1 Conceptos básicos

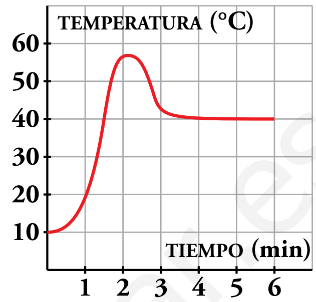
Página 121

1. Esta gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo que se mantiene un rato abierto.

a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?



a) Variable independiente → tiempo (min)

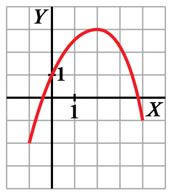
Variable dependiente → temperatura (°C)

b) Para cada valor del tiempo hay un único valor de temperatura.

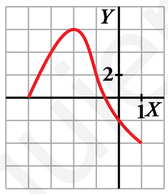
c) Dominio = [0, 6]; Recorrido = [10, 58]

2. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones:

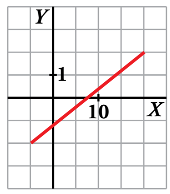
a)



b)



c)



a) *Dom f* = [–1, 4]

Rec f = [–2, 3]

b) *Dom f* = [–4, 1]

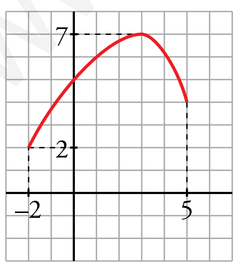
Rec f = [–4, 6]

c) *Dom f* = [–5, 20]

Rec f = [–2, 2]

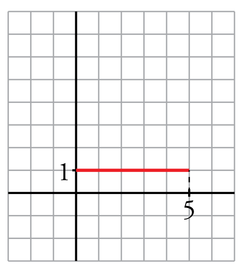
3. Representa una función cuyos dominio y recorrido sean, respectivamente, [–2, 5] y [2, 7]. Inventa otra con dominio [0, 5] y recorrido {1}.

Ejercicio de respuesta abierta. Una posible solución sería:



Dom f = [–2, 5]

Rec f = [2, 7]



Dom f = [0, 5]

Rec f = {1}

2 Cómo se presentan las funciones

Página 122

1. Vamos a analizar la gráfica de arriba correspondiente al precio de la vivienda:

a) ¿Qué quiere decir que la gráfica arranque en el 100 %? ¿Te parece razonable?

b) El máximo fue del 115 %. ¿En qué momento ocurrió? Contesta aproximadamente.

c) ¿Cuál fue el mínimo? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿Cuál fue el índice del precio en el 2006?

a) La gráfica describe la variación (en %) del precio de la vivienda en una región desde 1992 hasta 2016.

Que comience en 100 % significa que se toma como precio de referencia para analizar dicha variación el precio de la vivienda en 1992; lo cual es razonable ya que en ese año comienza el estudio.

b) En el año 2005.

c) El mínimo fue del 87 % aproximadamente. Sucedió en 2013.

d) 110 %, es decir, en el año 2006 el precio de la vivienda había aumentado un 10 % respecto al año 1992.

2. Fíjate en las funciones *altura sobre el nivel del mar - tiempo transcurrido* que se han descrito más arriba referentes a las excursiones realizadas por Félix y María.

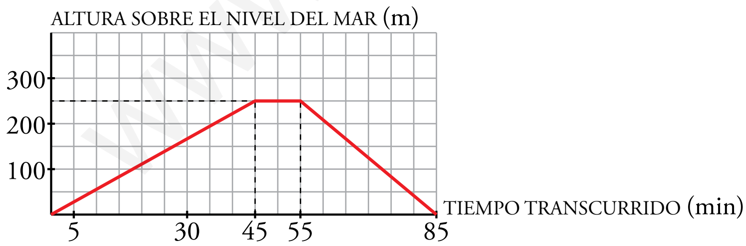
a) Representa la gráfica correspondiente a Félix.

b) Representa la gráfica correspondiente a María.

c) Si compararas las dos gráficas anteriores con las de tus compañeros, ¿cuáles serían más parecidas, las de Félix o las de María? Explica por qué.

a) Respuesta abierta (la información proporcionada en el enunciado hace que existan diferentes respuestas a esta pregunta).

b)



c) Las de María, porque tenemos datos (situación de la casa respecto al nivel del mar, tiempo que tarda en ascender la colina, altura de esta respecto al nivel del mar…) que permiten representar la gráfica con mayor precisión. En el caso de Félix, al no disponer de dicha información, existen diferentes posibilidades para representar el enunciado en una gráfica.

Página 123

3. En el EJEMPLO 1, ¿cuántas fotocopias debes pedir como mínimo para que te salga más caro que hacer 199?

Hacer 199 fotocopias cuesta 199 · 0,08 = 15,92 €. Con esa cantidad, y a un precio de 0,07 € por unidad, se pueden hacer 15,92 : 0,07 = 227,43.

Es decir, hay que pedir 228 fotocopias o más para que salga más caro que hacer 199 fotocopias.

