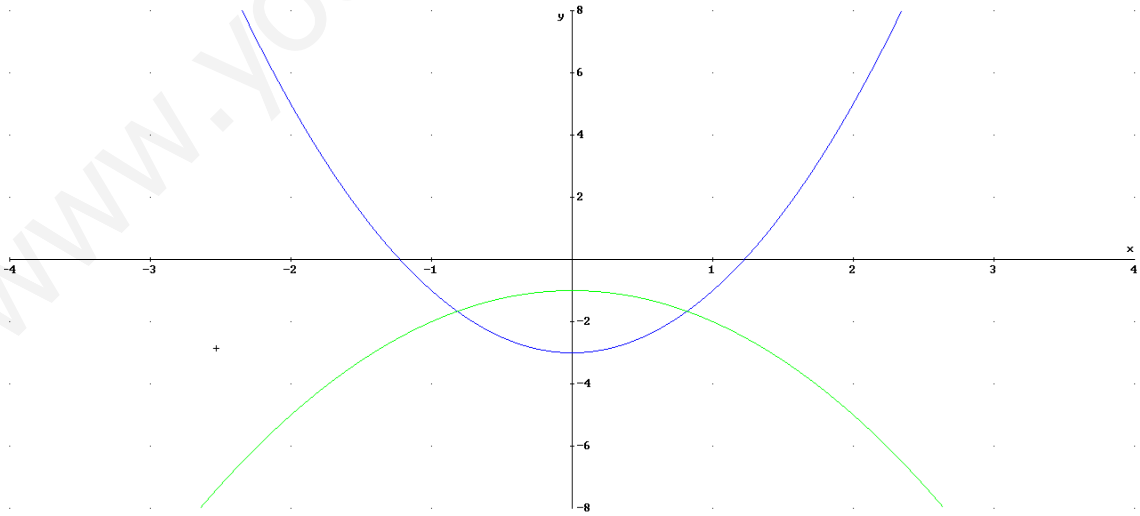
a) (azul) V(0,0) → $y=a\cdot x^2$ P(1,4) → $4=a\cdot 1^2$ → a=4

b) (roja) V(0,0) → $y=a\cdot x^2$ P(-1,-2) → $-2=a\cdot(-1)^2$ → a=-2

3.2.2 Función parabólica del tipo $y=ax^2+c$

Para entender la gráfica tendremos que pensar que es una traslación en el eje OY de c unidades. De esta forma la gráfica es igual que la de $a\cdot x^2$ pero c unidades desplazada, del tal forma que el vértice situado en V(0,c).

Ejemplos: $y=2x^2-3$; $y=-x^2-1$

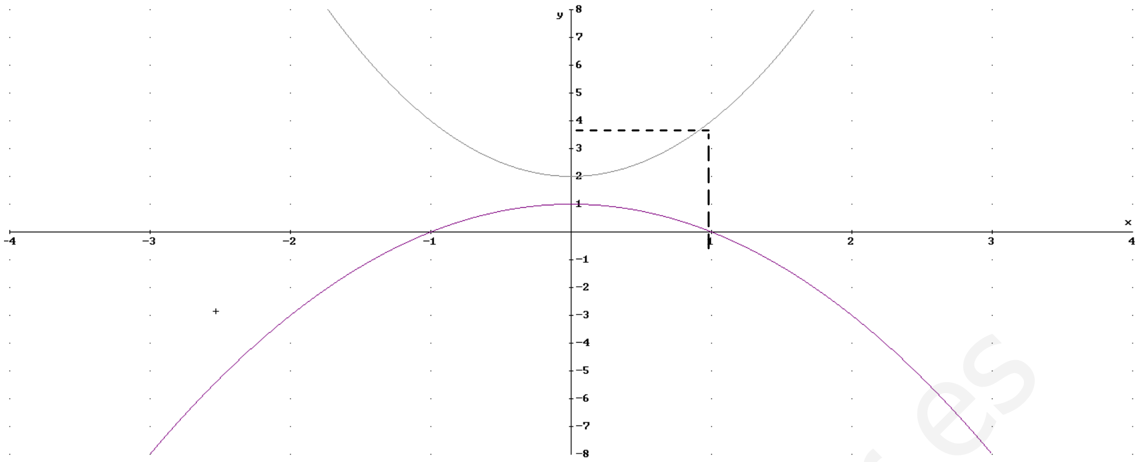


Puntos importantes son los de corte con el eje OX (es decir y=0). Sólo cortarán con el eje las que tenga a>0 y c<0 o a<0 y c>0. En nuestro ejemplo:

$0=2x^2-3 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow A(\sqrt{\frac{3}{2}},0)$, $B(-\sqrt{\frac{3}{2}},0)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 3: obtener la expresión analítica de las siguientes gráficas:



Solución

a) (Azul) V(2,0) → c=2. P(1,4) $y=ax^2+2$ → $4=a\cdot1^2+2$ → a=2 → $y=2x^2+2$
b) (morado) V(1,0) → c=1 P(1,0) $y=ax^2+1$ → $0=a\cdot1^2+1$ → a=-1 → $y=-x^2+1$

3.2.3 Función parabólica del tipo $y=ax^2+bx+c$

Para entender la gráfica basta con expresar la función de la siguiente forma $y=y_0+a(x-x_0)^2$, entonces será igual que el de la parábola $y=ax^2$ pero desplazada x_0 en el eje OX e y_0 en el eje OY. Relacionemos entonces a, by c con x_0 e y_0:

$$y=a\cdot(x-x_0)^2+y_0=a\cdot x^2-2ax_0\cdot x+ax_0^2+y_0=ax^2+bx+c$$

$$-2a\cdot x_0=b \rightarrow x_0=\frac{-b}{2a}$$

$$a\cdot x_0^2+y_0=c \rightarrow y_0=c-a\cdot x_0^2$$

En la práctica se calcula $x_0=\frac{-b}{2a}$ e y_0 se obtiene sustituyendo en la función $x_0 \rightarrow y_0=f(x_0)$

La gráfica como hemos dicho es igual que la de $y=ax^2$ pero desplazada x_0 unidades en el eje OX e y_0 en eje OY, de tal forma que el vértice $V(x_0,y_0)$

Ejemplo: representar y poner en forma $y=a\cdot(x-x_0)^2+y_0$ la función $y=f(x)=2x^2-4x-2$.

Calculemos el vértice $x_0=\frac{-b}{2a}=1$, $y_0=f(1)=-4$ → V(1,-4)

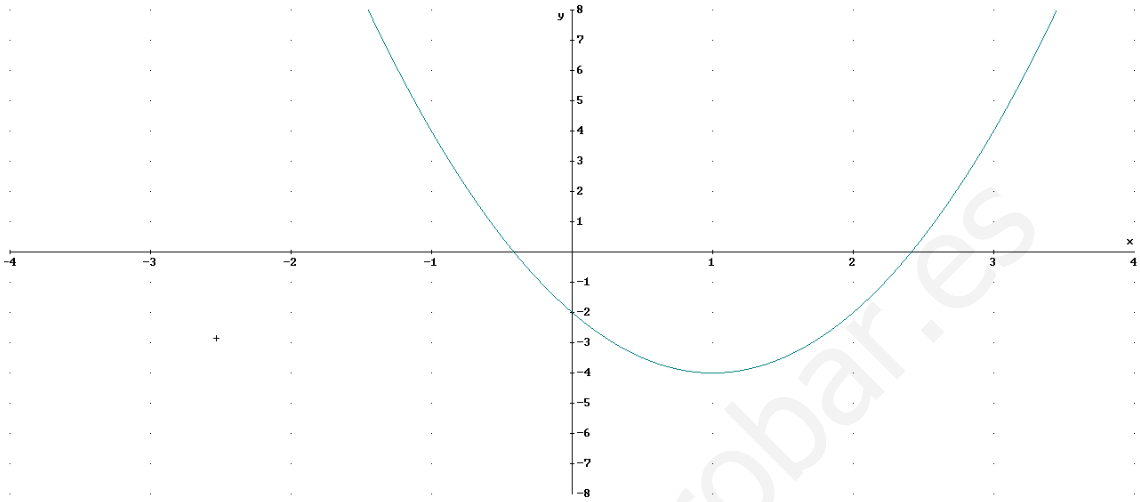
$$y=f(x)=2\cdot(x-1)^2-4$$

Para representarla damos valores entorno del vértice

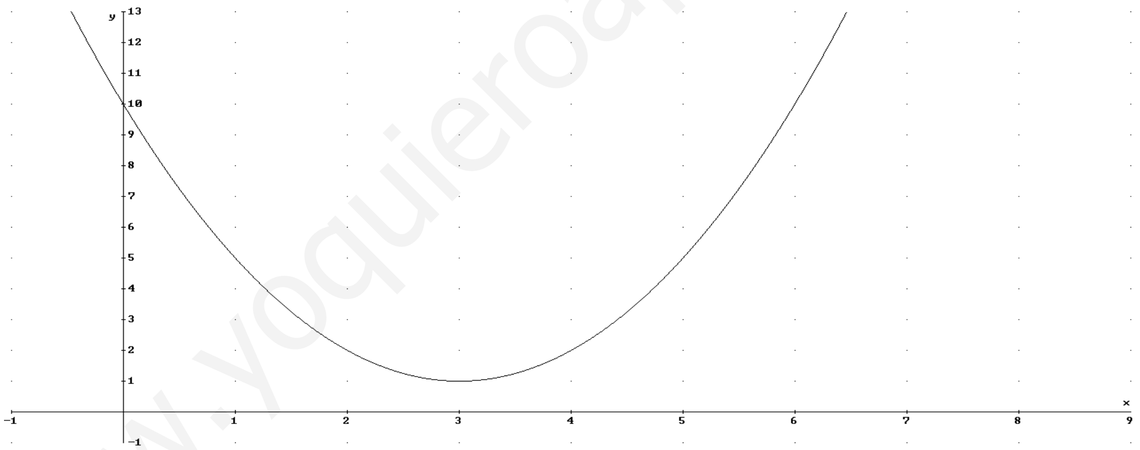
X	Y
0	-2
1	**-4**

2 -2

Puntos de corte con eje OX (y=0)→ $0=2\cdot(x-1)^2-4 \rightarrow 4=2\cdot(x-1)^2 \rightarrow (x-1)^2=2 \rightarrow$
$x-1=\pm\sqrt{2} \rightarrow x=1\pm\sqrt{2} \rightarrow (1+\sqrt{2},0), (1-\sqrt{2},0)$



Ejercicio 4: obtener la expresión analítica de la siguiente gráfica:



Solución:

El vértice es V(3,1) → $y=1+a\cdot(x-3)^2$. Para calcular a sustituimos un punto, por ejemplo P(10,0)→ $10=1+a\cdot 9 \rightarrow a=1$:

$y=1+(x-3)^2=1+x^2-6x+9=x^2-6x+10$

4. Función exponencial

4.1. Introducción

Antes de ver la función exponencial recordemos las definición de exponente y alguna de sus propiedades.

a^x:

- Si $x \in N \rightarrow a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots . a}^{n}$
- Si $x \in Z \rightarrow a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- Si $x \in Q \rightarrow a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Propiedades:

1) $(a^x)^y = a^{xy}$ → *ejemplo:* $5^{2x} = 25^x$
2) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ → *ejemplo:* $3^x \cdot 2^x = 6^x$
3) $a^1 = a$
4) $a^0 = 1$

