Parábolas

EJERCICIO 11 : Representa gráficamente las siguientes parábolas

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ **b)** $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ **c)** $y = 2x^2 - x - 3$ **d)** $y = -25x^2 + 75x$ **e)** $y = -x^2 + 2x - 1$

Solución:

a)

- Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{2}{2} = -2 \Rightarrow$ El vértice es $V(1, -2)$.
- Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \quad y = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

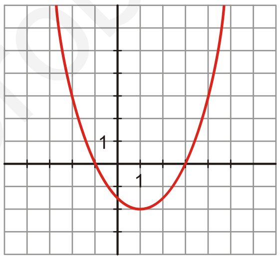
— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Puntos de corte con el eje X: $(3, 0)$ y $(-1, 0)$

- Puntos próximos al vértice:

X	-2	0	1	2	3
Y	5/2	-3/2	-2	-3/2	5/2

- Representación



b)

- Hallamos su vértice: $x = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 4 \rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot 16 - 8 + 4 = 0 \rightarrow V(4, 0)$
- Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

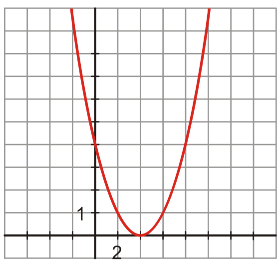
$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow (4, 0)$, que coincide, lógicamente, con el vértice.

— Con eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

- Puntos próximos al vértice:

X	2	3	4	5	6
Y	1	1/4	0	1/4	1

- Representación



c)

- Calculamos su vértice: $x = \frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8} \rightarrow V\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$
- Puntos de corte con los ejes:

— Con eje Y $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $y=-3$ $\rightarrow$ $(0, -3)$

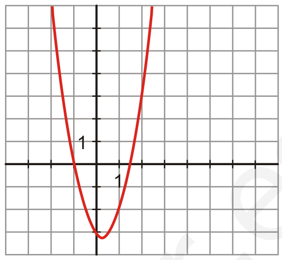
— Con eje X $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $2x^2-x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{4}=\dfrac{1\pm 5}{4} \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje X son: $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ y $(-1,0)$

- Puntos próximos al vértice:

X	-1	0	1/4	1	2
Y	0	-3	--25/8	-2	3

- Representación:



d)

- Hallamos el vértice: $x=\dfrac{-75}{-50}=\dfrac{3}{2}$ $\rightarrow$ $y=\dfrac{-225}{4}+\dfrac{225}{2}=\dfrac{225}{4}$ $\rightarrow$ $V\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{225}{4}\right)$
- Puntos de corte con los ejes:

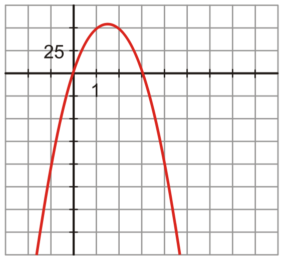
— Con eje Y $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $(0, 0)$

— Con eje X $\rightarrow$ $y=0 \Rightarrow -25x^2+75x=0$ $\rightarrow$ $-25x(x-3)=0 \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,0) \\ x=3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$

- Tabla de valores para obtener puntos próximos al vértice:

X	0	1	3/2	2	4
Y	0	50	225/4	50	-100

- Representación:



e)

- Hallamos su vértice: $x=\dfrac{-2}{-2}=1$ $\rightarrow$ $y=-1+2-1=0$ $\rightarrow$ $V(1,0)$
- Puntos de corte con los ejes:

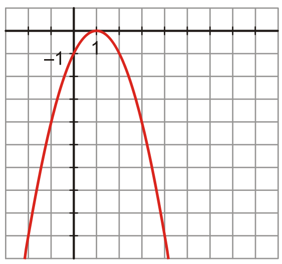
— Con eje Y $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $y=-1$ $\rightarrow$ $(0, -1)$

— Con eje X $\rightarrow$ el único punto de corte será el vértice: $(1, 0)$

- Puntos próximos al vértice:

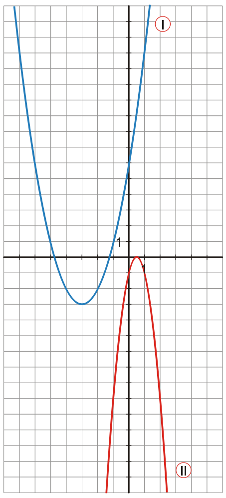
X	-1	0	1	2	3
Y	-4	-1	0	-1	-4

- Representación:

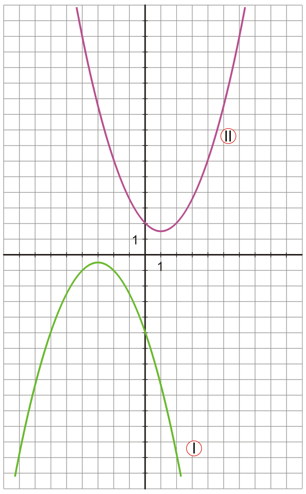


EJERCICIO 12 : Halla las expresiones analíticas de estas parábolas:

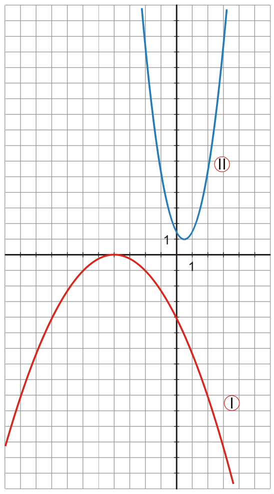
a)



b)



c)



Solución:

a) La expresión analítica de ambas parábolas será de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales que tenemos que calcular a partir de las gráficas.