4. En el EJEMPLO 2, calcula la distancia que recorre la bola en 1 s, 2 s y 3 s. ¿Cuánto tarda en recorrer 2 m?

t = 1 segundo $\rightarrow$ $e = 10 \cdot 1^2 = 10$ cm

t = 2 segundos $\rightarrow$ $e = 10 \cdot 2^2 = 40$ cm

t = 3 segundos $\rightarrow$ $e = 10 \cdot 3^2 = 90$ cm

Calculamos en qué tiempo la bola recorre 2 m = 200 cm:

$200 = 10 \cdot t^2 \rightarrow t^2 = 20 \rightarrow t = \sqrt{20} = 4{,}47$ segundos

5. En el EJEMPLO 3:

a) Calcula el periodo de un péndulo de 1 m de largo.

b) ¿Cuál es la longitud de un péndulo cuyo periodo es de 6 segundos?

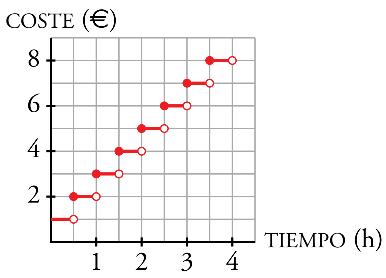
a) $l = 1$ m $\rightarrow$ $T = \sqrt{4 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2$ segundos

b) $T = 6$ segundos $\rightarrow$ $6 = \sqrt{4l} \rightarrow 36 = 4l \rightarrow l = 9$ m

3 Funciones continuas. Discontinuidades

Página 124

1. Construye una función similar a la ①, pero para el caso de que se pague 1 € cada media hora. ¿Cuál de las opciones de pago te parece más justa?



Esta opción de pago es más justa que la del ejemplo.

2. Analiza la función ③ para valores "próximos a 2". Comprueba que cuando x vale 1,9; 1,99; 1,999; 2,01; 2,001, la y toma valores "muy grandes".

$$x = 1{,}9 \;\to\; y = \frac{1}{(1{,}9 - 2)^2} = 100$$

$$x = 1{,}99 \;\to\; y = \frac{1}{(1{,}99 - 2)^2} = 10^4$$

$$x = 1{,}999 \;\to\; y = \frac{1}{(1{,}999 - 2)^2} = 10^6$$

$$x = 2{,}01 \;\to\; y = \frac{1}{(2{,}01 - 2)^2} = 10^4$$

$$x = 2{,}001 \;\to\; y = \frac{1}{(2{,}001 - 2)^2} = 10^6$$

4 Crecimiento, máximos y mínimos

Página 125

1. Observa la función de la derecha y responde:

a) ¿En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente?

b) ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

a) Crece en (–5, –3) ∪ (5, +∞).

Decrece en (–∞, –5) ∪ (–3, 5).

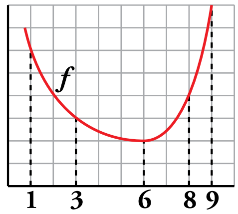
b) Máximo relativo en el punto (–3, 5).

Mínimos relativos en los puntos (–5, 3) y (5, –2).

5 Tasa de variación media (T.V.M.)

Página 126

1. Halla la tasa de variación media (T.V.M.) de la función *f* representada, en los intervalos [1, 3], [3, 6], [6, 8], [8, 9] y [3, 9].



T.V.M. $[1, 3] = \frac{3-6}{3-1} = \frac{-3}{2}$

T.V.M. $[3, 6] = \frac{2-3}{6-3} = -\frac{1}{3}$

T.V.M. $[6, 8] = \frac{4-2}{8-6} = 1$

T.V.M. $[8, 9] = \frac{8-4}{9-8} = 4$

T.V.M. $[3, 9] = \frac{8-3}{9-3} = \frac{5}{6}$

2. Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 4x + 5$ (PROBLEMA RESUELTO 2) en [0, 2], [1, 3] y [1, 4].

T.V.M. $[0, 2] = \frac{1-5}{2} = -2$

T.V.M. $[1, 3] = \frac{2-2}{3-1} = 0$

T.V.M. $[1, 4] = \frac{5-2}{4-1} = 1$

3. Halla la velocidad media de la piedra del PROBLEMA RESUELTO 3 en los intervalos [0, 1], [0, 3], [3, 4] y [4, 8].

T.V.M. $[0, 1] = \frac{35-0}{1-0} = 35$

T.V.M. $[0, 3] = \frac{75-0}{3-0} = 25$

T.V.M. $[3, 4] = \frac{80-75}{4-3} = 5$

T.V.M. $[4, 8] = \frac{0-80}{8-4} = -20$

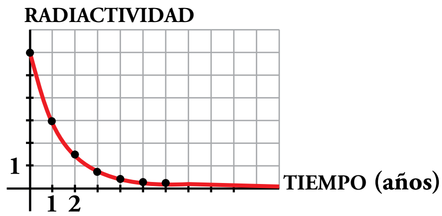
Los resultados están expresados en m/s.

6 Tendencia

Página 127

1. **La cantidad de radiactividad que posee una sustancia se reduce a la mitad cada año. La gráfica adjunta describe la cantidad de radiactividad que hay en una porción de esa sustancia al transcurrir el tiempo.**

¿A cuánto *tiende* la radiactividad con el paso del tiempo?