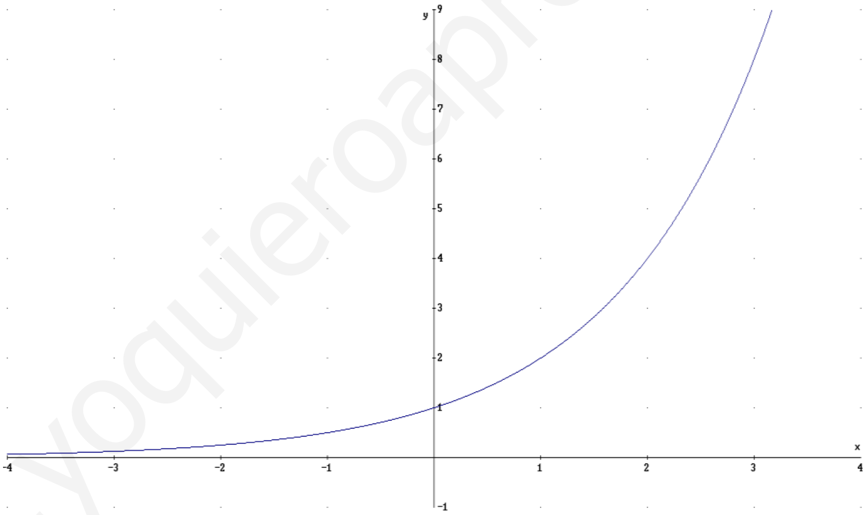
4.2. Representaciones de funciones exponenciales del tipo $y=a^x$

Vamos a distinguir dos casos de funciones exponenciales:

a) a>1

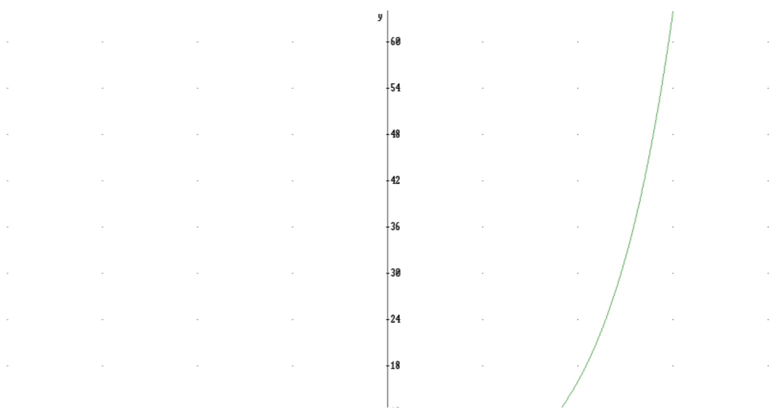
$y=2^x$

X	y
3	8
2	4
1	2
0	1
-1	½
-2	1/4
-3	1/8



a) $y=4^x$

X	Y
3	64
2	16
1	4
0	1
-1	¼



-2	1/16
-3	1/64

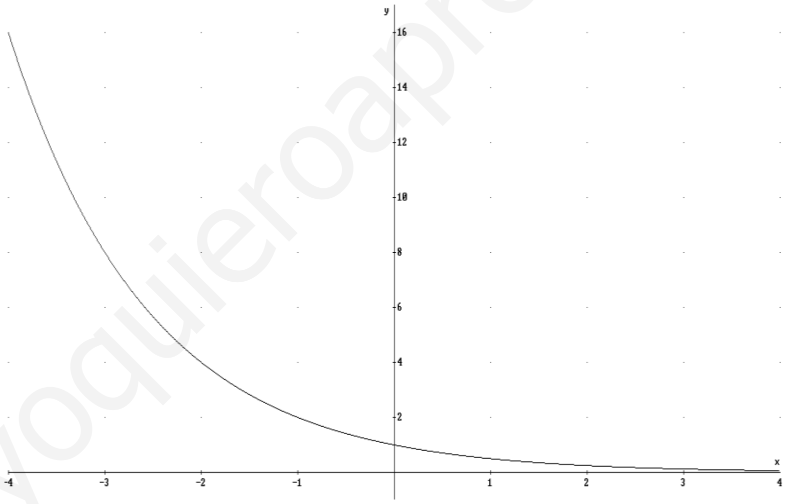
Propiedades exponentes si a>1:

1) Dom(f)=R
2) Continua en R
3) Creciente en R
4) Concava
5) Asíntota horizontal y=0 x→-∞
6) Definida positiva (siempre positiva)
7) A mayor valor de a más rápido crece

b) 0<a<1

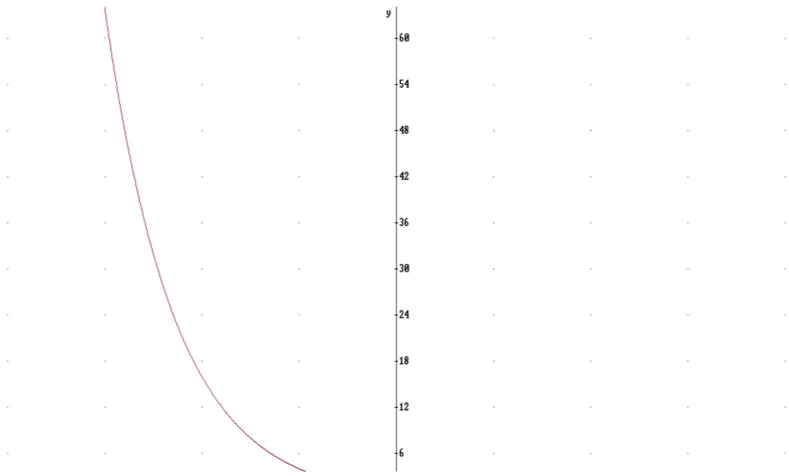
$y=(1/2)^x$

x	Y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	1/4
3	1/8



b) $y=(1/4)^x$

x	Y
-3	64
-2	16
-1	4
0	1
1	¼
2	1/16

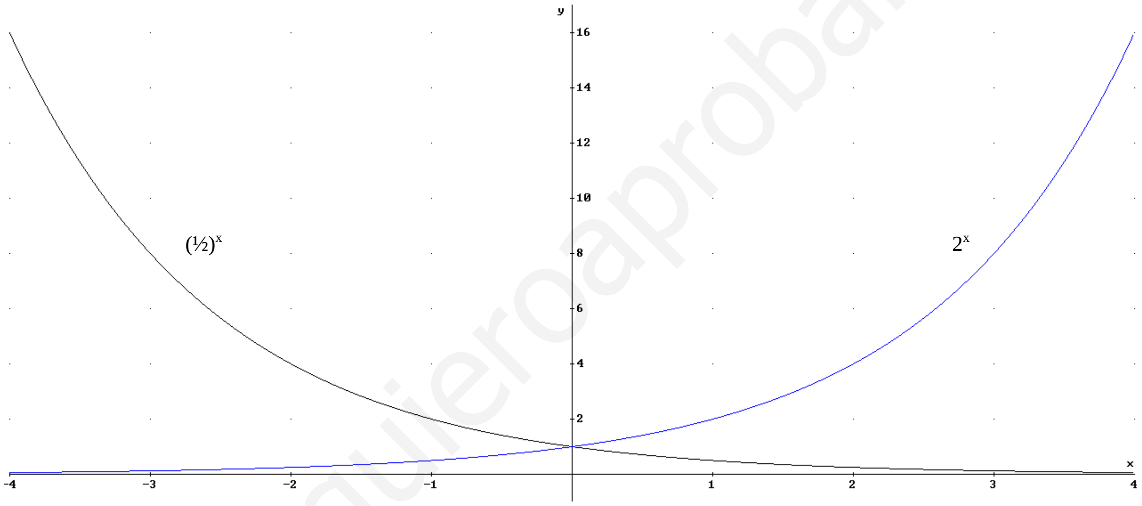


3 1/64

Propiedades exponentes si 0<a<1:

1) Dom(f)=R
2) Continua en R
3) Decreciente en R
4) Cóncava
5) Asíntota horizontal y=0 x→-∞
6) Definida positiva (siempre positiva)
7) Cuanto más se acerca a cero la base más rápidamente decrece.

Nota: a^x simétrica respecto al eje con $(1/a)^x$



Ejercicio 5: Representa y di cual es la base de las siguientes funciones exponenciales:

a) $y=3^{2x}$

b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

Solución:

La función exponencial es de la forma $y=a^x$, y en nuestro caso tenemos que el exponente es 2x, de esta forma tenemos que incluir el 2 dentro de la base, veamos como:

$y=3^{2x}=(3^2)^x=9^x$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^x=\left(\frac{1}{9}\right)^x$

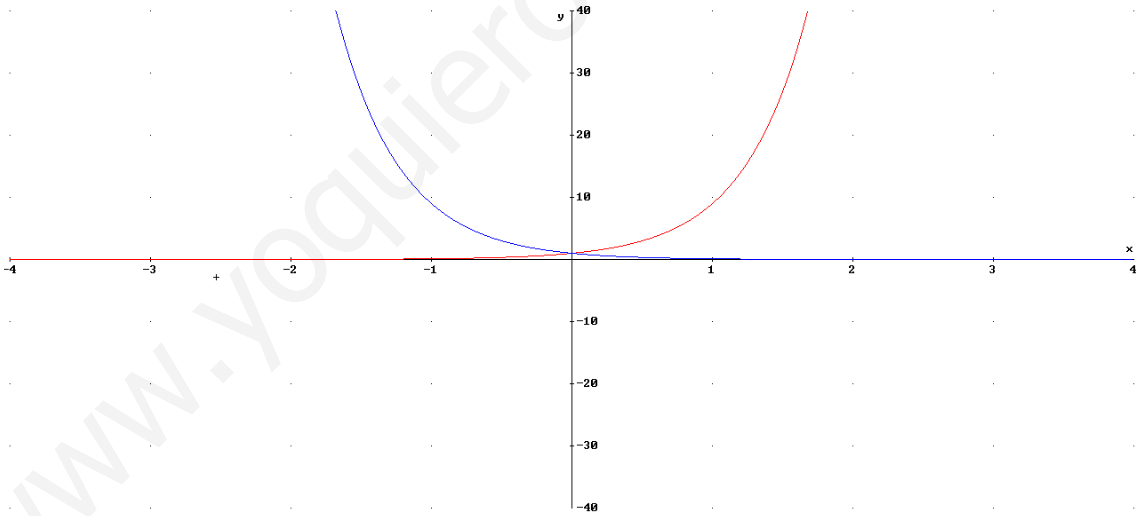
Luego las basen son 9 y 1/9. Veamos las gráficas

