COMPLEJOS: REFUERZO

1 . Calcula el valor de a para que el número complejo

$$\frac{a+2i}{3-i}$$

sea:

$$\frac{a+2i}{3-i}=\frac{(a+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3a-2+(a+6)i}{10}$$

a) Un número real.

Para que sea real, la parte imaginaria ha de ser nula:

$$\frac{(a+6)}{10}=0\to a+6=0\to a=-6$$

b) Un número imaginario puro.

Para que sea imaginario puro la parte real debe ser nula:

$$\frac{3a-2}{10}=0\to 3a-2=0\to a=\frac{2}{3}$$

c) Tenga módulo 1.

Hago la división de los módulos y la igualo a uno:

$$\frac{\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{10}}=1\to\sqrt{a^2+4}=\sqrt{10}\to a^2+4=10\to a^2=6\to a=\pm\sqrt{6}$$

d) Tenga su afijo sobre la bisectriz del segundo cuadrante.

Para que esté sobre la bisectriz del segundo cuadrante el argumento ha de ser 135^0.

$$tg135^0=\frac{a+6}{3a-2}\to\frac{a+6}{3a-2}=-1;a+6=-3a+2;4a=-4;a=-1$$

e) Tenga argumento 30^0.

$$tg30^0=\frac{a+6}{3a-2}\to\frac{a+6}{3a-2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\to 3a+18=3\sqrt{3}a-2\sqrt{3};$$

$$\left(3-3\sqrt{3}\right)a=-\left(2\sqrt{3}+18\right)\to a=-\frac{2\sqrt{3}+18}{3-3\sqrt{3}}=-\frac{12+10\sqrt{3}}{3}$$

2. Si sabemos que una de las soluciones de una raíz quinta es 2_{82^0} determina:

a) El resto de raíces.

Al ser una raíz quinta, los afijos se diferencian en 360^0:5=72^0 así vamos sumando y restando 72^0 hasta obtener todos las raíces:

$$2_{10^0},2_{154^0},2_{226^0},2_{298^0}$$

b) El número complejo al que le has hecho la raíz en forma binómica.

El número complejo debe tener módulo $2^5=32$ y el argumento debe ser el que tiene la menor de sus raíces multiplicado por 5: $10^0\cdot 5=50^0$. Así, el número complejo en polar será: $32_{50^0}=32\cdot cos50^0+i\,32\cdot sen50^0=20{,}57+i24{,}51$ donde hemos aproximado a las centésimas.

c) El perímetro y el área del pentágono regular que forman los afijos de sus raíces.

Tenemos un pentágono regular cuyo radio es 2.

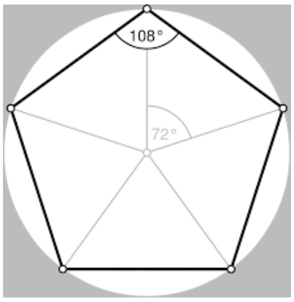
El área del pentágono regular la obtenemos aplicando la fórmula:

www.yoquieroaprobar.es

$$A = \frac{perímetro \cdot apotema}{2}$$

Calculo el perímetro:

Dividimos el pentágono en quesitos que son triángulos isósceles con ángulo desigual 72^0.



Para calcular el lado utilizo el teorema del coseno. Los afijos de sus raíces tienen módulo 2.

$$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot cos72^0 \rightarrow l = 2{,}35\ u$$

Perímetro: $p = 5 \cdot l = 11{,}76\ u$

Calculo la apotema utilizando el Teorema de Pitágoras

$$2^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + ap^2 \rightarrow ap = 1{,}62\ u$$

Así el área será:

$$A = \frac{11{,}76 \cdot 1{,}62}{2} = 9{,}52\ u^2$$

3. Utilizando la fórmula de Moivre, determina una fórmula para $\boldsymbol{sen3\alpha\ y \cos 3\alpha}$ en función de $\boldsymbol{sen\alpha\ y \cos\alpha}$.