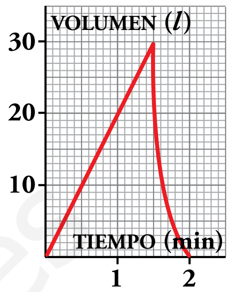


La radiactividad, con el paso del tiempo, tiende a cero.

7 Periodicidad

Página 128

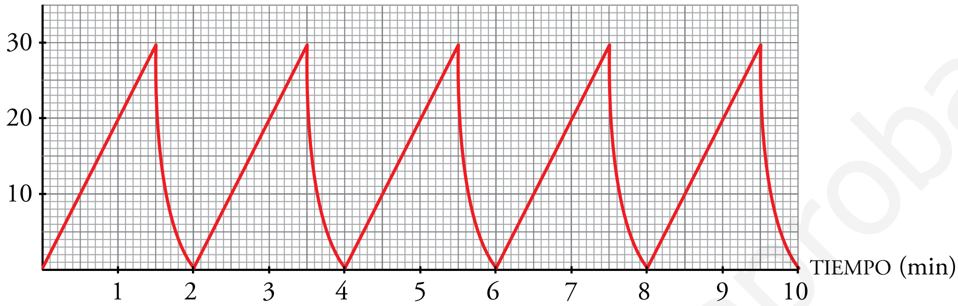
1. La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía, automáticamente, cada dos minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica adjunta.



a) Dibuja la gráfica correspondiente a 10 min.

b) ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en los siguientes instantes?

I) 17 min **II) 40 min 30 s** **III) 1 h 9 min 30 s**

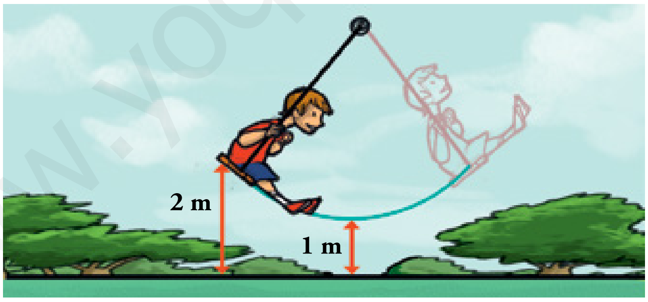
a)


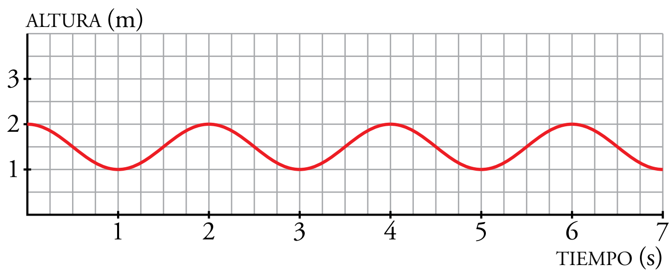
b) I) $f(17) = f(1) = 20$ litros

II) $f(40 \text{ min } 30 \text{ s}) = f(30 \text{ s}) = 10$ litros

III) $f(1 \text{ h } 9 \text{ min } 30 \text{ s}) = f(1 \text{ min } 30 \text{ s}) = 30$ litros

2. Representa en unos ejes la altura a la que está el niño con el paso del tiempo, si cada balanceo (ida y vuelta) dura 4 segundos.





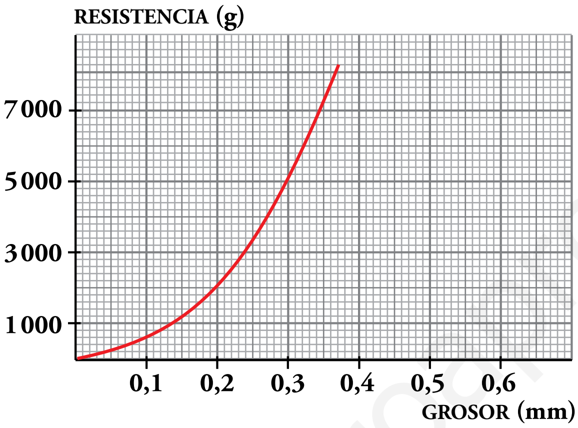
Ejercicios y problemas

Página 129

Practica

Interpretación de gráficas

1. **La siguiente gráfica relaciona la resistencia de un tipo de sedal de pesca con su grosor:**



a) ¿Qué grosor debe tener el sedal de un pescador que quiera pescar truchas que no superen los 2 kg?

b) ¿Con cuántos gramos se podría romper un sedal de 0,22 de grosor? ¿Y de 0,35 mm?

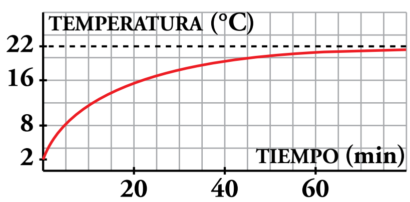
a) 0,2 mm

b) Un sedal de 0,22 mm de grosor se podría romper con unos 2 400 gramos y uno de 0,35 mm de grosor con unos 7 200 gramos.