$y=9^x$

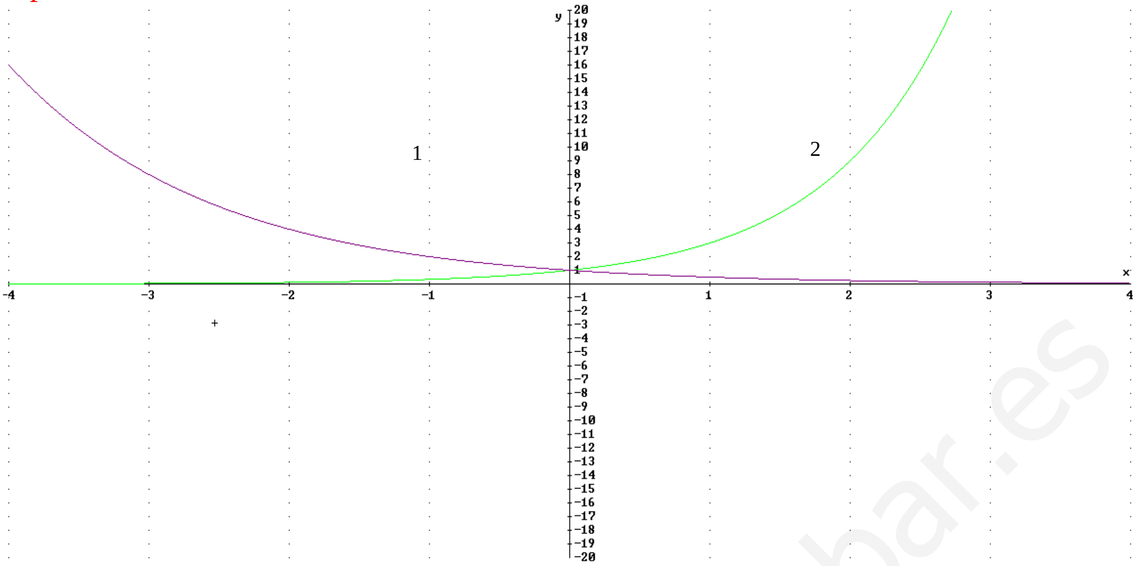
x	Y
-3	1/729
-2	1/81
-1	1/9
0	1
1	9
2	81
3	729

$y=(1/9)^x$

x	Y
-3	729
-2	81
-1	9
0	1
1	1/9
2	1/81
3	1/729



Ejercicio 6: obtener la expresión analítica de las siguientes funciones exponenciales



Solución

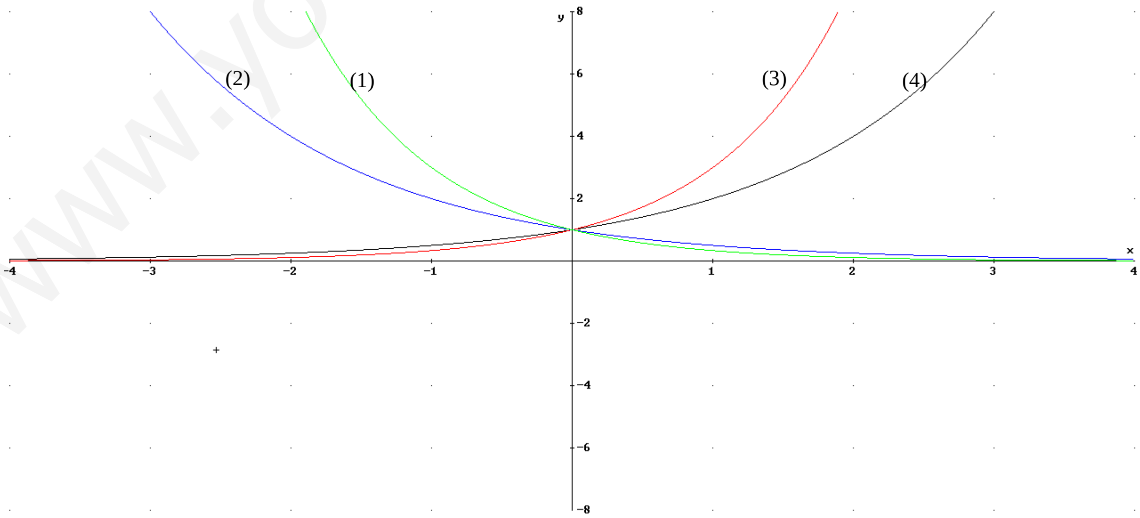
Veamos la expresión analítica de (1). Sabemos que a<0 pues es decreciente. Busquemos un punto de la gráfica que no sea el (0,1). Por ejemplo en (-1, 2).

$y=a^x \rightarrow 2=a^{-1} \rightarrow 2=1/a \rightarrow a=1/2$

Veamos la expresión analítica de (2). Sabemos que a>0 pues es creciente. Busquemos un punto de la gráfica que no sea el (0,1). Por ejemplo en (1, 3).

$y=a^x \rightarrow 3=a^1 \rightarrow a=3$

Ejercicio7: Identifica las siguientes gráficas con la expresión analítica correspondientes.



(a) $y=2^x$
(b) $y=3^x$
(c) $y=(0.5)^x$
(d) $y=(1/3)^x$

Solución:

(a)=(4), (b)=(3), (c)=(2), (d)=(1)

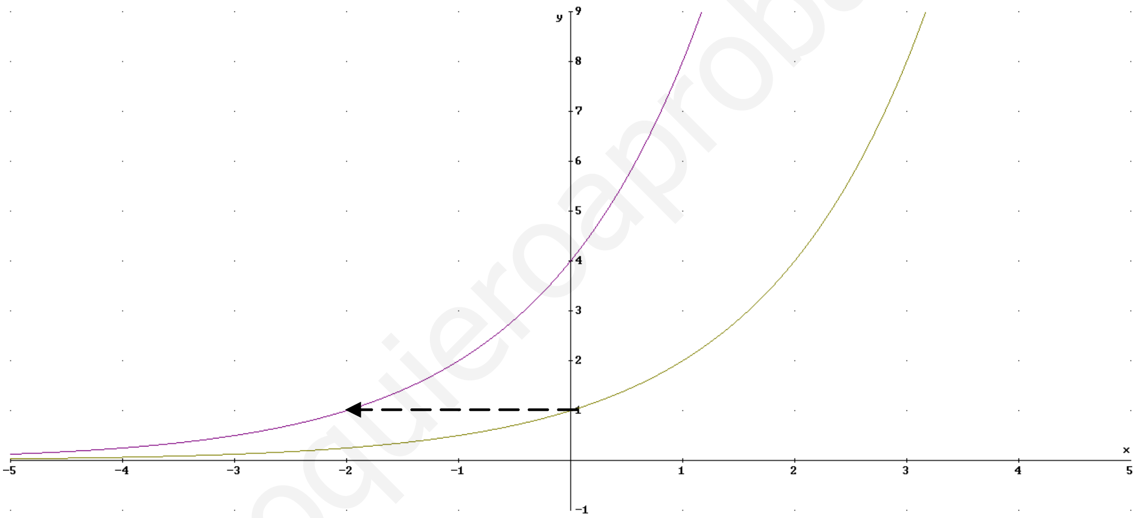
4.3. Funciones exponenciales desplazadas

En este apartado veremos las funciones cuando desplazamos las gráficas en los ejes:

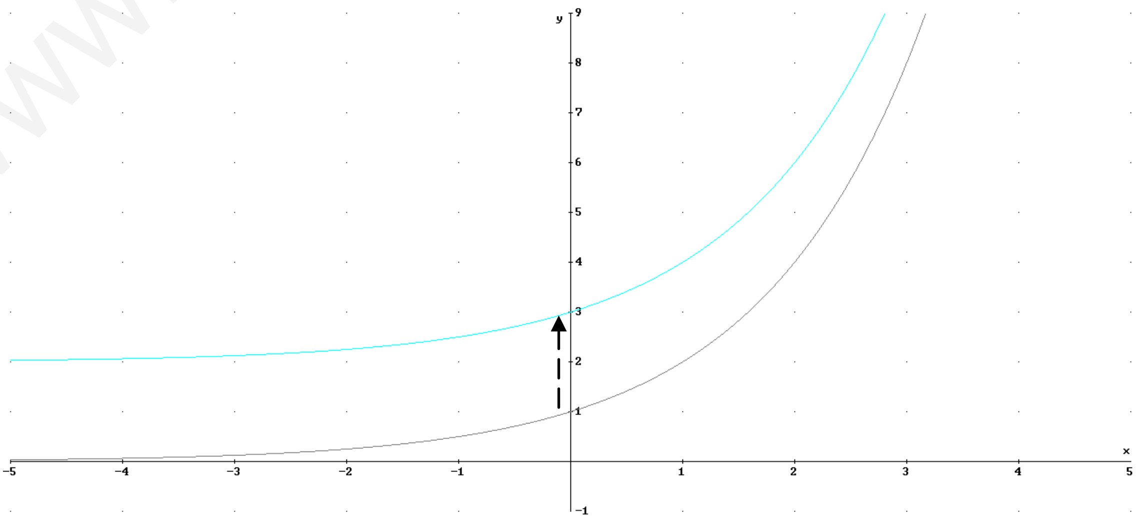
- Si desplazamos la gráfica en el eje OX un valor x_0 tenemos que la función gráfica es $y=a^{x-x_o}=a^x \cdot a^{-x_o}$
- Si desplazamos la gráfica en el eje OY un valor y_0 tenemos que la función gráfica es $y=a^x+y_0$

Ejemplos:

a) $y=4\cdot 2^x \rightarrow y=2^2\cdot 2^x \rightarrow y=2^{x+2} \rightarrow x_0=-2$

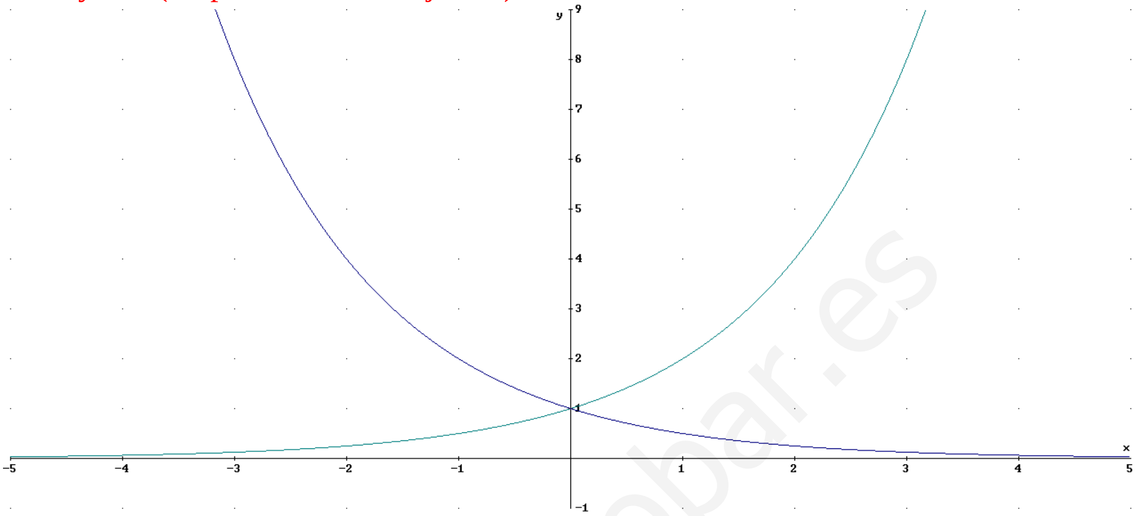


b) $y=2+2^x \rightarrow y_0=2$ (la asíntota horizontal pasa a ser y=2)