La fórmula de Moivre nos indica:

$$(cos\alpha + isen\alpha)^3 = cos3\alpha + isen3\alpha$$

Desarrollo el binomio de Newton:

$$cos^3\alpha + 3cos^2\alpha \cdot isen\alpha + 3cos\alpha \cdot i^2sen^2\alpha + i^3sen^3\alpha = cos3\alpha + isen3\alpha$$
$$cos^3\alpha + i3cos^2\alpha \cdot sen\alpha - 3cos\alpha \cdot sen^2\alpha - isen^3\alpha = cos3\alpha + isen3\alpha$$

Igualando parte real y parte imaginaria:

$$cos3\alpha = cos^3\alpha - 3cos\alpha \cdot sen^2\alpha$$
$$sen3\alpha = 3cos^2\alpha \cdot sen\alpha - sen^3\alpha$$

4. Calcula el siguiente número complejo:

$\boldsymbol{a)}\ \left(\frac{\boldsymbol{1 + i\sqrt{3}}}{\boldsymbol{1 + i}}\right)^{\boldsymbol{30}}$

Como se trata de una potencia, paso a polar el numerador y el denominador:

$1 + i\sqrt{3} = 2_{60^0} \qquad 1 + i = \sqrt{2}_{45^0} \rightarrow \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2_{60^0}}{\sqrt{2}_{45^0}} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{15^0} = \sqrt{2}_{15^0} \rightarrow$

www.yoquieroaprobar.es

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30} = \left(\sqrt{2}_{15^0}\right)^{30} = (2^{15})_{450^0} = (2^{15})_{90^0} = 2^{15}i$$

$\boldsymbol{b)}\ \mathbf{2}_{\frac{\pi}{6}} - \sqrt{\mathbf{3}}_{\pi} + \mathbf{3}_{\frac{3\pi}{2}}$

Para sumar y restar complejos hay que pasarlo a binómica:

$$2_{\frac{\pi}{6}} = 2cos\frac{\pi}{6} + i2sen\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i$$

$$\sqrt{3}_{\pi} = \sqrt{3}cos\pi + i\sqrt{3}sen\pi = -\sqrt{3}$$

$$3_{\frac{3\pi}{2}} = -3i$$

$$2_{\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3}_{\pi} + 3_{\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3} + i - \left(-\sqrt{3}\right) - 3i = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{\frac{11\pi}{6}}$$

$\boldsymbol{c)}\ \sqrt{\dfrac{\mathbf{2-2}\boldsymbol{i}}{\mathbf{-3+3}\boldsymbol{i}}}$

Para hacer la raíz tengo que pasar a polar los dos números complejos:

$$z = 2 - 2i \rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \alpha \rightarrow tg\alpha = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow \alpha = 315^0 \text{(pues z está en el cuarto cuadrante)}$$

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}_{315^0}$$

$$z = -3 + 3i \rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \alpha \rightarrow tg\alpha = \frac{3}{-3} = -1 \rightarrow \alpha = 135^0 \text{ (pues z está en el segundo cuadrante)}$$

$$-3 + 3i = 3\sqrt{2}_{135^0}$$

Por tanto, el cociente expresado en polar queda:

$$\frac{2-2i}{-3+3i} = \frac{2\sqrt{2}_{315^0}}{3\sqrt{2}_{135^0}} = \left(\frac{2}{3}\right)_{180^0}$$

Hacemos ahora la raíz:

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)_{180^0}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{\frac{180^0+360^0k}{2}}\ _{k=0,1}$$

Las soluciones serán:

$$z_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^0} = \sqrt{\frac{2}{3}}i$$

www.yoquieroaprobar.es

$$z_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{270^0} = -\sqrt{\frac{2}{3}}i$$

5. Calcula y representa las soluciones de $\sqrt[4]{\left(-2+2\sqrt{3}i\right)^3}$ expresando los afijos correspondientes a las soluciones en forma binómica.