2. **Hemos sacado de la nevera un vaso con agua. Esta gráfica muestra la temperatura del agua (en grados centígrados) al pasar el tiempo:**

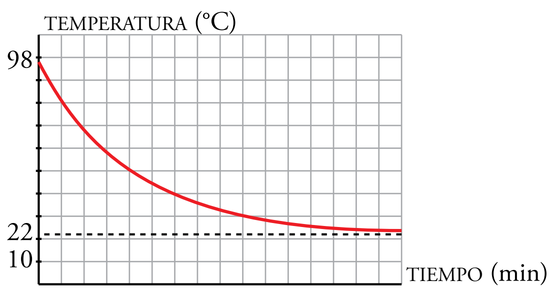
a) ¿Qué temperatura hay dentro de la nevera? ¿Y fuera?

b) Sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C. Dibuja una gráfica que muestre la temperatura del agua al pasar el tiempo.

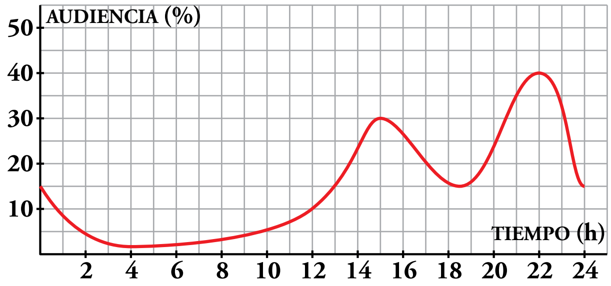


a) Dentro de la nevera hay 2 °C y fuera 22 °C.

b)



3. **Esta curva muestra la audiencia de televisión en España en un día promedio de abril de 2016. ¿Cuáles son los momentos de más audiencia? Descríbela.**



La audiencia (en %) disminuye entre las 0 h (24 h del día anterior) y las 4 h, alcanzando a esta hora su mínimo absoluto.

A partir de este momento aumenta hasta las 15 h, instante en el que vuelve a decrecer hasta las 18,5 h. Desde las 18,5 h hasta las 22 h aumenta, alcanzando a esta hora su máximo absoluto. A partir de las 22 h vuelve a decrecer.

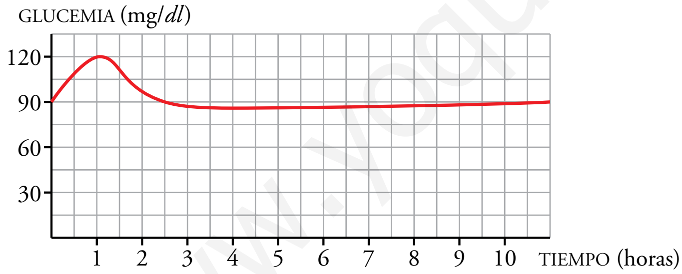
Enunciados, fórmulas y tablas

4. **Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. Luego, en las 3 h siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 h.**

a) Representa la curva de glucemia en el tramo desde que ingiere la glucosa hasta que vuelve a su nivel normal.

b) Indica en qué momentos alcanza su máximo y en cuáles su mínimo.

a)



b) El máximo es de 120 mg/*gl* al cabo de 1 h de iniciar la toma. El mínimo está ligeramente por debajo de 90 mg/*dl* y se alcanza a las 4 h de iniciar la toma.

La tendencia de la función es 90 mg/*dl* (tener la glucemia en un nivel normal).

5. **Un nadador se deja caer desde un trampolín. Su entrenador ha medido el espacio que recorre cada cuatro décimas de segundo mediante un método fotográfico. Obtiene la siguiente tabla:**

TIEMPO (s)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8
ESPACIO (m)	0	0,8	3,1	7,1	12,5	14	14,5	15

El nadador frena por completo a los 15 m.

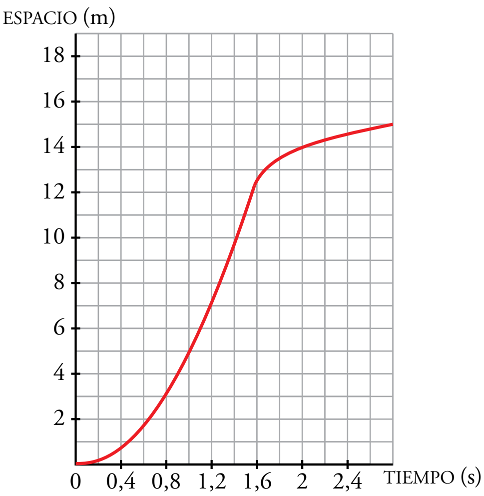
a) Representa la gráfica *espacio-tiempo*.

b) ¿Podrías decir en qué momento entró en el agua?

c) ¿Qué velocidad estimas que llevaba en el momento de entrar en el agua?

d) ¿Qué altura tiene el trampolín?

a)



b) Entró en el agua a los 1,6 segundos de haber saltado.

c) Estimamos la velocidad calculando la T.V.M. en el intervalo [1,2; 1,6]:

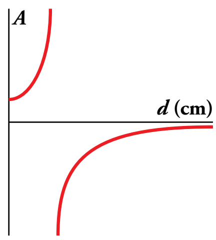
$$\text{T.V.M. } [1,2;\ 1,6] = \frac{12,5 - 7,1}{1,6 - 1,2} = \frac{5,4}{0,4} = 13,5$$

Estimamos que la velocidad era de 13,5 m/s.

d) El trampolín tiene unos 12 m de altura.

