

Rectas y parábolas

EJERCICIO 19 : Resuelve gráfica y analíticamente los sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 11 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

a)

Resolución analítica: Despejamos y de cada ecuación e igualamos:

$$x^2 + 2x - 3 = 1 - x \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}$$

Si $x = -4 \rightarrow y = 1 + 4 = 5$

Si $x = 1 \rightarrow y = 0$

Las soluciones son: $x = -4, y = 5$; $x = 1, y = 0$

Resolución gráfica

- Representamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

— Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow y = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(-1, -4)$

— Cortes con los ejes:

Eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

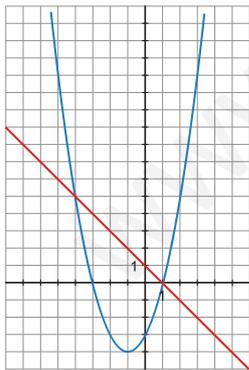
Eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} (1, 0) \text{ y } (-3, 0)$

— Valores en torno al vértice:

X	-4	-2	-1	0	2
Y	5	-3	-4	-3	5

- Representamos la recta $y = 1 - x$:

x	1	0
y	0	1



Observamos en la gráfica que la parábola y la recta se cortan en $(-4, 5)$ y $(1, 0)$.

b)

Resolución analítica : Despejamos y de cada ecuación e igualamos:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = \frac{x-3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = \frac{x-3}{3} \\ 3x^2 - 12x + 15 = x - 3 \end{cases} \rightarrow 3x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 216}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{-47}}{6} \Rightarrow \text{El sistema no tiene solución.}$$

Resolución gráfica

- Representamos la parábola $y = x^2 - 4x + 5$:

— Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y = 4 - 8 + 5 = 1 \Rightarrow V(2, 1)$

— Puntos de corte con los ejes:

Con el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

Con el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow$

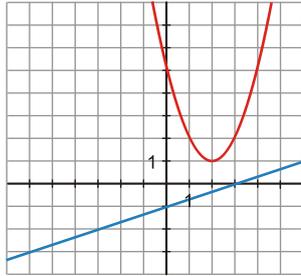
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \text{La parábola no corta al eje X.}$$

— Puntos próximos al vértice:

X	0	1	2	3	4
Y	5	2	2	2	5

- Representamos la recta $y = \frac{x-3}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}x - 1$.

x	0	3
y	-1	0



Se observa en la gráfica que la parábola y la recta no se cortan.

c)

Resolución analítica: Se despeja y de cada ecuación y se igualan:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 11 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} -2x^2 + 8x - 11 &= -3 \\ -2x^2 + 8x - 8 &= 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \text{La solución del sistema es: } x = 2, \quad y = -3$$

Resolución gráfica

- Se representa la parábola $y = -2x^2 + 8x - 11$:

— Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-4} = 2$ } $V(2, -3)$
 $y = -8 + 16 - 11 = -3$

— Puntos de corte con los ejes:

Con el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = -11 \rightarrow (0, -11)$

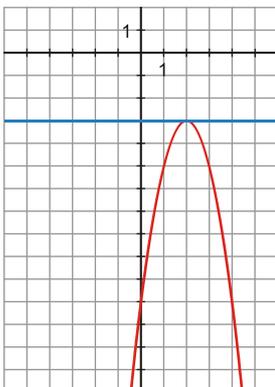
Con el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow -2x^2 + 8x - 11 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 88}}{-4} = \frac{-8 \pm \sqrt{-24}}{-4} \rightarrow \text{No corta al eje X.}$$

— Puntos próximos al vértice:

X	0	1	2	3	4
Y	-11	-5	-3	-5	-11

- Por otro lado, se representa la recta $y = -3$, constante.



Hay un único punto de corte entre la recta y la parábola, que corresponde al punto $(2, -3)$.