Dado que tenemos que elevar a una potencia y hacer raíces, paso a polar el número complejo dado:

módulo: $\sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

argumento:

$$tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120^0$$

donde he tenido en cuenta que pertenece al segundo cuadrante. Por tanto:

$$-2+2\sqrt{3}i = 4_{120^0}$$

Elevo al cubo el número polar:

$$\left(-2+2\sqrt{3}i\right)^3 = (4_{120^0})^3 = 64_{360^0} = 64_{0^0}$$

A continuación hago la raíz cuarta del número:

$$\sqrt[4]{64_{0^0}} = \sqrt[4]{64}_{\frac{0^0+360^0k}{4}} \quad k = 0,1,2,3$$

Si k=0 $\sqrt[4]{64}_{0^0} = 2\sqrt{2}_{0^0} = 2\sqrt{2}(cos0^0 + isen0^0) = 2\sqrt{2}$

Si k=1 $\sqrt[4]{64}_{90^0} = 2\sqrt{2}_{90^0} = 2\sqrt{2}(cos90^0 + isen90^0) = 2\sqrt{2}i$

Si k=2 $\sqrt[4]{64}_{180^0} = 2\sqrt{2}_{180^0} = 2\sqrt{2}(cos180^0 + isen180^0) = -2\sqrt{2}$

Si k=3 $\sqrt[4]{64}_{270^0} = 2\sqrt{2}_{270^0} = 2\sqrt{2}(cos270^0 + isen270^0) = -2\sqrt{2}i$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$\boldsymbol{a})(\boldsymbol{i^{23} - i^{37}})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{2i^{22} - 3i^{19}}$

Despejo z

$$z = \frac{2i^{22} - 3i^{19}}{i^{23} - i^{37}}$$

Calculo las potencia de i. Para ello divido la potencia entre 4 y me quedo con el resto:

$$i^{22} = i^2 = -1, i^{19} = i^3 = -i, i^{23} = i^3 = -i,\ i^{37} = i^1 = i$$

$$z = \frac{2(-1) - 3(-i)}{-i-i} = \frac{-2+3i}{-2i} = \frac{2i(-2+3i)}{(-2i)(2i)} = \frac{-6-4i}{4} = \frac{-3-2i}{2}$$

www.yoquieroaprobar.es

$\boldsymbol{b)} \boldsymbol{z^2 + iz + 1 = 0}$

$$z = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-1-4}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{-i \pm 5i}{2} = \begin{cases} 2i \\ -3i \end{cases}$$

$\boldsymbol{c)} \boldsymbol{z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0}$

Al ser una ecuación de grado tres tengo que encontrar al menos una solución para poder factorizar por Ruffini:

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 + 5 = -4 + 4 = 0$$

Luego -1 es una raíz. Si factorizo por Ruffini queda:

$$z^3 - 3z^2 + z + 5 = (z+1)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

Busco las raíces:

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

Luego las soluciones son: $-1, 2 + i\,, 2 - i$

$\boldsymbol{d)} \boldsymbol{z^4 + 2z^2 + 2 = 0}$

La resuelvo haciendo un cambio de variable: $t = z^2$

$$z^4 + 2z^2 + 2 = 0 \rightarrow t^2 + 2t + 2 = 0 \rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$
$$= -1 \pm i$$

Deshacemos el cambio:

$t_1 = -1 + i \rightarrow z^2 = -1 + i \rightarrow z = \sqrt{-1+i}$ para realizar la raíz pasamos a polar:

$-1 + i = \sqrt{2}_{135^0} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{135^0}} = \sqrt[4]{2}_{\frac{135^0 + 360^0 k}{2}}$ $k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{67,5^0}$ $z_2 = \sqrt[4]{2}_{247,5^0}$

$t_1 = -1 - i \rightarrow z^2 = -1 - i \rightarrow z = \sqrt{-1-i}$ para realizar la raíz pasamos a polar:

$-1 - i = \sqrt{2}_{225^0} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{225^0}} = \sqrt[4]{2}_{\frac{225^0 + 360^0 k}{2}}$ $k = 0, 1 \rightarrow z_3 = \sqrt[4]{2}_{112,5^0}$ $z_4 = \sqrt[4]{2}_{292,5^0}$

7. Halla los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

Lo resuelvo en polar:

$$z^2 = \bar{z}$$

En forma polar: $z = r_\alpha \rightarrow z^2 = (r_\alpha)^2 = (r^2)_{2\alpha}$ y en forma polar el conjugado: $\bar{z} = r_{-\alpha}$

Igualo:

$$(r^2)_{2\alpha} = r_{-\alpha}$$

www.yoquieroaprobar.es

Dos números imaginarios expresados en forma polar son iguales si los son sus módulos y sus argumentos. Por tanto:

$$r^2 = r \rightarrow r^2 - r = 0 \rightarrow r \cdot (r-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r - 1 = 0 \rightarrow r_2 = 1 \end{cases}$$

