1. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3+x^2-3x+1$; b) $f(x)=\frac{8x}{x+5}$; c) $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-8}$; d) $f(x)=\frac{2}{4x-x^2}$;

e) $f(x)=\frac{2x}{x^2-16}$; f) $f(x)=\frac{2x}{x^2+16}$; g) $f(x)=\sqrt{x+5}$; h) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}}$; i) $f(x)=\sqrt{2x-5}$;

j) $f(x)=\sqrt{4-x}$; k) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$; l) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$; m) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+4}$;

n) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2-16}}$; ñ) $f(x)=\frac{x+1}{(2x-3)^2}$; o) $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x^2-x-6}}$; p) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x-12}}$;

q) $f(x)=\frac{3x}{x^2+4}$; r) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$; s) $f(x)=\frac{14}{x^2+2x+1}$; t) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+4}$

2. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $y=2x-6$; b) $y=x^2+2x-3$; c) $y=x^2+x+1$; d) $y=x^3-x^2$; e) $y=\frac{x^2-4}{x+3}$;

f) $y=\sqrt{2x}+4$; g) $y=\frac{x+4}{2x+2}$; h) $y=\frac{x^2-3}{x^2-1}$; i) $y=\sqrt{x^2+x-2}$; j) $y=\sqrt{x^2+9}$;

k) $y=x^3-6x^2+11x-6$; l) $y=\frac{x^2+4}{x+2}$; m) $y=\frac{4}{x-4}$; n) $y=x^4-1$

3. Estudia la posible simetría de cada una de las siguientes funciones, es decir, has de ver si son pares, impares, o ninguna de las dos cosas.

a) $f(x)=x^4$; b) $f(x)=x^3$; c) $f(x)=x^4-x^2$; d) $f(x)=2x-3$; e) $f(x)=x^2-x^3$;

f) $f(x)=x^5-x^3$; g) $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-1}$; h) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$; i) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$; j) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+6}$;

k) $f(x)=\frac{x}{x-5}$; l) $f(x)=\frac{3x}{2x^2-1}$; m) $f(x)=\frac{5x^2}{x-1}$; n) $f(x)=x+\frac{x^2+1}{x^2+3}$; ñ) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2+3}$

4. Dadas las siguientes funciones racionales, calcula el dominio, los límites en los puntos que no pertenezcan al dominio de la función (tanto por la izquierda como por la derecha), y los límites cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$. Del estudio anterior deduce sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, caso de que existan. Calcula también los puntos de corte con los ejes y realiza una representación gráfica aproximada de la función.

a) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$; b) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; c) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$; d) $f(x)=\frac{9}{x^2-9}$; e) $f(x)=\frac{16-8x}{x^2}$;

f) $f(x)=\frac{x}{x^2-x+1}$; g) $f(x)=\frac{x^3+2}{x-2}$; h) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+4}$; i) $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$; j) $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$;

k) $f(x)=\frac{2x^3}{x^3-1}$; l) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$; m) $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$; n) $f(x)=\frac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$; ñ) $f(x)=\frac{x^3}{2x-5}$;

o) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$; p) $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2-4x+5}$; q) $f(x)=\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$; r) $f(x)=x+1+\frac{5}{x}$; s) $f(x)=x+\frac{4}{x-5}$

5. Halla los puntos de discontinuidad, si los hay, de las siguientes funciones.

a) $y=x^2+x-6$; b) $y=\dfrac{x}{(x-2)^2}$; c) $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$; d) $y=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$; e) $y=\dfrac{2}{5x-x^2}$; f) $y=\dfrac{1}{x^2+2}$

6. Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta.

a) $y=\dfrac{x+2}{x-3}$; b) $y=\dfrac{x^2-3x}{x}$; c) $y=\dfrac{x^2-3}{x}$; d) $y=\begin{cases}3 \text{ si } x\neq 4\\ 1 \text{ si } x=4\end{cases}$

7. Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas.

a) $y=x^2-5$; b) $y=\sqrt{5-x}$; c) $y=\begin{cases}3x-4 \text{ si } x<3\\ x+2 \text{ si } x\geq 3\end{cases}$; d) $y=\begin{cases}x \text{ si } 0\leq x<2\\ 2 \text{ si } 2\leq x<5\end{cases}$

8. Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones.

a) $y=5-\dfrac{x}{2}$; b) $y=\sqrt{x-3}$; c) $y=\dfrac{1}{x}$; d) $y=\sqrt{-3x}$; e) $y=\sqrt{5-2x}$; f) $y=x^2-x$

9. Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos críticos (puntos donde "pasan de ser una cosa a ser otra").

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{2} \text{ si } x<-1\\ 2x+4 \text{ si } x>-1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}2-x^2 \text{ si } x<2\\ \dfrac{x}{2}-3 \text{ si } x\geq 2\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}3x \text{ si } x\leq 1\\ x+3 \text{ si } x>1\end{cases}$

10. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-3x+5}$; d) $\lim\limits_{x\to 0{,}1}\log x$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{x}{2}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x)$;

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-x}{x-2}$; h) $\lim\limits_{x\to 0{,}5}2^x$; i) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{10+x-x^2}$; j) $\lim\limits_{x\to 4}\log_2 x$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$; l) $\lim\limits_{x\to 2}e^x$; m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x^2-2x}$

; n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+3x}{x}$; ñ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^3-2h^2}{h}$; o) $\lim\limits_{b\to 0}\dfrac{b^2-7b}{4b}$; p) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; q) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$; r) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$;

s) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$; t) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$; u) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

11. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases}x^3-2x+k \text{ si } x\neq 3\\ 7 \text{ si } x=3\end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

12. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ en -2, 0 y 2 ; b) $f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ en 2, 0 y 3 ; c) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$ en 1 y -3 ;

d) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3+3x^2}$ en 0 y -3 ; e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x}$ en 3, 0 y -1

13. Calcula, en cada caso, tanto $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ como $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$, y representa la información que obtengas.

a) $f(x)=-x^2+3x+5$; b) $f(x)=5x^3+7x$; c) $f(x)=x-3x^4$; d) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{-5}$; e) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$;

f) $f(x)=\dfrac{1}{3x}$; g) $f(x)=\dfrac{3}{x}$; h) $f(x)=3x-5$; i) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3}$; j) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$; j) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$

k) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-10x-32}{5}$; l) $f\left(x\right)=\left(7+x-x^3\right)$; m) $f\left(x\right)=\left(-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{x}{2}-17\right)$; n) $f\left(x\right)=\left(7-x\right)^2$;

ñ) $f\left(x\right)=x^3-10x$; o) $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-4}$; p) $f\left(x\right)=\dfrac{3-x}{2}$; q) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x}{-3}$; r) $f\left(x\right)=\dfrac{3}{\left(x-1\right)^2}$;

s) $f\left(x\right)=\dfrac{-2x^2}{3-x}$; t) $f\left(x\right)=\dfrac{-1}{x^2-1}$; u) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(2-x\right)^3}$; v) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+5}{1-x}$; w) $f\left(x\right)=1-\left(x-2\right)^2$

14. Halla las asíntotas y ramas infinitas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas.

a) $y=\dfrac{x^2+3x+11}{x+1}$; b) $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$; c) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$; d) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+1}$; e) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; f) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$;

g) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$; h) $y=\dfrac{2x^3-3x^2+7}{x}$; i) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; j) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; k) $y=\dfrac{x^4}{x^2+1}$; l) $y=\dfrac{2x^3-3x^2}{x}$;

m) $y=\dfrac{x^2}{x^2+4}$; n) $y=\dfrac{3}{x^2+1}$; ñ) $y=\dfrac{3x^2}{x+1}$; o) $y=\dfrac{3+x-x^2}{x}$; p) $y=\dfrac{x^4}{x-1}$; q) $y=\dfrac{4x^2-3}{2x}$;

r) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-3}$; s) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$; t) $y=\dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$; u) $y=\dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$; v) $y=\dfrac{\left(3-x\right)^2}{2x+1}$; w) $y=\dfrac{\left(x+3\right)^2}{\left(x+1\right)^2}$

15. Prueba que la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ sólo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.

16. Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas.

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

17. Halla las asíntotas de estas funciones.

a) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; b) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$; c) $y=\dfrac{2x^2+5}{x^2-4x+5}$; d) $y=\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$; e) $y=x+\dfrac{4}{x-5}$; f) $y=x+1+\dfrac{5}{x}$

18. Estudia la continuidad de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente.

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<3\\ 5-x & \text{si } x\geq3\end{cases}$; b) $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leq0\\ x^2+1 & \text{si } x<0\end{cases}$; c) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2 & \text{si } x<2\\ x & \text{si } x>2\end{cases}$

Calcula también el límite de las funciones anteriores en $x=-3$, $x=5$, cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

19. Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}2-x & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\geq1\end{cases}$; b) $f\left(x\right)=\begin{cases}-x-1 & \text{si } -1\geq x\\ 1-x^2 & \text{si } -1<x<1\\ x-1 & \text{si } x\geq1\end{cases}$; c) $f\left(x\right)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } x\leq0\\ 2^{x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$

20. Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f\left(x\right)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-4 & \text{si } x\leq3\\ x+k & \text{si } x>3\end{cases}$; b) $f\left(x\right)=\begin{cases}6-\dfrac{x}{2} & \text{si } x<2\\ x^2-kx & \text{si } x\geq2\end{cases}$;

c) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & \text{si } x\neq0\\ k & \text{si } x=0\end{cases}$; d) $f\left(x\right)=\begin{cases}kx-2 & \text{si } x\leq1\\ 4x-2k & \text{si } x>1\end{cases}$

21. Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x=1$.

$$\text{a) } f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 1 \\ 4-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases} \ ; \ \text{b) } f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\ne 1 \\ a & \text{si } x=1 \end{cases}$$

22. En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t)=\dfrac{30t}{t+4}$ (t en días).
    a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?
    b) Representa la función sabiendo que el período de entrenamiento es de un mes.
    c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

23. ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?

24. ¿Puede tener una función más de dos asíntotas verticales? ¿Y más de dos horizontales? Pon ejemplos.

25. El denominador de una función $f(x)$ se anula en $x=a$. ¿Podemos asegurar que tiene una asíntota vertical en $x=a$?

26. Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$, ¿podemos afirmar que f es continua en $x=5$?

27. Representa una función que verifique las estas condiciones:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2 \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \ , \ \lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty \ , \ \lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$$

¿Es discontinua en algún punto?

28. Calcula los límites cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$ de las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(x)=2^{x-1} \ ; \ \text{b) } f(x)=0,75^x \ ; \ \text{c) } f(x)=1+e^x \ ; \ \text{d) } f(x)=\frac{1}{e^x}$$

29. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \ ; \ \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x} \ ; \ \text{c) } \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \ ; \ \text{d) } \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}} \ ;$$

$$\text{e) } \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right) \ ; \ \text{f) } \lim_{x\to+\infty}\left(2^x-x^3\right) \ ; \ \text{g) } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} \ ; \ \text{h) } \lim_{x\to-\infty}\left(0,75^x-x\right)$$

30. Halla el límite de la función $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x^2-5x+6}$ cuando $x\to 3$, $x\to 2$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, y representa la información que obtengas.

31. Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty \ , \ \lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \ , \ \lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

32. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2-2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.

33. Estudia las ramas infinitas de la función $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+4}$ y sitúa la curva respecto a su asíntota.