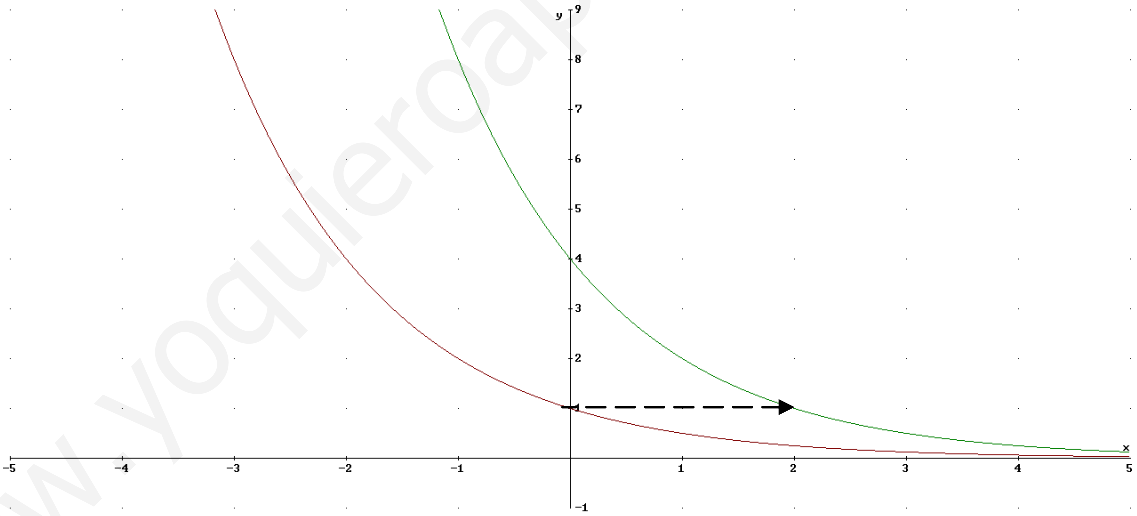
Ejercicio 8: representar las siguientes gráficas sin necesidad de tabla de valores, sólo a partir de la gráfica de $y=(0.5)^x$ y de $y=2^x$

a) $y=4\cdot 0.5^x=4\cdot(1/2)^x=(1/2)^{-2}(1/2)^x \rightarrow y=(1/2)^{x-2} \rightarrow x_0=2$ (desplazamos 2 ejeOX)
b) $y=2^x-3 \rightarrow y_0=-3$ (desplazamos -3 en eje OY)

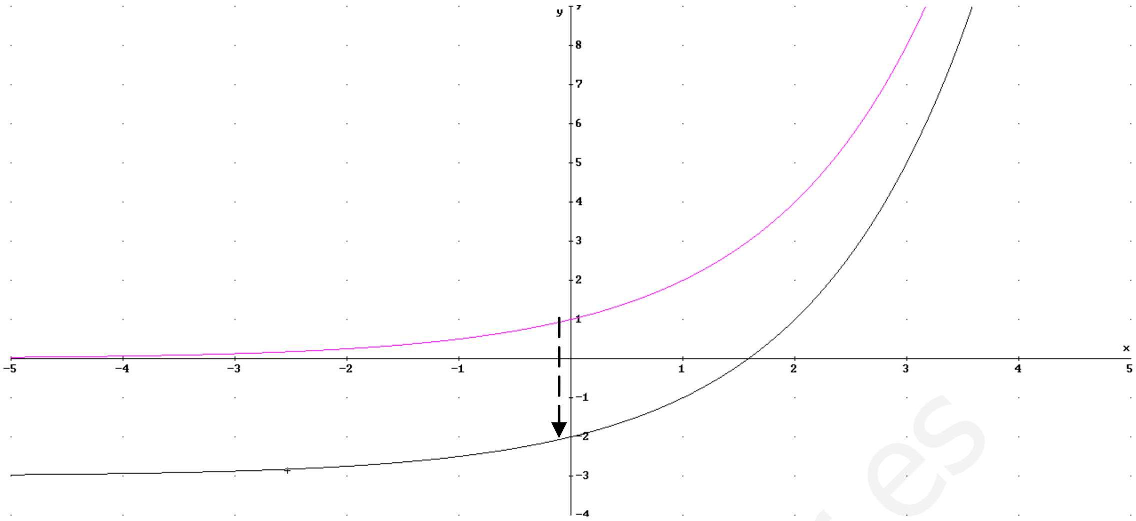


Solución:

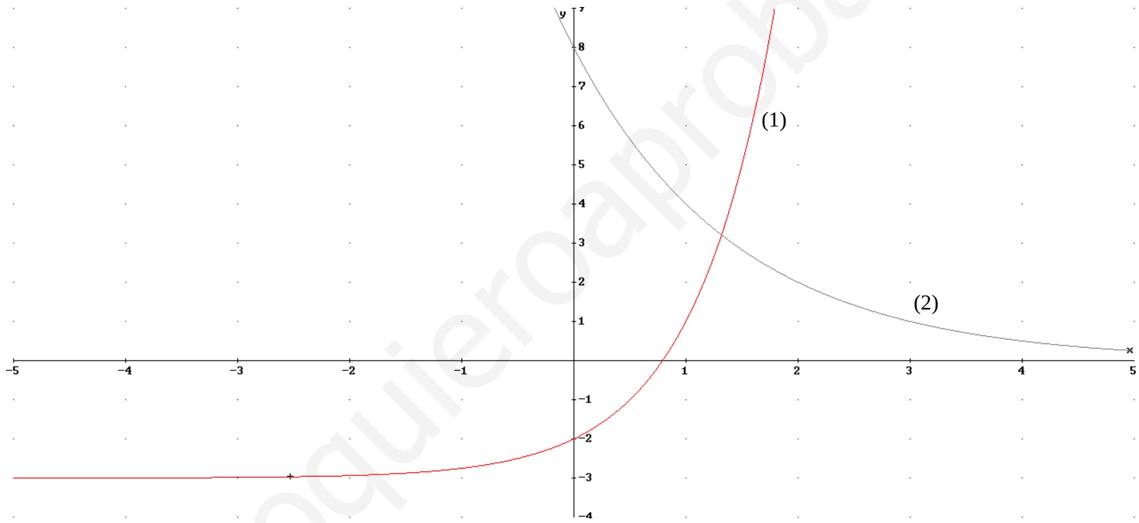
a)



b)



Ejercicio 9: Identifica la expresión analítica de las siguientes funciones exponenciales:



Solución:

(1) Es decreciente luego la base menor que uno. La asíntota sigue siendo el eje OX, luego está desplazado en el eje OY. Para ver lo que se desplaza miramos a ver en qué valor de x la y=1, que en la gráfica no desplazada ocurren en x=1. Si y=1 → x=3. Luego x_0=3. Calculemos la base:

$y=a^{x-3}$ pasa por el punto (0,8)→$8=a^{-3}$ $a^3=1/8$ → a=1/2
$y=(1/2)^{x-3}$

(2) Es creciente luego la base es mayor que uno. La asíntota horizontal es y=-3, luego está desplazada -3 unidades en el eje OY→ y_0=-3. Calculemos la base: $y=a^x-3$ pasa por el punto (0,-2) →$-2=a^0-3$ →-2=1-3. No da información, busquemos otro punto el (1,-1) → $-1=a^1-3$ → a=2
$y=2^x-3$

5. Función logarítmica

5.1 Introducción al logaritmo. Significado

Definición: el logaritmo es la operación inversa al exponente, así :

$y=\log_a x \rightarrow a^y=x$

Elementos del logaritmo:

- Base del logaritmo, a.
- Argumento del logaritmo x

Ejemplos:

$\log_{10}100=2 \rightarrow 10^2=100$

$\log_2 8=3 \rightarrow 2^3=8$

$\log_3(1/9)=-2 \rightarrow 3^{-2}=1/9$

$\log_{10}0{,}001=-3 \rightarrow 10^{-3}=1/1000=0.001$

Notación: $\log_{10} x=\log x$. Los logaritmos decimales son los que aparecen en la calculadora.

Propiedades (muy importantes):

1. $\log_a a=1$; $\log_a 1=0$
2. $\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1\cdot x_2)$. Ejemplo $\log_2 8+\log_2 4=\log_2 32 \rightarrow 3+2=5$
3. $\log_a x_1-\log_a x_2=\log_a(x_1/x_2)$. Ejemplo $\log_2 8-\log_2 4=\log_2 2 \rightarrow 3-2=1$
4. $\log_a(x)$ no existe si $x\leq 0$. Pues $a^y>0$. Ejemplo log(-2) y log(0) no existen
5. $n\cdot\log_a x=\log_a x^n \rightarrow$ Ejemplo: $-2\cdot\log(10)=\log(10^{-2}) \rightarrow -2\cdot 1=-2$
6. $\log_a(a^n)=n \rightarrow \log_3 3^2=\log_3 9=2$
7. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Esta última propiedad muy útil para calcular logaritmos con la calculadora. Ejemplo $\log_2 6=\dfrac{\log 6}{\log 2}=\dfrac{0{,}778}{0{,}301}=2{,}58$. Comprobación: $2^{2.58}\approx 6$

Ejercicio 10: Calcular los siguientes logaritmos exactos sin usar la calculadora:

a) $\log_6 1296$

b) $\log_2 0{,}125$

c) $\log_3\sqrt{27}$

d) $\log_5 625$

e) $\log_{1/5}25$

Solución:

a) $11296=6^4 \rightarrow \log_6 1296=4$

b) $0{,}125=\dfrac{1}{4}=2^{-2} \rightarrow \log_2 0{,}125=-2$

c) $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3^{3/2} \rightarrow \log_3\sqrt{27}=3/2$

d) $625=5^4 \rightarrow \log_5 625=4$

e) $25=5^2=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ → $\log_{1/5}25=-2$

Ejercicio 11: Utiliza la tecla de la potencia x^y para calcular con aproximación de centésimas el siguiente logaritmo: $\log_7 32$

Solución: $\log_7 32 \approx 1.78$

Ejercicio 12: Calcular la incógnita

a) $y=\log_4\sqrt{2}$

b) $-4=\log_b 2$

c) $-\frac{1}{2}=\log_4 x$

Solución:

a) $\sqrt{2}=2^{1/2}=\left(4^{1/2}\right)^{1/2}=4^{1/4}$ → $\log_4\sqrt{2}=\frac{1}{4}$

b) $-4=\log_b 2$ → $b^{-4}=2$ → $1=2\cdot b^4$ → $b^4=1/2$ → $b=\sqrt[4]{1/2}$

c) $-\frac{1}{2}=\log_4 x$ → $x=4^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

Ejercicio 12: Sabiendo que $\log_b(x)=0{,}5$, $\log_b(y)=0{,}2$, $\log_b(z)=0{,}3$, se cumple $a=\frac{x^3}{yz}$, calcular $\log_b a$ y luego el valor de a. Nota aplicar las propiedades de logaritmos:

Solución:

$\log_b\left(\frac{x^3}{yz}\right)=\log_b(x^3)-\log_b(yz)=3\cdot\log_b(x)-(\log_b(y)+\log_b(z))=3\cdot 0{,}5-(0{,}2+0{,}3)=1$

