Ejercicio 1.

Sin usar la calculadora, encuentra el valor de x en la siguiente expresión:

$$x=\log_2\frac{3}{\sqrt[3]{54}}-\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}+\log_{\sqrt{5}}0{,}0016$$

Solución:

$$\triangleright\ \log_2\frac{3}{\sqrt[3]{54}}=\log_2\frac{3}{\sqrt[3]{2\cdot 3^3}}=\log_2\frac{3}{3\cdot\sqrt[3]{2}}=\log_2\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\log_2 2^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}$$

$$\triangleright\ \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}\right)=\log_{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\log_{\frac{1}{3}}3^{\frac{7}{8}}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{8}}=-\frac{7}{8}$$

$$\triangleright\ \log_{\sqrt{5}}(0{,}0016)=\log_{\sqrt{5}}\frac{16}{10000}=\log_{\sqrt{5}}\frac{2^4}{2^4\cdot 5^4}=\log_{\sqrt{5}}5^{-4}=\log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}\right)^{-8}=-8$$

$$\log_2\frac{3}{\sqrt[3]{54}}-\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}+\log_{\sqrt{5}}(0{,}0016)=-\frac{1}{3}-\left(-\frac{7}{8}\right)+(-8)=\frac{-8+21-192}{24}=-\frac{179}{24}$$

Ejercicio 2.

Encuentra un polinomio de segundo grado, sabiendo que es divisible por $(x-3)$ y que al dividirlo por $(x+1)$ y por $(x-2)$ obtenemos de resto 8 y -7 respectivamente.

Solución:

El polinomio $p(x)$ *será de la forma* $p(x)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} p(x)\ \text{es divisible por}\ (x-3)\ \Rightarrow\ p(3)=0\\ \text{El resto de dividir}\ p(x)\ \text{entre}\ (x+1)\ \text{es}\ 8\ \Rightarrow\ p(-1)=8\\ \text{El resto de dividir}\ p(x)\ \text{entre}\ (x-2)\ \text{es}\ -7\ \Rightarrow\ p(2)=-7\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} p(2)=a(3)^2+b\cdot(3)+c=0\\ p(-1)=a(-1)^2+b\cdot(-1)+c=8\\ p(2)=a(2)^2+b\cdot(2)+c=-7\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}9a+3b+c=0\\ a-b+c=8\\ 4a+2b+c=-7\end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix}9&3&1&0\\1&-1&1&8\\4&2&1&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)\cdot F_3]{(-1)\cdot F_2}\begin{pmatrix}9&3&1&0\\-1&1&-1&-8\\-4&-2&-1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2+F_1}\begin{pmatrix}9&3&1&0\\8&4&0&-8\\5&1&0&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\rightleftarrows F_3}\begin{pmatrix}9&3&1&0\\5&1&0&7\\8&4&0&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_3-4\cdot F_1}\begin{pmatrix}9&3&1&0\\5&1&0&7\\-12&0&0&-36\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}9a+3b+c=0\\5a+b=7\\-12a=-36\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}27-24+c=0\ ,\quad c=-3\\15+b=7\ ,\quad b=-8\\a=3\end{cases}\ \Rightarrow\ \text{el polinomio es}\ p(x)=3x^2-8x-3$$

Ejercicio 3.

a) Escribe en forma de intervalo el conjunto de números que verifica la desigualdad: $\left|\dfrac{1-2x}{3}\right| \geq 2$

Solución:

$$\left|\frac{1-2x}{3}\right| \geq 2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{1-2x}{3} \geq 2 \;\Rightarrow\; 1-2x \geq 6 \;\Rightarrow\; -2x \geq 5 \;\Rightarrow\; x \leq -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1-2x}{3} \leq -2 \;\Rightarrow\; 1-2x \leq -6 \;\Rightarrow\; -2x \leq -7 \;\Rightarrow\; x \geq \dfrac{7}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; x \in \left(-\infty\,,\,-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}\,,\,+\infty\right)$$

b) Escribe, usando valor absoluto, la condición que deben cumplir los puntos del intervalo $(-7\,,\,4)$