6. **El aumento, A, del tamaño de un objeto que se mira a través de una lupa viene dado por esta fórmula y la gráfica de la derecha:**

$$A = \frac{2}{2-d}$$



La variable d es la distancia de la lupa al objeto, en cm, y la variable A es el aumento (número por el que se multiplica el tamaño real).

a) Calcula el tamaño aparente, A, de un objeto para los siguientes valores de d:

0; 0,5; 1; 1,5; 1,9; 1,99

b) Para $d = 4$ se obtiene $A = -1$. Eso significa que el objeto se ve del mismo tamaño, pero invertido. Interpreta los valores de A para estos valores de d:

10; 5; 2,4; 2,1; 2,01

a) $d = 0 \rightarrow A = 1$ $\quad d = 0,5 \rightarrow A = 4/3$ $\quad d = 1 \rightarrow A = 2$

$d = 1,5 \rightarrow A = 4$ $\quad d = 1,9 \rightarrow A = 20$ $\quad d = 1,99 \rightarrow A = 200$

b) $d = 10 \rightarrow A = -\frac{1}{4}$ El objeto se ve a $\frac{1}{4}$ de su tamaño e invertido.

$d = 5 \rightarrow A = -\frac{2}{3}$ El objeto se ve a $\frac{2}{3}$ de su tamaño e invertido.

$d = 2,4 \rightarrow A = -5$ El objeto se ve a 5 veces su tamaño e invertido.

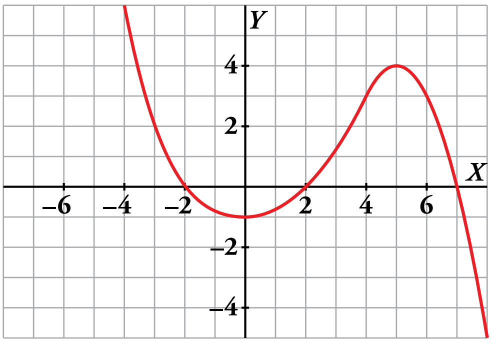
$d = 2,1 \rightarrow A = -20$ El objeto se ve a 20 veces su tamaño e invertido.

$d = 2,01 \rightarrow A = -200$ El objeto se ve a 200 veces su tamaño e invertido.

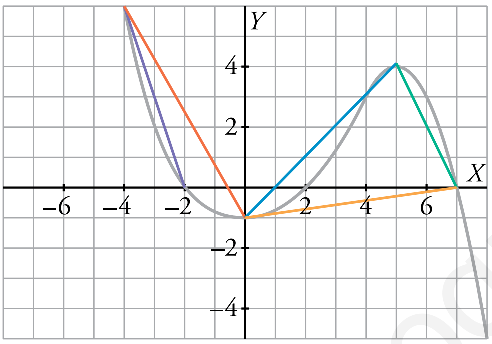
Página 130

Características de una función

7. **Observa esta función y halla su T.V.M. en los intervalos [0, 4], [0, 5], [5, 7], [0, 7], [–4, 0] y [–4, –2].**



Copia en tu cuaderno la gráfica y dibuja en cada caso el segmento del cual estás hallando la pendiente.



$$\text{T.V.M. } [0, 4] = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [0, 5] = \frac{4+1}{5} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [5, 7] = \frac{0-4}{7-5} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [0, 7] = \frac{0+1}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, 0] = \frac{-1-6}{0+4} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \frac{0-6}{-2+4} = -3$$

8. **Halla la T.V.M. de $y = 3x^3 + 9x^2 - 3x - 9$ en los intervalos [–2, 0], [–1, 0], [–3, –1] y [0, 1].**

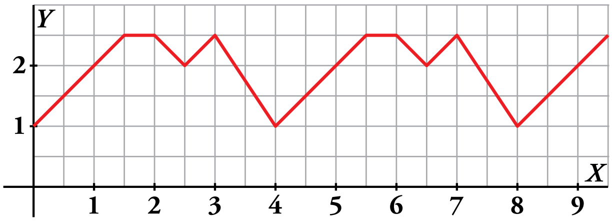
$$\text{T.V.M. } [-2, 0] = \frac{-9-9}{0+2} = -9$$

$$\text{T.V.M. } [-1, 0] = \frac{-9-0}{0+1} = -9$$

$$\text{T.V.M. } [-3, -1] = \frac{0-0}{-1+3} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [0, 1] = \frac{0+9}{1} = 9$$

9. **Explica por qué es periódica esta función:**

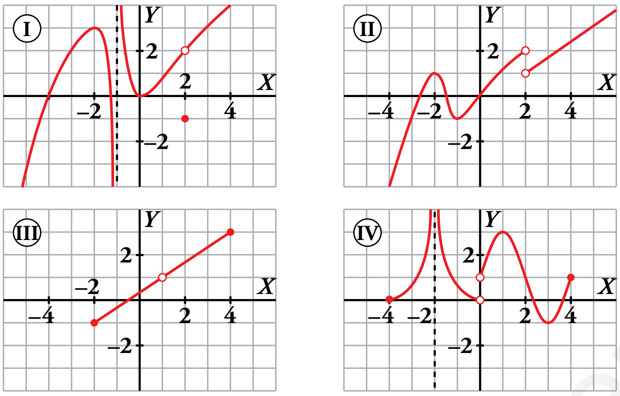


Da su periodo y los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

La función es periódica de periodo 4.