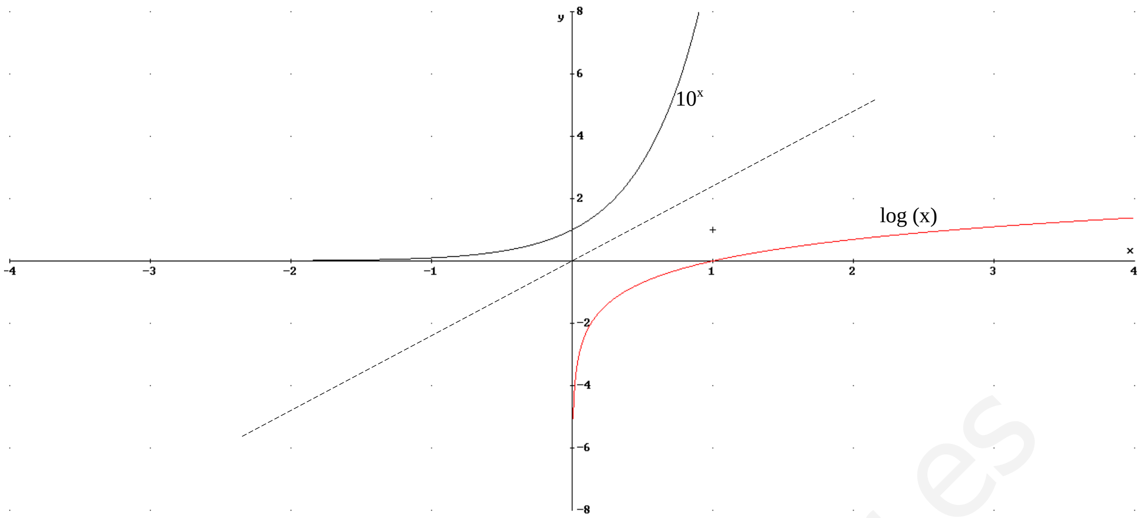
$\log_b(a)=1$ → $a=b$

5.2 Representación del logaritmo

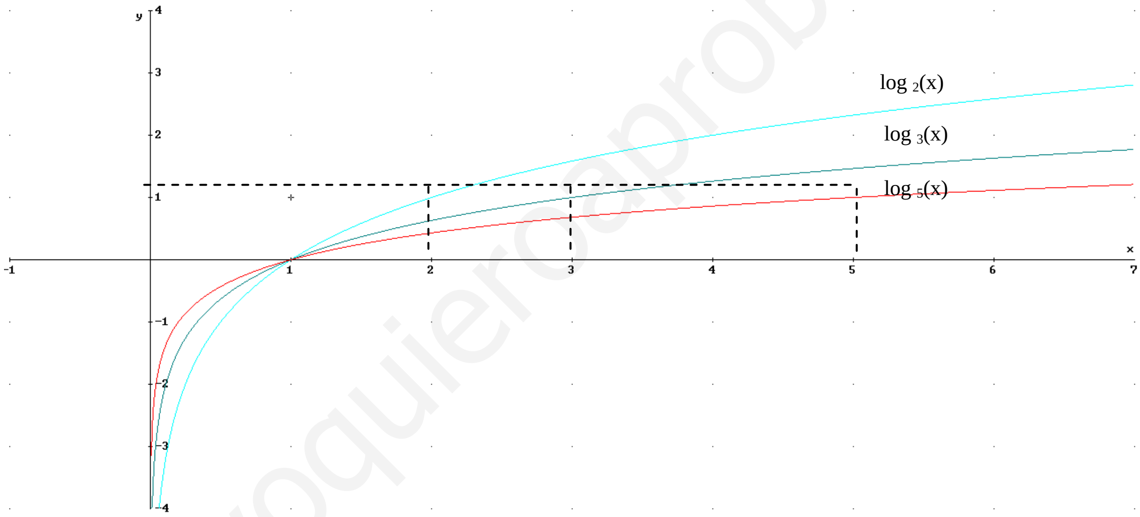
La gráfica de $y=\log_a x$ es simétrica respecto a la recta $y=x$ (bisectriz de los ejes). Para representarla podemos distinguir entre cuando $a>1$ y $0<a<1$:

1) <u>a>1</u>

Ejemplo: y=log (x)



Veamos cómo son las gráfica según el valor de a (siendo en las dos a mayor que uno):

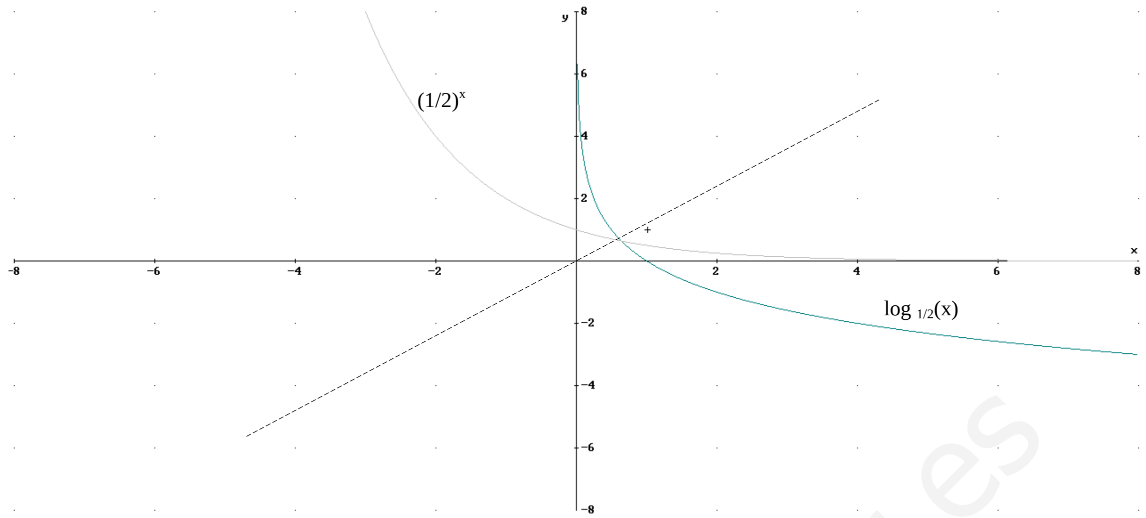


Propiedades y=log$_a$x con a>1:

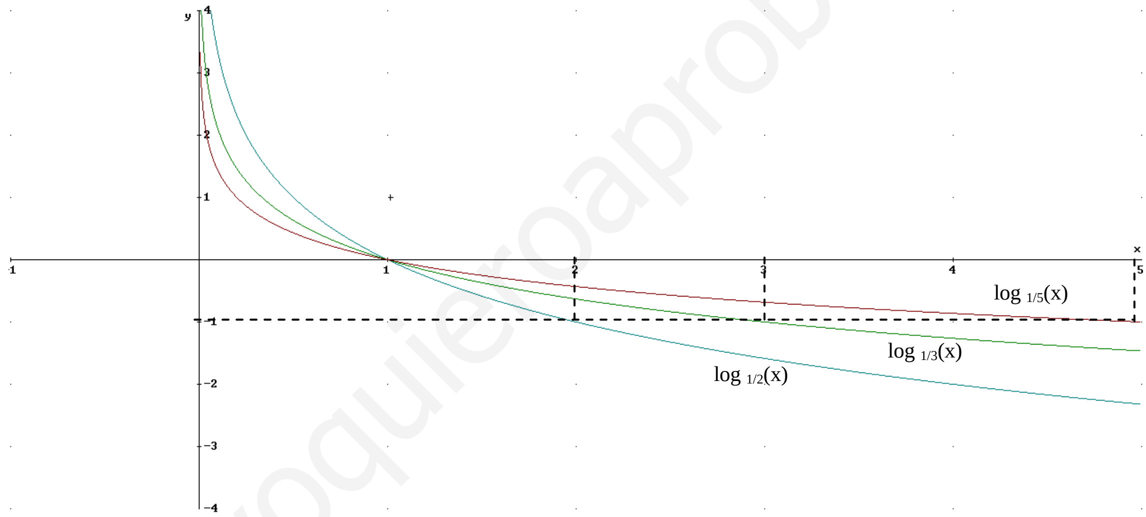
1) Dom=R^+=(0,∞)
2) Asíntota vertical x=0 tendiendo y→-∞
3) Pasa por (a,1) y por (1,0)
4) Creciente
5) Convexa
6) Cuanto mayor sea a menos crece

2) <u>a<1</u>

Ejemplo: y=log$_{1/2}$(x)



Veamos cómo son las gráfica según el valor de a (siendo en las dos menor que uno):



Propiedades $y=\log_a x$ con $0<a<1$:

1) $Dom=R^+=(0,\infty)$
2) Asíntota vertical x=0 tendiendo $y\rightarrow\infty$
3) Pasa por (a,-1)
4) Decreciente
5) Concava
6) Cuanto menor sea a (más cerca de cero) menos decrece

5.3 Problemas con logaritmos y exponenciales. Ecuaciones y sistemas

Ecuaciones con logaritmos: para resolver las ecuaciones logarítmicas tendremos que agrupar los logaritmos en uno sólo o en uno por cada lado de la igualdad. Una vez que tengamos un único logaritmo o uno por cada lado de la igualdad, para quitarnos el logaritmo tomamos el exponente.

Ejemplo:

$\log_2$**(**-8x-4)-$\log_2(x^2)$=2→ $\log_2\left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)=2$ → $\left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)$ =2^2 → $\left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)$ =4→ (-8x-4)=4·x^2 → $4x^2$+8x+4=0 → x=-1. Tenemos que comprobar que la solución es válida, pues puede ocurrir que el logaritmo sea negativo:

x=-1 → $\log_2\left(\frac{8-4}{(-1)^2}\right)=\log_2(2)=2$

Ejercicio 13, resolver:

1) 3·log(x)-log(32)=log(x)-log(2)
2) 2·log(x)+log(2)=log(x+1)
3) $\log_3(2)+\log_3(x-3)=(1/2)\cdot\log_3(2x)$

Solución:

1) $\log(x^3)$ -log(32)=log(x)-log(2) → $\log\left(\frac{x^3}{32}\right)=\log\left(\frac{x}{2}\right)$ → $\left(\frac{x^3}{32}\right)=\left(\frac{x}{2}\right)$ →x^3=16x →$x(x^2-16)=0$ →x=0, x=4, x=-4.

   Comprobación:

   x=0 →log(0)=log(0) pero no existe el logaritmo de cero, luego no es solución

   x=-4 → log(-2)=log(-2) no existe el logaritmo de cero, luego no es solución

   x=4 →log(2)=log(2) si es solución

2) $\log(x^2)$+log(2)=log(x+1)→ $\log(2\cdot x^2)=\log(x+1)$ → $2x^2$=x+1→$2x^2$-x-1=0→ →x=1, x=-1/2. Los dos soluciones son válidas:

   x=1 →log(2)=log(2)

   x=1/2→ log(1/2)=log(1/2)

3) $\log_3(2\cdot(x-3))=\log_3\left(\sqrt{2x}\right)$→ 2x-6= $\sqrt{2x}$ → $(2x-6)^2$=2x → $4x^2$-26x+36=0→ x=2, x=9/2. Al elevar al cuadrado debemos comprobar si las dos soluciones son válidas:
   x=2 → 2·2-6≠$\sqrt{2\cdot 2}$. No solución
   x=9/2 → $2\cdot\frac{9}{2}$-6=$\sqrt{2\cdot\frac{9}{2}}$ →3=3. Solución

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4) $\log_5\left(\left(\frac{x}{5}\right)^4\cdot\frac{25}{4}\right)-\log_5(x^2)=0$ → $\log_5\left(\frac{x^4}{100}\right)-\log_5(x^2)=0$ → $\log_5\left(\frac{x^2}{100}\right)=0$

→ $\left(\frac{x^2}{100}\right)=5^0$ → $x^2=100$ → $x=10$, $x=-10$

Ecuaciones con exponente: a) si tenemos una sola potencia igualada a un número, tomamos logaritmo en la misma base en los dos lados de la ecuación(el logaritmos se va con el exponente) obteniendo la solución. **b)** Si tenemos varios exponente tenemos que poner todos los exponentes con misma base y luego hacer un cambio de variable. Con dicho cambio se resuelve la ecuación, y luego se deshace el cambio de variable.