Tengo dos valores de r. Considero que $r_2 = 1$

Los argumentos han de ser iguales o con una diferencia de 360^0 :

$$2\alpha = -\alpha + 360^0 k \rightarrow 3\alpha = 360^0 k \rightarrow \alpha = 120^0 k$$

Doy valores a k siempre que α no supere los 360^0:

Si $k = 0 \quad \alpha = 0^0 \rightarrow z_1 = 1_{0^0} = 1$

$Si\ k = 1 \quad \alpha = 120^0 \rightarrow z_2 = 1_{120^0} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Si\ k = 2 \quad \alpha = 240^0 \rightarrow z_3 = 1_{240^0} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$Si\ k = 3 \quad \alpha = 360^0$ y obtengo la misma solución que z_1

Considero ahora que $r_1 = 0$

La solución que obtengo es $z_4 = 0$ y no tengo en cuenta los argumentos porque si el módulo es cero, el numero imaginario es cero.

8. Determina una ecuación de grado tres tal que dos de sus raíces sean $2\ y\ 3 - 2i$.

Al no indicar que los coeficientes son reales la respuesta es abierta:

$$(z-2) \cdot \big(z - (3-2i)\big) \cdot \big(z - (a+bi)\big) = 0$$

donde a y b son dos números cualesquiera.

Si indican que los coeficientes son reales, la tercera raíz ha de ser el conjugado de la compleja.

$$(z-2) \cdot \big(z - (3-2i)\big) \cdot \big(z - (3+2i)\big) = 0$$

9. Resuelve las operaciones indicadas para los complejos:

$$\boldsymbol{z_1 = 2_{60^0}, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = 2(cos210^0 + isen210^0)}$$

$\boldsymbol{a) z_1 z_2 z_3} \qquad \boldsymbol{b) \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_3}} \qquad \boldsymbol{c)\ z_3^4} \qquad \boldsymbol{d)\ z_2^{-2}} \qquad \boldsymbol{e)\ z_1 + 2z_2 - 3z_3}$

En primer lugar paso a polar los tres números complejos: $z_1 = 2_{60^0}, z_2 = \sqrt{2}_{135^0}, \quad z_3 = 2_{210^0}$

$a) z_1 z_2 z_3 = 2_{60^0} \cdot \sqrt{2}_{135^0} \cdot 2_{210^0} = 4\sqrt{2}_{405^0} = 4\sqrt{2}_{45^0}$

$$b) \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_3} = \frac{2_{60^0} \cdot \sqrt{2}_{225^0}}{2_{210^0}} = \sqrt{2}_{75^0}$$

donde he tenido en cuenta que el conjugado de z_2 en forma polar es $r_{360^0 - \alpha}$

www.yoquieroaprobar.es

$c)\ z_3^4 = (2_{210^0})^4 = 16_{840^0} = 16_{120^0}$

$d)\ z_2^{-2} = \frac{1}{z_2^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}_{135^0}\right)^2} = \frac{1_{0^0}}{2_{270^0}} = \left(\frac{1}{2}\right)_{-270^0} = \left(\frac{1}{2}\right)_{90^0} = \frac{i}{2}$

$e)\ z_1 + 2z_2 - 3z_3 = \left(1+\sqrt{3}i\right) + 2(-1+i) - 3\left(-\sqrt{3}-i\right) = 3\sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3}+5\right)i$

donde he pasado a forma binómica z_1 y z_3

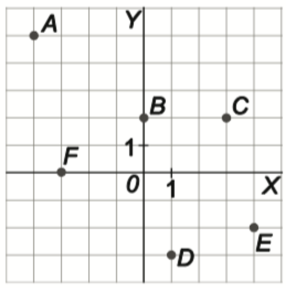
10. Determina los números reales b y c sabiendo que la raíz del polinomio $P(z) = 2z^3 + bz^2 - 4z + c$ es $1 - i$. Determina las otras dos raíces.