$f(1) = 2$; $f(3) = 2{,}5$; $f(20) = f(0) = 1$; $f(23) = f(3) = 2{,}5$; $f(42) = f(2) = 2{,}5$

10. **Observa estas gráficas discontinuas y contesta:**



a) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad? Explica la razón de discontinuidad en cada punto.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) Indica, si tiene, los máximos y los mínimos relativos.

d) ¿En qué intervalos es creciente? ¿Y decreciente?

a) Ⓘ Discontinua en $x = -1$. Tiene ramas infinitas.
Discontinua en $x = 2$. Tiene un punto desplazado.

Ⓘⓘ Discontinua en $x = 2$. No está definida en este punto y, además, en él da un salto.

Ⓘⓘⓘ Discontinua en $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$. No está definida.
Discontinua en $x = 1$ porque no está definida.

Ⓘⓥ Discontinua en $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$. No está definida.
Discontinua en $x = -2$. Tiene ramas infinitas.
Discontinua en $x = 0$. No está definida y presenta un salto.

b) *Dom* (Ⓘ) = $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ *Dom* (Ⓘⓘ) = $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Dom (Ⓘⓘⓘ) = $[-2, 1) \cup (1, 4]$ *Dom* (Ⓘⓥ) = $[-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 4]$

c) Ⓘ Máximo relativo en $(-2, 3)$. Mínimo relativo en $(0, 0)$

Ⓘⓘ Máximo relativo en $(-2, 1)$. Mínimo relativo en $(-1, -1)$.

Ⓘⓘⓘ No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Ⓘⓥ Máximo relativo en $(1, 3)$. Mínimo relativo en $(3, -1)$.

d) Ⓘ Crece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

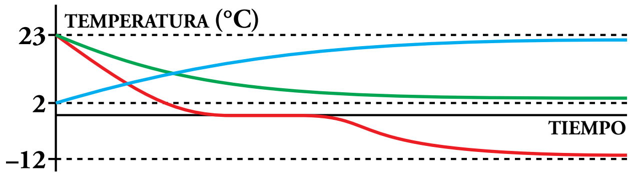
Ⓘⓘ Crece en $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1)$.

Ⓘⓘⓘ Crece en $(-2, 1) \cup (1, 4)$. No decrece.

Ⓘⓥ Crece en $(-4, -2) \cup (0, 1) \cup (3, 4)$. Decrece en $(-2, 0) \cup (1, 3)$.

Piensa y resuelve

11. **Observa las siguientes gráficas de funciones:**



a) Relaciona cada curva con estos enunciados sobre la temperatura de un vaso de agua:

I. Cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Cuando se saca de la nevera y se deja en la mesa.

III. Cuando pasa de la mesa al congelador.

b) ¿A qué temperatura está la casa? ¿Y el congelador? ¿Y la nevera?

a) I - verde. II - azul. III - roja.

b) La casa está a 23 °C, el congelador a –12 °C y la nevera a 2 °C.

12. **El entrenador de tres nadadores, A, B y C, ha medido cada 5 minutos las distancias recorridas hasta ese momento por cada uno de ellos:**

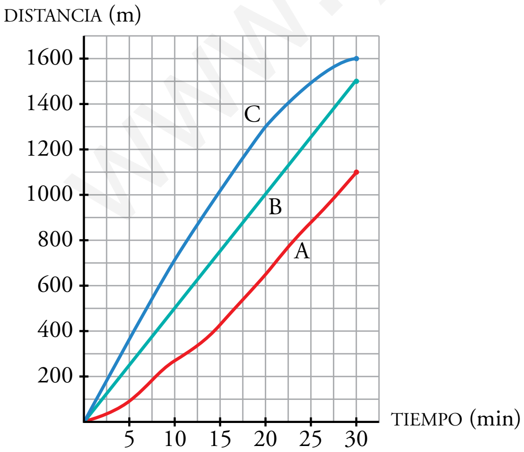
TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

a) En unos mismos ejes, dibuja la gráfica *distancia-tiempo* de los tres nadadores. Descríbelas.

b) ¿Hubo algún adelantamiento durante los 30 min?

c) Calcula la velocidad media de cada uno.

a)



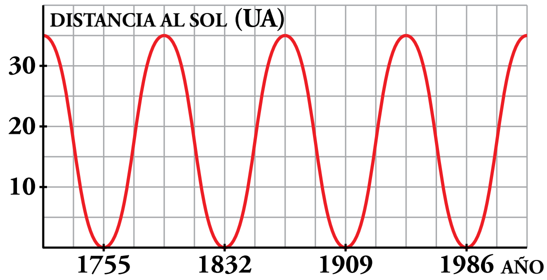
b) No ha habido ningún adelantamiento.

c) $V_m\ (A) = \dfrac{1100}{30} = 36{,}67$ m/min

$V_m\ (B) = \dfrac{1500}{30} = 50$ m/min

$V_m\ (C) = \dfrac{1600}{30} = 53{,}3$ m/min

13. **La órbita del cometa Halley es una elipse muy excéntrica, uno de cuyos focos es el Sol. Esta curva representa la función que relaciona la distancia del cometa al Sol con el paso del tiempo:**



a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿En qué año volverá a acercarse al Sol?