- Ecuación de la parábola I:
  - Punto de corte con el eje Y: $(0, 6) \rightarrow c = 6$
  - Vértice: $V(-3, -3)$, que además es un punto de la parábola.

$$\text{Así: } \left.\begin{array}{l} \dfrac{-b}{2a} = -3 \rightarrow b = 6a \\ -3 = (-3)^2 a + (-3)b + 6 \end{array}\right\} \rightarrow -3 = 9a - 18a + 6 \rightarrow -9 = -9a \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 6$$

  - La ecuación de la parábola I es: $y = x^2 + 6x + 6$
- Ecuación de la parábola II:
  - Corta al eje Y en $(0, -1) \rightarrow c = -1$

$$\text{— Vértice } V\left(\frac{1}{2}, 0\right): \left.\begin{array}{l} \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2} \rightarrow b = -a \\ 0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 a + \dfrac{1}{2}b - 1 \rightarrow \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a = 1 \rightarrow a - 2a = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = -4 \rightarrow b = 4$$

  - La expresión analítica de la parábola II es: $y = -4x^2 + 4x - 1$

b) Sus ecuaciones serán de la forma $y = ax^2 + bx + c$, a, b, c, números reales.

- Ecuación de la parábola I:
  - Corta al eje Y en el punto $(0, -5)$, luego: $c = -5$
  - El vértice es $V\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$, que así mismo es un punto de la parábola. Luego de aquí obtendremos dos ecuaciones cuyas incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-b}{2a} = -3 \rightarrow b = 6a \\ -\dfrac{1}{2} = (-3)^2 a + (-3)b - 5 \rightarrow -\dfrac{1}{2} = 9a - 3b - 5 \end{array}\right\} -\frac{1}{2} = 9a - 18a - 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} = -9a - 5 \rightarrow -1 = -18a - 10 \rightarrow 9 = -18a \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -3$$

  - La ecuación de la parábola I es: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5$

- Ecuación de la parábola **II**:

  — Corta al eje Y en $(0, 2)$ $\rightarrow$ $c = 2$

$$\left.\begin{array}{l} V\left(1, \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 1 \rightarrow b = -2a \\ \dfrac{3}{2} = a + b + 2 \rightarrow a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a - 2a = -\dfrac{1}{2} \rightarrow -a = -\dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \qquad b = -1 \end{array}$$

  — La ecuación de la parábola **II** es: $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 2$

c) Observamos que ambas son parábolas, luego sus ecuaciones serán de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales.

- Ecuación de la parábola **I**:

— $c = -4$ porque pasa por $(0, -4)$.

— Vértice $V(-4, 0)$, de donde sacamos dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-b}{2a} = -4 \rightarrow b = 8a \\ 0 = 16a - 4b - 4 \end{array}\right\} \rightarrow 16a - 32a = 4 \rightarrow -16a = 4 \rightarrow a = -\dfrac{1}{4} \rightarrow b = -2$$

— La ecuación de la parábola I es: $y = -\dfrac{1}{4}x^2 - 2x - 4$

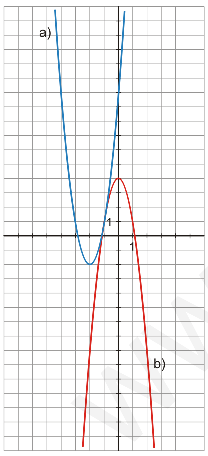
- Ecuación de la parábola **II**:

  — $c = \dfrac{3}{2}$ porque pasa por $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} — V\left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \rightarrow \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2} \rightarrow b = -a \\ 1 = \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{3}{2} \rightarrow 4 = a + 2b + 6 \end{array}\right\} \rightarrow -2 = -a \rightarrow a = 2 \rightarrow b = -2$$

  — La ecuación de la parábola II es: $y = 2x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}$

<u>EJERCICIO 13</u> : Completa las expresiones de estas dos gráficas:



a) $y = \boxed{}\,x^2 + 12x + \boxed{}$

b) $y = \boxed{}\,x^2 + \boxed{}$

Solución:

- Parábola a)

  Punto de corte con el eje Y: $(0, 10)$ $\rightarrow$ $c = 10$

$$\left.\begin{array}{l} V(-2, -2) \\ b = 12 \end{array}\right\} \dfrac{-b}{2a} = -2 \rightarrow -12 = -4a \rightarrow a = 3$$