Ejemplo :

a) $3^{x-1}=2$ → $\log_3 3^{x-1}=\log_3 2$ → $(x-1)\cdot\log_3 3=\log_3 2$ → $(x-1)=\log_3 2$ → $x=1+\log_3 2$

b) $3^x+3^{x-1}+9^x=13$ → $3^x+\frac{3^x}{3}+\left(3^x\right)^2=13$ → $y=3^x$ →

$y+y/3+y^2=13$ → $3y+y+3y^2=39$ → $3y^2+4y-39=0$ → $y=3$, $y=-13/3$:

$3=3^x$ → $x=1$

$-13/3=3^x$ → $x=\log_3(-13/3)$ no solución

Ejercicio 14. Resolver:

a) $2^{3x-1}=11$

b) $5^x-5\cdot5^{-x}+4\cdot5^{-3x}=0$

c) $5^{x+1}=1/25$

d) $11^x-11^{x+1}+11^{2x}=-9$

Solución:

a) $2^{3x-1}=11$ → $3x-1=\log_2 11$ → $x=(\log_2 11+1)/3$

b) $5^x-5\cdot5^{-x}+4\cdot5^{-3x}=0$ → $5^x-5\cdot\frac{1}{5^x}+4\cdot\frac{1}{\left(5^x\right)^3}=0$ → $y=5^x$ → $y-\frac{5}{y}+\frac{4}{y^3}=0$ →

$y^4-5y^2+4=0$ → $y=\pm2$, $y=\pm1$.

$y=2$ → $5^x=2$ → $x=\log_5 2$

$y=1$ → $5^x=1$ → $x=\log_5 1=0$

$y=-2$ → $5^x=-2$ → $x=\log_5(-2)$ no existe

$y=1$ → $5^x=-1$ → $x=\log_5(-1)$ no existe

c) $5^{x+1}=1/25$ → $x+1=\log_5(1/25)$ → $x=-2-1=-3$

d) $11^x - 11^{x+1} + 11^{2x} = -9 \rightarrow 11^x - 11\cdot 11^x + (11^x)^2 = -9 \rightarrow y = 11^x \rightarrow y - 11y + y^2 = -9 \rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0 \rightarrow y = 9,\ y = 1$

$11^x = 9 \rightarrow x = \log_{11} 9$

$11^x = 1 \rightarrow x = \log_{11} 1 = 0$

Sistemas: se resuelven o bien haciendo cambio de variables u obteniendo ecuaciones sin logaritmos y exponentes.

a) $\left.\begin{array}{r} \log(x) - \log_2(y) = 1 \\ 2\log(x) + \log_2(y) = 5 \end{array}\right\}$

Solución

$\log(x) = X,\ \log_2(y) = Y \rightarrow \left.\begin{array}{r} X - Y = 1 \\ 2X + Y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} X = 2 \rightarrow x = 100 \\ Y = 1 \rightarrow y = 2 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} + 1 = 3^{y+1} \end{array}\right\}$

Solución

$\left.\begin{array}{r} 2^x + 3^y = 7 \\ 2\cdot 2^x + 1 = 3\cdot 3^u \end{array}\right\}\ 2^x = X,\ 3^y = Y \rightarrow \left.\begin{array}{r} X + Y = 7 \\ 2\cdot X + 1 = 3\cdot Y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} X = 4 \rightarrow x = 2 \\ Y = 3 \rightarrow y = 1 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r} \log(x) + \log(y) = 3 \\ x + y = 70 \end{array}\right\}$

Solución:

$\left.\begin{array}{r} \log(x\cdot y) = 3 \\ x + y = 70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} (x\cdot y) = 10^3 \\ x + y = 70 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x_1 = 20,\ y_1 = 50 \\ x_1 = 50,\ y_1 = 20 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2^x\cdot 4^y = 8 \\ x + y = 22 \end{array}\right\}$

Solución:

$\left.\begin{array}{r} 2^x\cdot 2^{2y} = 8 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2^{x+2y} = 8 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x = 1 \\ y = 1 \end{array}$

e) $\left.\begin{array}{l} \log(x+y) - \log(x-y) = \log(5) \\ 2^x / 2^y = 2 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\log\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\log(5)\\ 2^{x-y}=2\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=5\\ x-y=1\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=5x-5y\\ x-y=1\end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l}x=3\\ y=2\end{array}$$

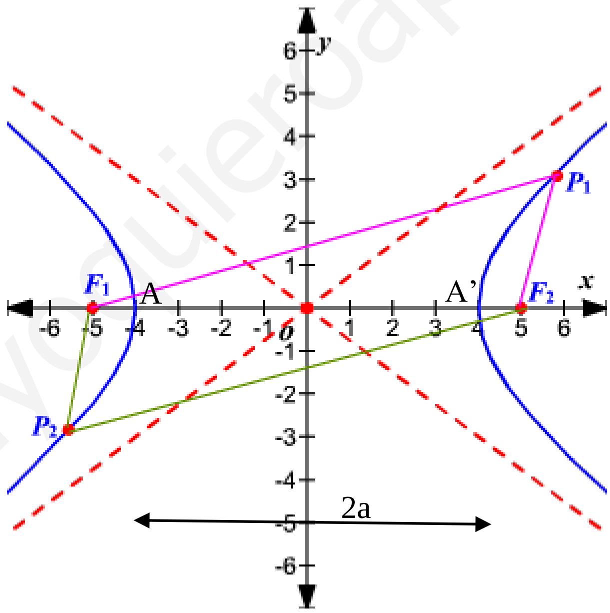
6. Función proporcionalidad inversa.

6.1. Generalidades

Las funciones de proporcionalidad inversa son funciones de la forma $y=f(x)=y_0+\dfrac{k}{x-x_0}$, se llaman así porque cuando aumenta la x la y disminuye, de hecho para el caso más sencillo que veremos en el siguiente apartado y=k/x se cumple que la y y la x son inversamente proporcionales de constante de proporcionalidad k.

La gráfica de estas funciones son hipérbolas giradas 45º de tal forma que siempre tiene una asíntota horizontal $y=y_0$ y otra vertical $x=x_0$.

Veamos ***geométricamente la definición de hipérbola***: es una curva abierta y plana, con dos ramas, que se definen como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias r'-r, a dos puntos fijos F y F', denominados focos, es constante e igual a 2a, siendo 2a la longitud del eje real A-A' de la hipérbola.



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

6.2. Caso más sencillo y=f(x)=$\frac{k}{x}$

Este es el caso más sencillo pero a partir del que podemos obtener los demás a partir de desplazamientos verticales y horizontales. Sus características son las siguientes:

1) Dom(f(x))=$\mathbb{R}-\{0\}$
2) No puntos de corte
3) Asíntota vertical x=0 y horizontal y=0
4) Si k>0 siempre decreciente y si k<0 siempre creciente.
5) Curvatura: si k>0 → cóncava (∪) en (0,∞), convexa (∩) de (-∞,0). Si k<0 al revés
6) Simetría impar.
7) Cuanto mayor sea |k| más separado de las asíntotas (crece o decrece más despacio).

Veamos 4 ejemplos:

a) y=f(x)= $\frac{1}{x}$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	0.1	1	10	$\pm\infty$	-10	-1	-0.1

b) y=f(x)= $\frac{-1}{x}$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	-0.1	-1	-10	$\pm\infty$	10	1	0.1

c) y=f(x)= $\frac{5}{x}$

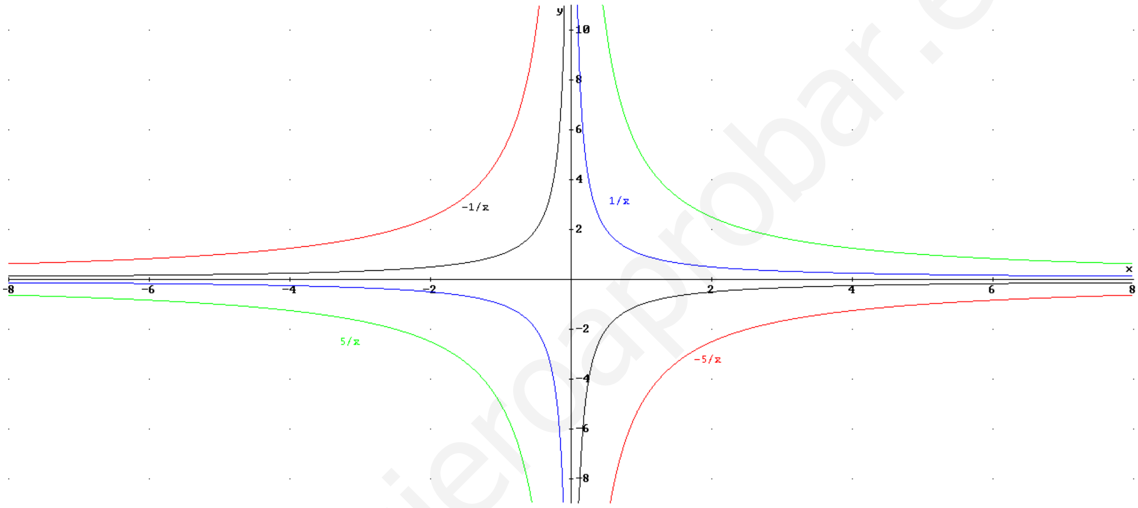
x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	0.5	5	50	$\pm\infty$	-50	-5	-0.5

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

d) $y=f(x)=\frac{-5}{x}$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	-0.5	-5	-50	$\pm\infty$	50	5	0.5

Gráficas:



6.3. Desplazada verticalmente $y=f(x)=\frac{k}{x}+y_0$

Es equivalente al caso anterior pero desplazado y_0 unidades en vertical, tal que si $y_0>0$ desplazamiento hacia arriba y si $y_0<0$ el desplazamiento es hacia abajo:

1) $Dom(f(x))=\mathbb{R}-\{0\}$
2) Corte con eje OX en $(-y_0/k,0)$
3) Asíntota vertical x=0 y horizontal $y=y_0$
4) Si k>0 siempre decreciente y si k<0 siempre creciente.
5) Curvatura: si k>0 → cóncava (∪) en (0,∞), convexa (∩) de (-∞,0). Si k<0 al revés
6) No simetría
7) Cuanto mayor sea |k| más separado de las asíntotas (crece o decrece más despacio).