a) Es una función periódica de periodo $T = 1\,832 - 1\,755 = 77$ años.

b) $1\,986 + 77 = 2\,063 \rightarrow$ El año 2063

Página 131

14. **La gráfica adjunta describe el valor de una empresa desde que se fundó.**

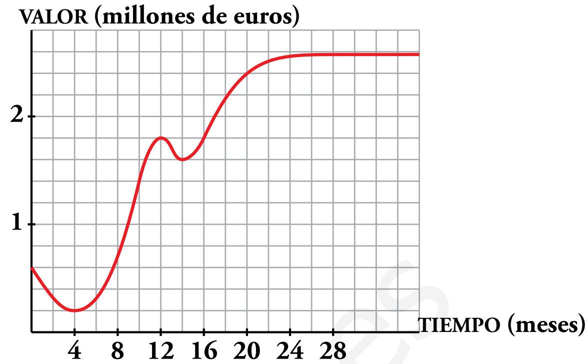
a) ¿Cuál era su valor en el momento de la apertura?

b) ¿A cuánto se redujo su valor después de 4 meses?

c) ¿Cuál es la T.V.M. en el intervalo [4, 12]? Da el resultado en miles de euros por mes.

d) ¿Cuál parece la tendencia de esta función para los próximos meses?

e) Haz una descripción global del valor de esta empresa en sus tres primeros años.



a) El valor de la empresa en el momento de la apertura era de 600 000 €.

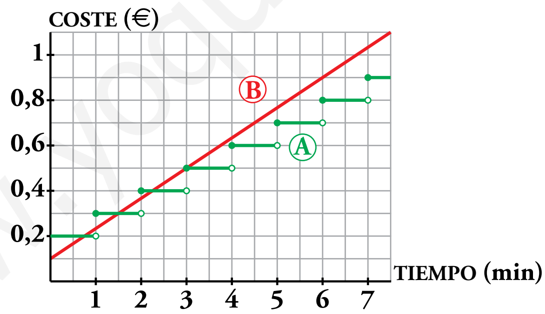
b) Después de 4 meses su valor se redujo a 200 000 €.

c) T.V.M. [4, 12] = $\frac{1\,800\,000 - 200\,000}{12 - 4}$ = 200 000 €/mes

d) Parece que el valor de la empresa, para los próximos meses, tiende a 2 600 000 €.

e) El valor de la empresa tiene un brusco descenso en los cuatro primeros meses. A partir de aquí crece rápidamente durante 8 meses y tiene una ligera caída en los dos meses siguientes. A partir del mes 14.º crece rápidamente durante otros 6 meses y después cada vez más despacio. Su precio se aproxima a 2 600 000 €.

15. **Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:**



a) Determina cuánto vale una llamada de 3 min con cada compañía. ¿Y una de media hora?

b) Razona por qué elegirías una u otra compañía.

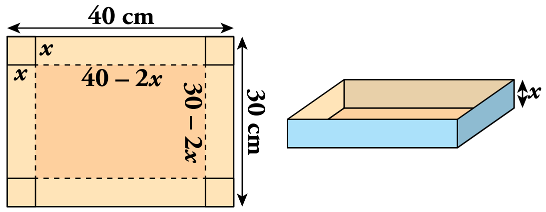
a) Una llamada de 3 min cuesta 0,50 € en cualquiera de las dos compañías.

La compañía A cobra 3,20 € por 30 minutos.

La compañía B cobra 0,10 € más 0,40 € por cada 3 min. Por tanto, por 30 min cobrará $0{,}1 + 0{,}40 \cdot 10 = 4{,}10$ €.

b) Si habitualmente hiciera llamadas cortas (de 3 min o menos), contrataría con B. Si hiciera llamadas largas con frecuencia, contrataría con la compañía A.

16. **Con una cartulina que mide 40 cm × 30 cm queremos construir una caja. Para ello, cortamos un cuadrado de lado x en cada esquina.**



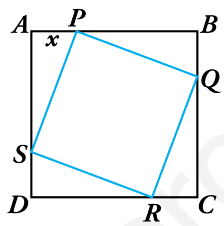
Halla la función que relaciona el volumen de la caja con la longitud del lado de los cuadrados cortados.

Si cortamos un cuadrado de lado x en cada esquina, el rectángulo que obtenemos como base de la caja tiene dimensiones $40 - 2x$ de largo y $30 - 2x$ de ancho. La altura de la caja será x.

Por tanto, el volumen en función de x es:

$$V = (40 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 140x^2 + 1\,200x$$

17. **Dibuja un cuadrado $ABCD$ de 7 cm de lado. Sobre el lado AB, marca un punto P que diste x de A, y dibuja un nuevo cuadrado $PQRS$ inscrito en el anterior.**



a) Observa que si el valor de x es 3 cm, entonces $\overline{AS} = 7 - 3 = 4$ cm. ¿Cuánto mide $\overline{PS}$? ¿Cuál es el área del nuevo cuadrado?

b) Construye la gráfica de la función que relaciona x (con valores de 0 a 7) con el área del cuadrado inscrito.