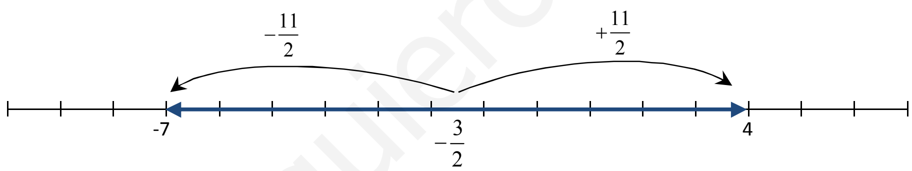
Solución:

En el intervalo $(-7\,,\,4)$*, buscamos el centro* $\equiv C = \dfrac{-7+4}{2} = -\dfrac{3}{2}$ *y el radio* $\equiv r = \dfrac{d(-7,4)}{2} = \dfrac{|-7-4|}{2} = \dfrac{11}{2}$

Podemos considerar el intervalo $(-7\,,\,4)$ *como un entorno de centro* $C = -\dfrac{3}{2}$ *y radio* $r = \dfrac{11}{2}$*, es decir,*

los puntos $x \in (-7\,,\,4)$ *tienen distancia al centro más pequeña que el radio.*

$$d\left(x\,,\,-\frac{3}{2}\right) < \frac{11}{2} \;\Rightarrow\; \left|x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right| < \frac{11}{2} \;\Rightarrow\; \left|x+\frac{3}{2}\right| < \frac{11}{2} \text{ , o también , } |2x+3| < 11$$



Ejercicio 4.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\;\log_2 x + \log_2(x-1) = 1 + \log_4(x-1)$$

Solución:

$$\log_2 x + \log_2(x-1) = 1 + \log_4(x-1) \;\Rightarrow\; \log_2 x + \log_2(x-1) = \log_4 4 + \log_4(x-1) \;\Rightarrow\; \log_2[x\cdot(x-1)] = \log_4[4\cdot(x-1)] \;\Rightarrow$$

$$\log_2(x^2-x) = \log_4(4x-4) \;\Rightarrow\; \log_2(x^2-x) = \frac{\log_2(4x-4)}{\log_2 4} \;\Rightarrow\; \log_2(x^2-x) = \frac{\log_2(4x-4)}{2} \;\Rightarrow\; 2\cdot\log_2(x^2-x) = \log_2(4x-4)$$

$$\log_2(x^2-x)^2 = \log_2(4x-4) \;\Rightarrow\; (x^2-x)^2 = 4x-4 \;\Rightarrow\; x^4-2x^3+x^2-4x+4=0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & -1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & & 2 & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow\; x^4-2x^3+x^2-4x+4 = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+x+2)$$

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+x+2) = 0 \;\Rightarrow\; \cancel{x=1} \;;\; x=2$$

$b)\ 4\cdot\left(2^x+\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=33$

Solución:

$$4\cdot\left(2^x+\frac{1}{2^{x-1}}\right)=33 \quad\Rightarrow\quad 4\cdot\left(2^x+\frac{2}{2^x}\right)=33 \quad\Rightarrow\quad \left(2^x=y\right) \quad\Rightarrow\quad 4\cdot\left(y+\frac{2}{y}\right)=33 \quad\Rightarrow\quad 4y+\frac{8}{y}=33 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 4y^2-33y+8=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y=8 \quad\Rightarrow\quad 2^x=8 \quad\Rightarrow\quad x=3 \\ y=\dfrac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad 2^x=\dfrac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad x=-2 \end{cases}$$

Ejercicio 5.

Resuelve la inecuación: $\dfrac{2}{3-x}\le\dfrac{1}{2x+1}$

Solución:

$$\frac{2}{3-x}\le\frac{1}{2x+1} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3-x}-\frac{1}{2x+1}\le 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2(2x+1)}{(3-x)(2x+1)}-\frac{3-x}{(3-x)(2x+1)}\le 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{4x+2-3+x}{(3-x)(2x+1)}\le 0$$

$$\frac{5x-1}{(3-x)(2x+1)}\le 0$$

	$\left(-\infty\,,\,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5}\,,\,3\right)$	3	$(3\,,+\infty)$
$(5x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(3-x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(2x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{5x-1}{(3-x)\cdot(2x+1)}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

$$Solución:\ x\in\left(-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{5}\right]\cup(3\,,+\infty)$$

Ejercicio 6.