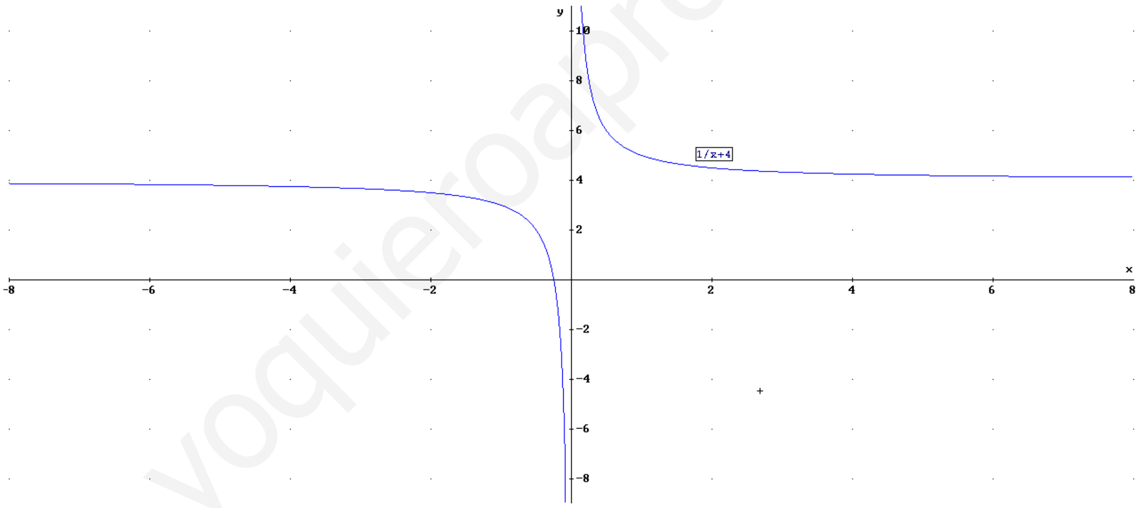
Veamos 2 ejemplos:

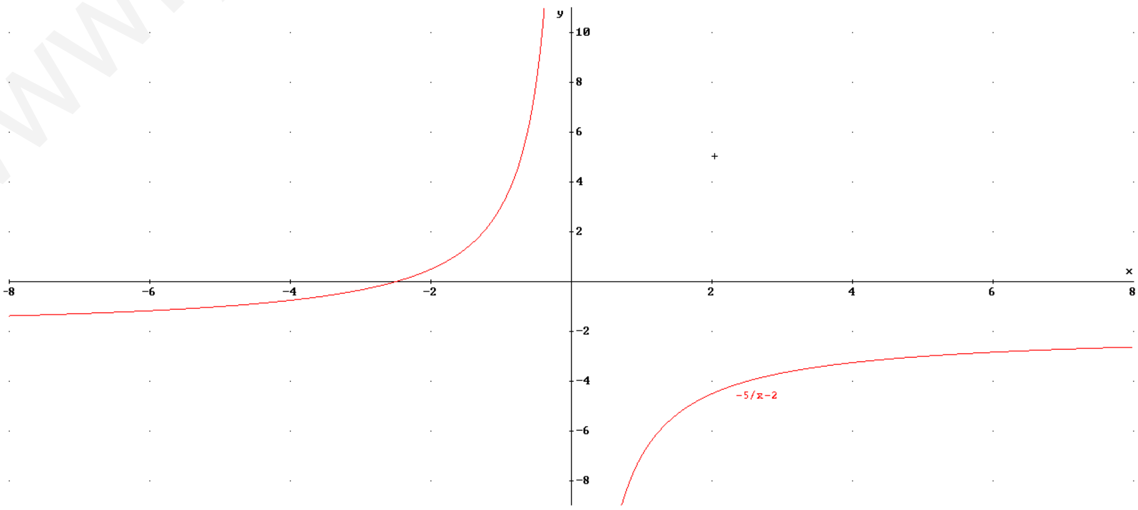
a) y=f(x)=$\frac{1}{x}+4$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	4.1	5	14	$\pm\infty$	-6	3	3.9

b) y=f(x)=$-\frac{5}{x}-2$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	-1.5	3	48	$\pm\infty$	-52	-7	-2.5





6.4. Desplazada Horizontalmente $y=f(x)=\frac{k}{x-x_0}$

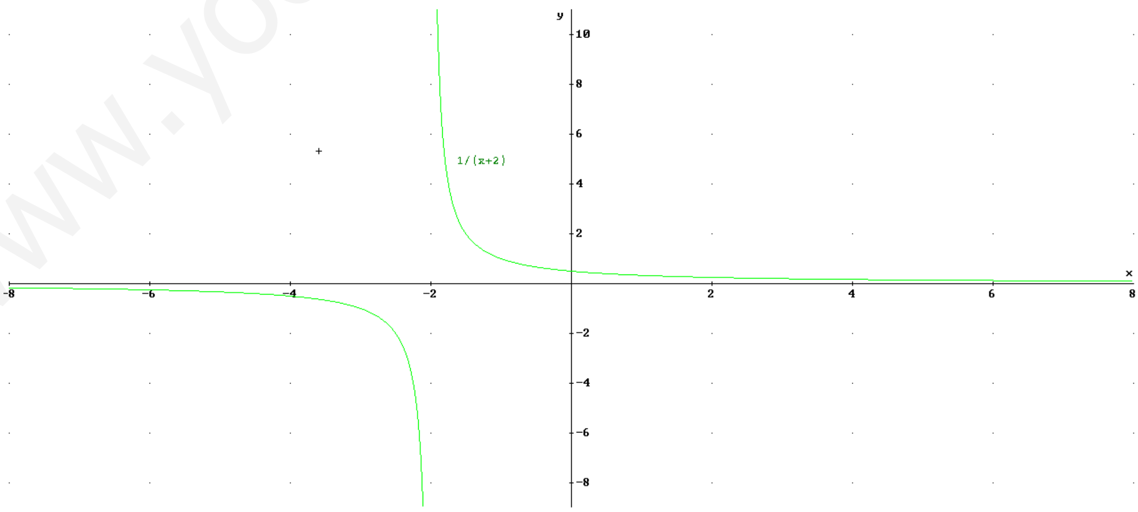
Es equivalente al caso 6.2 pero desplazado x_0 unidades en horizontal, tal que si $x_0>0$ desplazamiento hacia la derecha y si $y_0<0$ el desplazamiento es hacia la izquierda:

1) $Dom(f(x))=\mathbb{R}-\{x_0\}$
2) Corte con eje OY en $(0,-k/x_0)$
3) Asíntota vertical $x=x_0$ y horizontal $y=0$
4) Si k>0 siempre decreciente y si k<0 siempre creciente.
5) Curvatura: si k>0 → cóncava (∪) en (x_0,∞), convexa (∩) de $(-\infty,x_0)$. Si k<0 al revés
6) No simetría
7) Cuanto mayor sea |k| más separado de las asíntotas (crece o decrece más despacio).

Veamos 2 ejemplos:

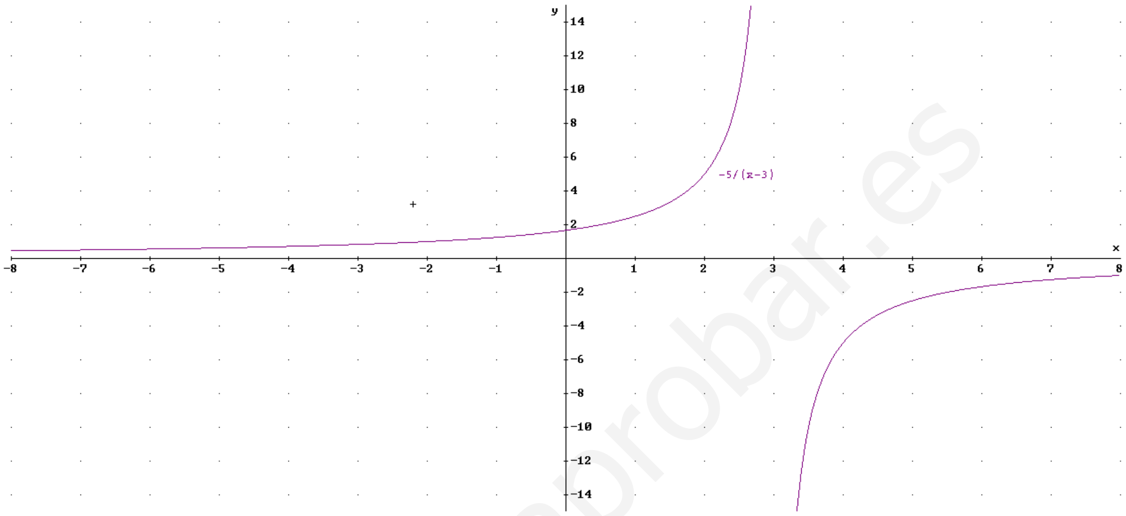
a) $y=f(x)=\frac{1}{x+2}$

x	8	-1	1.9	-2	-2.1	-3	-12
y	0.1	1	10	$\pm\infty$	-10	-1	-0.1



b) $y=f(x)=-\frac{5}{x-3}$

x	13	2	3.1	3	2.9	2	-7
y	-0.5	-5	-50	$\pm\infty$	50	5	0.5



6.5. Caso general (desplazada vertical y horizontalmente) $y=f(x)=\frac{k}{x-x_0}+y_0$

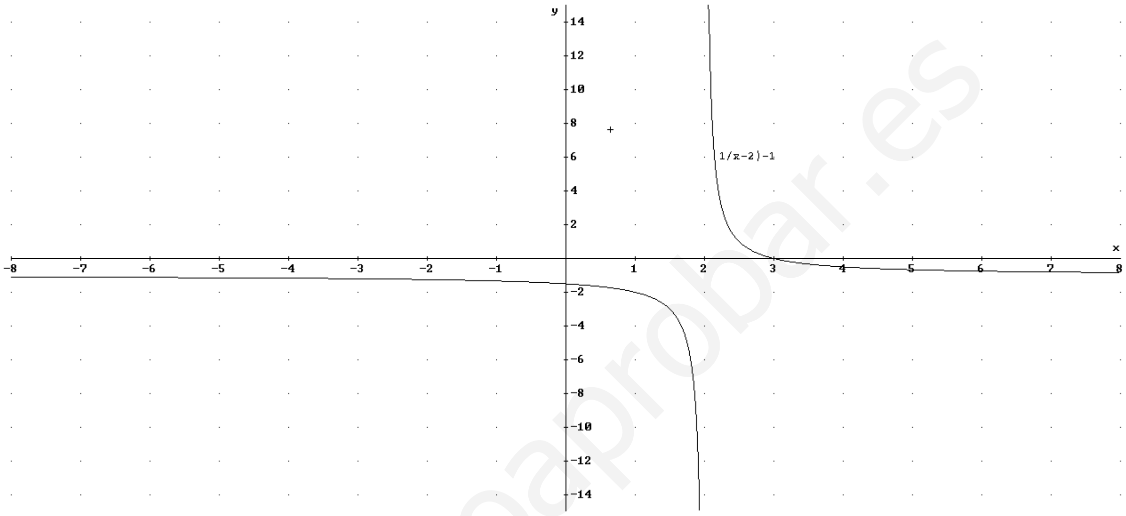
Es equivalente al caso 6.2 pero desplazado x_0 unidades en horizontal e y_0 en vertical:

1) Dom(f(x))=ℝ-{x_0}
2) Corte con eje OY en ($-y_0/k+x_0$,0) y eje OX en (0,$-k/x_0+y_0$)
3) Asíntota vertical $x=x_0$ y horizontal $y=y_0$
4) Si k>0 siempre decreciente y si k<0 siempre creciente.
5) Curvatura: si k>0 → cóncava (∪) en (x_0,∞), convexa (∩) de (-∞,x_0). Si k<0 al revés
6) No simetría
7) Cuanto mayor sea |k| más separado de las asíntotas (crece o decrece más despacio).