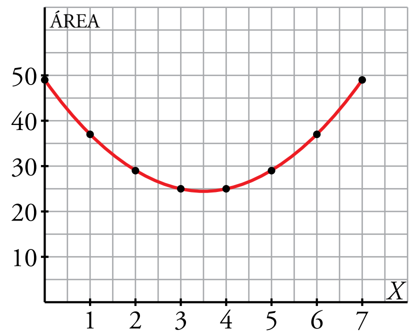
a) $\overline{PS} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm. Área del cuadrilátero interior $= 5^2 = 25$ cm^2

b) $A = \left(\sqrt{x^2 + (7 - x)^2}\right)^2 =$

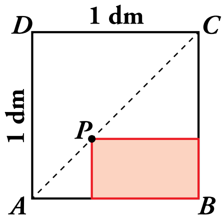
$= x^2 + 49 + x^2 - 14x =$

$= 2x^2 - 14x + 49$

x	ÁREA
0	49
1	37
2	29
3	25
4	25
5	29
6	37
7	49



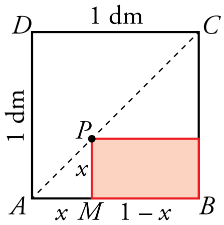
18. **En un cuadrado $ABCD$ de lado 1 dm dibuja la diagonal AC. Para cada punto P de esta diagonal, se forma un rectángulo, como en la figura.**



a) Halla el área del rectángulo cuando P dista de AB: 1/4 dm, 1/2 dm y 3/4 dm.

b) Dibuja la gráfica de la función que relaciona la distancia de P a AB con el área del rectángulo.

a)



$$\left.\begin{array}{l}\text{Los triángulos } \widehat{ABC} \text{ y } \widehat{AMP} \text{ son semejantes} \\ \text{(son rectángulos con un ángulo agudo común)} \\ \widehat{ABC} \text{ es isósceles } (\overline{AB} = \overline{BC} = 1 \text{ dm})\end{array}\right\} \to \widehat{AMP} \text{ también es isósceles}$$

Sea $x = \overline{AM} \to \overline{PM} = \overline{AM} = x$ y $\overline{MB} = 1 - x$

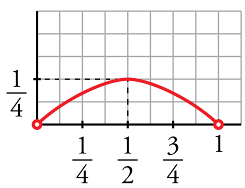
$$\left.\begin{array}{l} x = \overline{PM} \\ y = \text{área del rectángulo}\end{array}\right\} \to y = x \cdot (1 - x) \to y = -x^2 + x$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ dm} \to y = -\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \to y = \frac{3}{16} \text{ dm}^2$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ dm} \to y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \to y = \frac{1}{4} \text{ dm}^2$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ dm} \to y = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \to y = \frac{3}{16} \text{ dm}^2$$

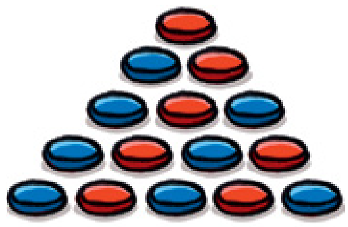
b) $y = -x^2 + x$



Curiosidades matemáticas

Juego para dos

Se colocan 15 fichas sobre la mesa, como en el dibujo siguiente.



Cada jugador retira, por turno, y según su elección, una, dos o tres fichas cualesquiera. Quien retire la última, pierde.

Experimenta el juego y analiza lo que ocurre, cuándo se gana y cuándo se pierde.

Después, redacta por escrito lo que has descubierto:

- **¿Lleva ventaja el jugador que sale?**
- **¿Cuál es la mejor jugada para empezar?**
- **¿Cuál es la estrategia ganadora?**
- **...**

- Empezamos experimentando el juego con 2, 3 y 4 fichas:

  → Quien empieza, retira 1 ficha y *gana*.

  → Quien empieza, retira 2 fichas y *gana*.

  → Quien empieza, retira 3 fichas y *gana*.

- Experimentamos con 5 fichas:

  → Quien empieza puede retirar 1, 2 o 3 fichas, dejando 4, 3 o 2 al contrario (casos anteriores), que será quien gane.

  Con 5 fichas, quien empieza pierde.

- Experimentamos con 6, 7 y 8 fichas.

  Quien empieza retira 1 (si hay 6), 2 (si hay 7) o 3 (si hay 8), dejando 5 fichas, con lo que hace perder al contrario.

- Experimentamos con 9 fichas.

  Quien empieza puede retirar 1, 2 o 3, dejando 8, 7 o 6, con lo que ganará el contrario.

  Con 9 fichas, quien empieza pierde.

- Siguiendo así, vemos que los números perdedores son 1, 5, 9 y 13.

CONCLUSIÓN: Jugando con 15 fichas, quien empieza gana si sigue esta estrategia:

— Retira 2 fichas, dejando 13.

— A continuación responde a los movimientos del contrario dejando primero 9 fichas, después 5 y, por último, 1.

Es decir, quien empieza retira primero 2 fichas y después responde al contrario con el complemento de 4 (si él retira 3, yo 1; si él 2, yo 2; si él 1, yo 3).