  Ecuación de a): $y = 3x^2 + 12x + 10$

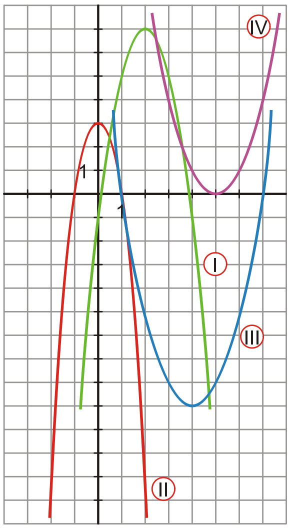
- Parábola b)

  $c = 4$ $\rightarrow$ la ecuación será de la forma $y = ax^2 + 4$. Un punto de la parábola es el $(1, 1)$, así:

  $1 = a + 4 \rightarrow a = -3$

  La ecuación buscada es: $y = -3x^2 + 4$

EJERCICIO 14 : **Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:**



a) $y = (x-5)^2$

b) $y = -2x^2 + 8x - 1$

c) $y = -4x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 8x + 7$

Solución: a) $\rightarrow$ IV b) $\rightarrow$ I c) $\rightarrow$ II d) $\rightarrow$ III

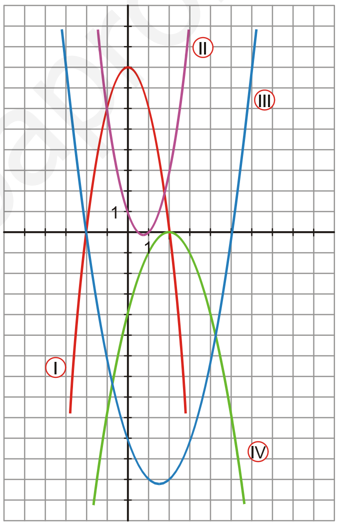
EJERCICIO 15 : **Relaciona cada una de las siguientes expresiones con su gráfica correspondiente:**

a) $y = -2x^2 + 8$

b) $y = x^2 - 3x - 10$

c) $y = -(x-2)^2$

d) $y = 2x^2 - 3x + 1$



Solución: a) $\rightarrow$ I b) $\rightarrow$ III c) $\rightarrow$ IV d) $\rightarrow$ II

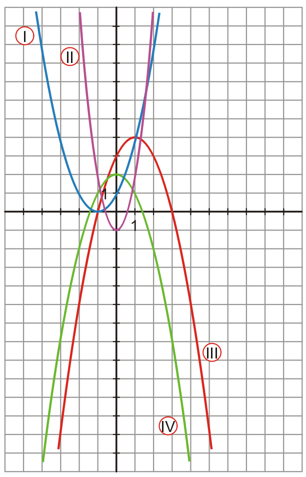
EJERCICIO 16 : **Relaciona cada gráfica con una de las siguientes expresiones:**

a) $y = -x^2 + 2x + 3$

b) $y = (x+1)^2$

c) $y = 3x^2 - 1$

d) $y = 2 - x^2$



Solución: a) $\rightarrow$ III b) $\rightarrow$ I c) $\rightarrow$ II d) $\rightarrow$ IV

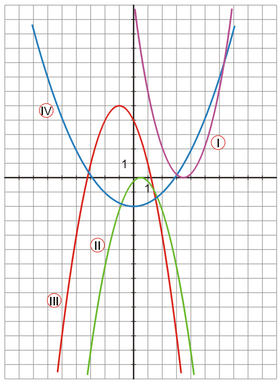
EJERCICIO 17 : **Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:**

a) $y - = x^2 - 2x + 4$

b) $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$

d) $y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$



Solución: a) $\rightarrow$ III b) $\rightarrow$ II c) $\rightarrow$ IV d) $\rightarrow$ I

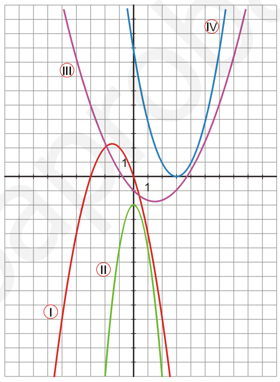
EJERCICIO 18 : **Relaciona cada una de las siguientes expresiones con su gráfica correspondiente:**

a) $y = -x^2 - 3x$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = -2 - 3x^2$

d) $y = \frac{1}{3}x^2 - x - 1$



Solución: a) $\rightarrow$ I b) $\rightarrow$ IV c) $\rightarrow$ II d) $\rightarrow$ III

Rectas y parábolas

EJERCICIO 19 : **Resuelve gráfica y analíticamente los sistemas siguientes:**

a) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 1 - x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 11 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$

Solución:

a)

<u>*Resolución analítica:*</u> Despejamos y de cada ecuación e igualamos:

$$x^2 + 2x - 3 = 1 - x \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow -4 \\ \searrow 1 \end{array}$$

Si $x = -4 \quad \rightarrow \quad y = 1 + 4 = 5$

Si $x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 0$ Las soluciones son: $x = -4,\ y = 5$; $x = 1,\ y = 0$

<u>Resolución gráfica</u>

- Representamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

— Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad y = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(-1, -4)$

— Cortes con los ejes:

Eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = -3 \quad \rightarrow \quad (0, -3)$