Veamos 2 ejemplos:

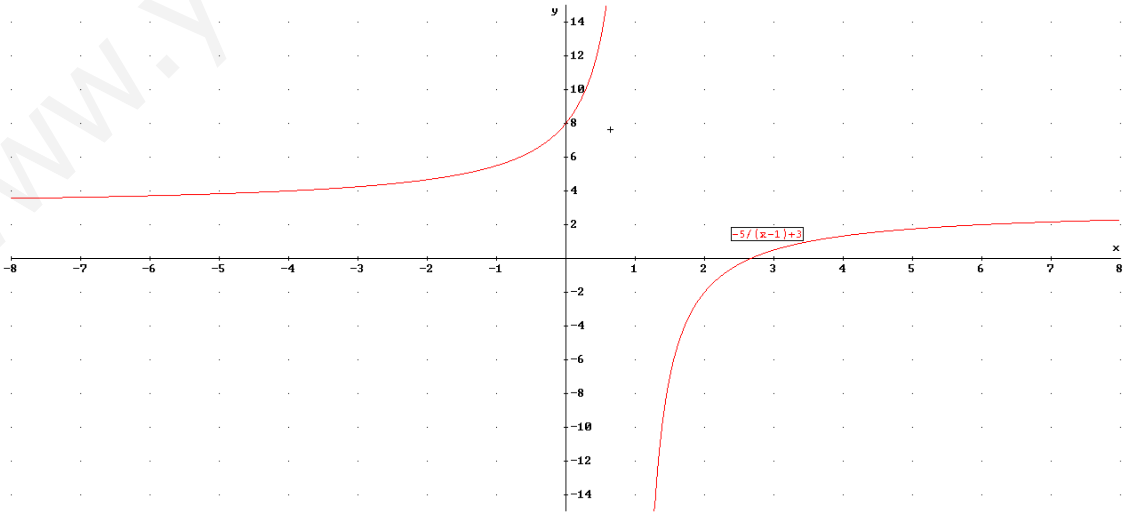
a) y=f(x)= $\frac{1}{x-2}-1$

x	12	3	2.1	2	1.9	1	-8
y	-0.9	0	9	$\pm\infty$	-11	-2	-1.1



b) y=f(x)= $\frac{-5}{x-1}+3$

x	11	2	1.1	1	0.9	0	-9
y	2.5	-2	-47	$\pm\infty$	53	8	3.5

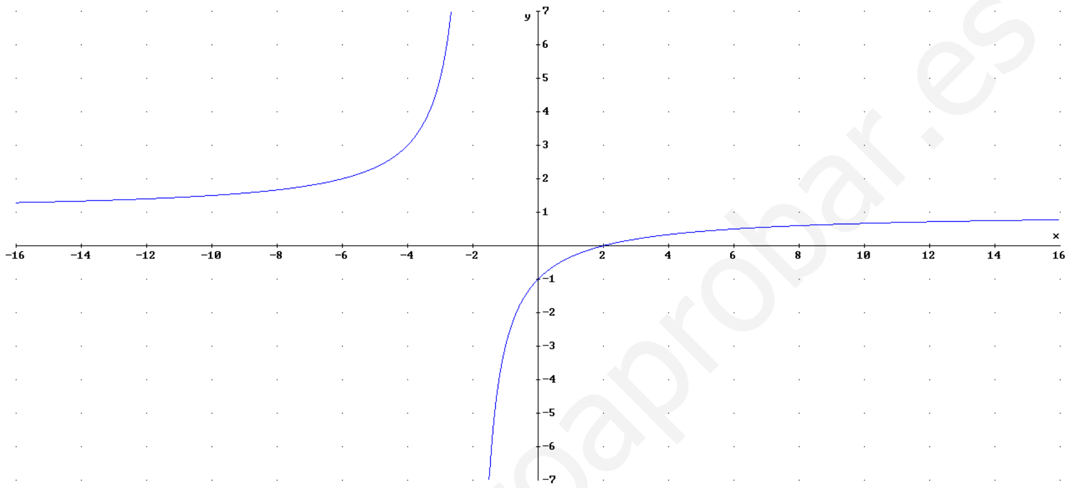


 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Podemos encontrar estas gráficas de manera "camuflada" siendo de la forma $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ donde el valor de k, x_0 y y_0 se encuentra haciendo la división. Veamos un **ejemplo**:

$y=f(x)=\frac{x-2}{x+2} \rightarrow y=f(x)=1+\frac{-4}{x+2}$

$$\begin{array}{l|l} x-2 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-x-2} & \quad 1 \\ \quad \underbrace{-4} & \end{array}$$



Ejercicio 15: Representar las siguientes funciones:

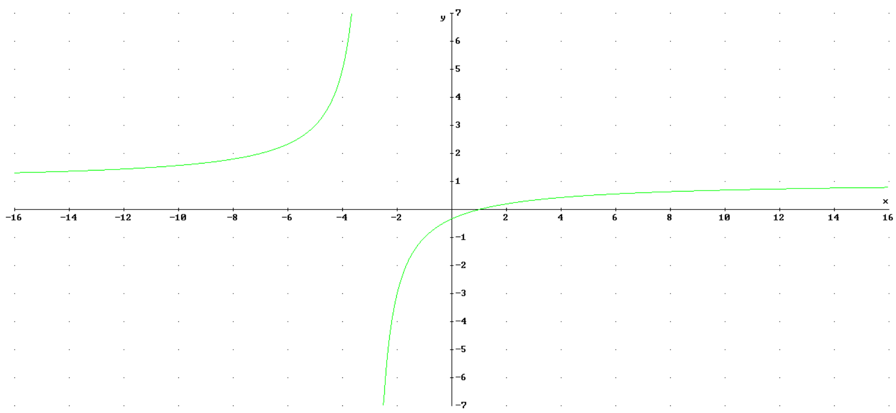
a) $y=f(x)=\frac{x-1}{x+3}$

b) $y=f(x)=\frac{-2x+2}{x-3}$

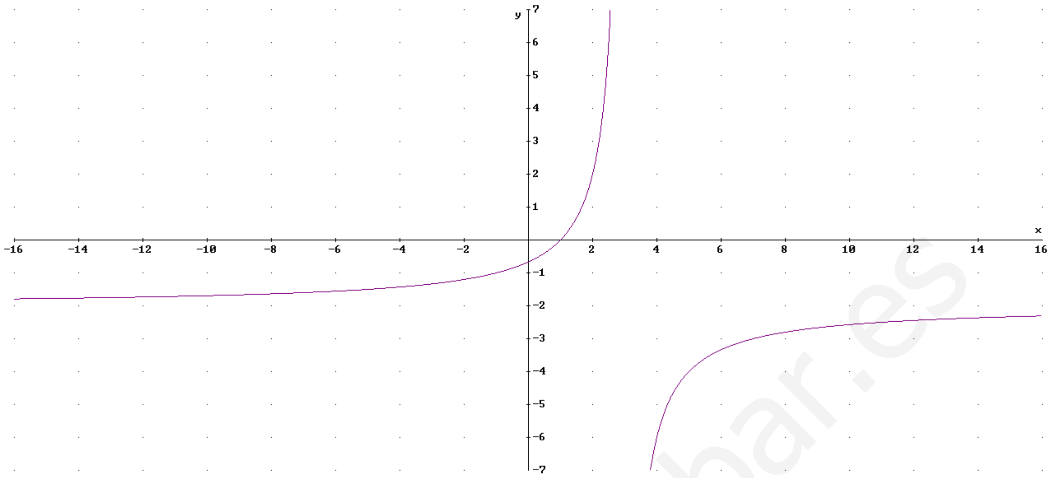
c) $y=f(x)=\frac{5x+1}{x-2}$

Solución

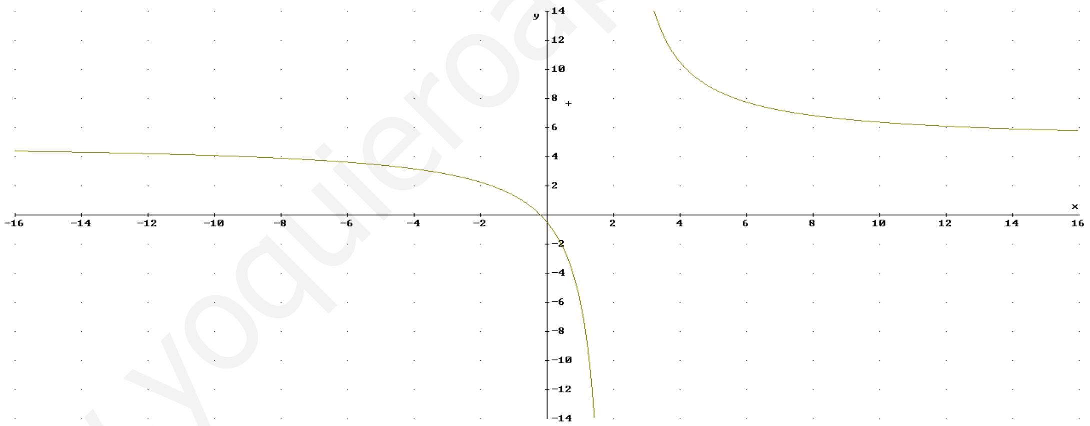
a) $\begin{array}{l|l} x-1 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-x-3} & \quad 1 \\ \quad \underbrace{-4} & \end{array} \rightarrow y=f(x)=1+\frac{-4}{x+3}$



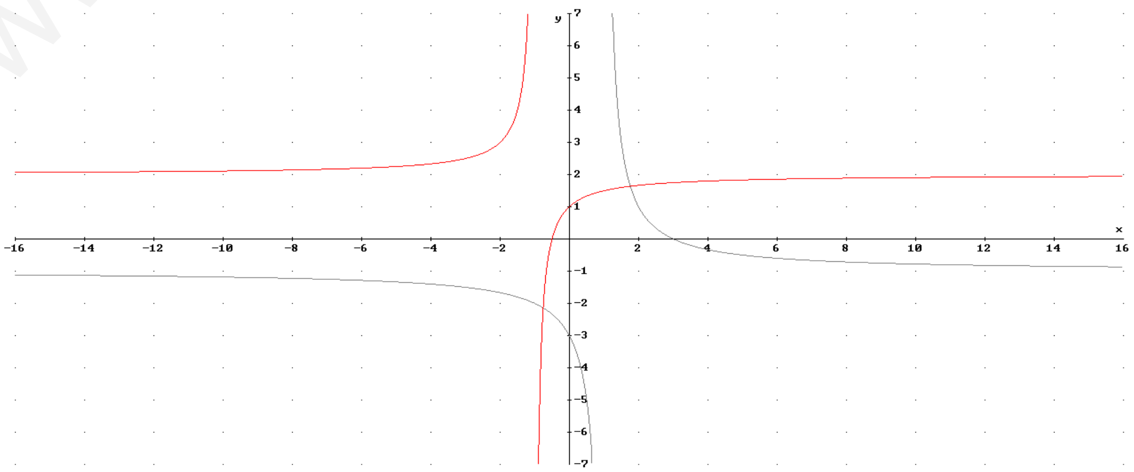
b) $\begin{array}{l|l} -2x+2 & x-3 \\ \hline \underline{2x\ \ -6} & -2 \\ \quad\ \ \underbrace{-4} & \end{array} \rightarrow y=f(x)=-2+\frac{-4}{x-3}$



c) $\begin{array}{l|l} 5x+1 & x-2 \\ \hline \underline{-5x+10} & 5 \\ \quad\ \ \underbrace{11} & \end{array} \rightarrow y=f(x)=5+\frac{11}{x+2}$



Ejercicio 16: Identifica la expresión analítica de las siguientes gráficas:



Solución:

a) (Roja) AV:x=x_0=-1; AH y=y_0=2 → y=$\frac{k}{x+1}+2$. Para calcular k tomamos el punto (0,1): 1=$\frac{k}{0+1}+2$ → k=-1. Luego la función es$y=\frac{-1}{x+1}+2$

b) (azul) AV:x=x_0=1; AH y=y_0=-1 → y=$\frac{k}{x-1}-1$. Para calcular k tomamos el punto (0,-3): -3=$\frac{k}{0-1}-1$ → k=2. Luego la función e$y=\frac{2}{x-1}-1$

Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)