Realiza las operaciones y obtén la fracción irreducible en la expresión:

$$\left(\frac{3x}{x-1}+\frac{4}{x+1}-\frac{2x^2+7x}{x^2-1}\right):\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{9}{x+1}\right)$$

Solución:

$$\left(\frac{3x}{x-1}+\frac{4}{x+1}-\frac{2x^2+7x}{x^2-1}\right):\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{9}{x+1}\right)=\left(\frac{3x(x+1)}{x^2-1}+\frac{4(x-1)}{x^2-1}-\frac{2x^2+7x}{x^2-1}\right):\left(\frac{(2x-1)(x+1)}{x^2-1}-\frac{9(x-1)}{x^2-1}\right)=$$

$$=\left(\frac{3x^2+3x+4x-4-2x^2-7x}{x^2-1}\right):\left(\frac{2x^2+x-1-9x+9}{x^2-1}\right)=\frac{x^2-4}{x^2-1}:\frac{2x^2-8x+8}{x^2-1}=\frac{(x^2-4)\cancel{(x^2-1)}}{(2x^2-8x+8)\cancel{(x^2-1)}}=\frac{x^2-4}{2(x^2-4x+4)}=$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)^2}=\frac{x+2}{2(x-2)}=\frac{x+2}{2x-4}$$

Ejercicio 7.

Dada la sucesión $1, 6, 15, 28, 45, \ldots\ldots$

- Añade tres términos y encuentra el valor del término que ocupa el lugar 100.
- Escribe la expresión de su término general a_n.
- Calcula los límites: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{2n}$.

Solución:

$$\underset{1}{1},\ \underset{1+5}{6},\ \underset{1+5+9}{15},\ \underset{1+5+9+13}{28},\ \underset{1+5+9+13+17}{45},\ \underset{1+5+9+13+17+21}{66},\ \underset{1+5+9+13+17+21+25}{91},\ \underset{1+5+9+13+17+21+25+29}{120},\ldots\ldots$$

Los términos de esta sucesión se obtienen como suma de términos de la progresión aritmética: $1,5,9,13,\ldots,(4n-3)$ *por tanto el término general de la sucesión se obtendrá como la suma de "n" términos de la progresión*:

$$a_n=\frac{(1+4n-3)\cdot n}{2}\ \Rightarrow\ a_n=\frac{(4n-2)\cdot n}{2}\ \Rightarrow\ a_n=2n^2-n\quad y\quad a_{100}=2\cdot 100^2-100\ \Rightarrow\ a_{100}=19900$$

$$a_{n+1}=2(n+1)^2-(n+1)\ \Rightarrow\ a_{n+1}=2n^2+3n+1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{2n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{2n^2-n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{2+0+0}{2-0}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2-n}\right)^{2n}=\left(indet.\ 1^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+3n+1}{2n^2-n}-1\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n+1}{2n^2-n}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{2n^2-n}{4n+1}}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{2n^2-n}{4n+1}}\right)^{\frac{2n^2-n}{4n+1}\cdot\frac{4n+1}{2n^2-n}\cdot 2n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{2n^2-n}\cdot 2n\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n}{2n^2-n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}}=e^{\frac{8}{2}}=e^4$$

Ejercicio 8.

Una progresión geométrica tiene razón r, con $|r|<1$. Si al segundo término le sumamos $\dfrac{4}{3}$ obtenemos el primero y, además, la suma de todos sus términos es 3. Escribe los cinco primeros términos de la progresión.

Solución:

$$\begin{cases} a_1=a_2+\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{a_1}{1-r}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=a_1\cdot r+\dfrac{4}{3} \\ a_1=3-3r \end{cases} \Rightarrow 3-3r=(3-3r)\cdot r+\frac{4}{3} \Rightarrow 9-9r=9r-9r^2+4 \Rightarrow 9r^2-18r+5=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{r=\dfrac{5}{3}} \quad puesto\ que\ |r|<1 \\ r=\dfrac{1}{3} \Rightarrow a_1=3-3\cdot\dfrac{1}{3} \Rightarrow a_1=2 \end{cases}$$

Los primeros términos de la progresión son: $2,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{27},\ \dfrac{2}{81},\ \ldots\ldots$