Como $1 - i$ es una raíz $P(1-i) = 0 \rightarrow 2(1-i)^3 + b(1-i)^2 - 4(1-i) + c = 0$

Desarrollando: $2(1^3 - 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 - i^3) \quad + b(1^2 + i^2 - 2i) - 4(1-i) + c = 0 \rightarrow$
$2\cdot(1 - 3i - 3 + i) + b(1 - 1 - 2i) - 4(1-i) + c = 0$
$2\cdot(-2-2i) + b(-2i) - 4(1-i) + c = 0 \rightarrow -4 - 4i - 2bi - 4 + 4i + c = 0$
Como b y c son reales igualo parte real y parte imaginaria a cero:
$-4 - 4 + c = 0 \rightarrow c = 8$
$-4 - 2b + 4 = 0 \rightarrow b = 0$
Luego el polinomio es: $P(z) = 2z^3 - 4z + 8$

Al ser coeficientes reales otra raíz será la conjugada $1 + i$ y la tercera ha de ser real.
Por el teorema del resto compruebo que $P(-2) = 0$ luego la tercera raíz es -2.

11. Escribe en forma binómica, polar y trigonométrica los números complejos cuyos afijos se señalan en la figura: Escribe asimismo los opuestos y los conjugados de cada uno de ellos en forma binómica y polar.



Forma binómica, opuesto y conjugado:

$z_A = -4 + 3\text{i};\ -z_A = 4 - 3\text{i};\ \overline{z_A} = -4 - 3i$
$z_B = 2\text{i};\ -z_B = -2\text{i};\ \overline{z_B} = -2i$
$z_C = 3 + 2\text{i};\ -z_C = -3 - 2\text{i};\ \overline{z_C} = 3 - 2i$
$z_D = 1 - 3\text{i};\ -z_D = -1 + 3\text{i};\ \overline{z_D} = 1 + 3i$
$z_E = 4 - 2\text{i};\ -z_E = -4 + 2\text{i};\ \overline{z_E} = 4 + 2i$
$z_F = -3\ ;\ -z_E = 3;\ \overline{z_E} = -3$

www.yoquieroaprobar.es

Forma polar, opuesto y conjugado:

$z_A = \sqrt{41}_{128,66^0}$; $-z_A = \sqrt{41}_{308,66^0}$; $\overline{z_A} = \sqrt{41}_{231,34^0}$
$z_B = 2_{90^0}$; $-z_B = 2_{270^0}$; $\overline{z_B} = 2_{270^0}$
$z_C = \sqrt{13}_{33,69^0}$; $-z_C = \sqrt{13}_{213,69^0}$; $\overline{z_C} = \sqrt{13}_{326,31^0}$
$z_D = \sqrt{10}_{288,43^0}$; $-z_D = \sqrt{10}_{108,43^0}$; $\overline{z_D} = \sqrt{10}_{71,57^0}$
$z_E = 2\sqrt{3}_{333,43^0}$; $-z_E = 2\sqrt{3}_{153,43^0}$; $\overline{z_E} = 2\sqrt{3}_{26,57^0}$
$z_F = 3_{180^0}$; $-z_F = 3_{0^0}$; $\overline{z_F} = 3_{180^0}$

En forma binómica, opuesto y conjugado:

$z_A = \sqrt{41}(cos128,66^0 + isen128,66^0)$; $-z_A = \sqrt{41}(\cos 308,66^0 + \text{isen}308,66^0$;
$\overline{z_A} = \sqrt{41}(cos231,34^0 + isen231,34^0)$
$z_B = 2(cos90^0 + isen90^0)$; $-z_B = 2(cos270^0 + isen270^0) = \overline{z_B}$
$z_C = \sqrt{13}(\cos 33,69^0 + isen33,69^0)$; $-z_C = \sqrt{13}(\cos 213,69^0 + isen213,69^0)$;
$\overline{z_C} = \sqrt{13}(\cos 326,31^0 + isen326,31^0)$
$z_D = \sqrt{10}(\cos 288,43^0 + isen288,43^0)$; $-z_D = \sqrt{10}(\cos 108,43^0 + isen108,43^0)$;
$\overline{z_D} = \sqrt{10}(\cos 71,57^0 + isen71,57^0)$
$z_E = 2\sqrt{3}(\cos 333,43^0 + isen333,43^0)$; $-z_E = 2\sqrt{3}(\cos 153,43^0 + isen153,43^0)$;
$\overline{z_E} = 2\sqrt{3}(\cos 26,57^0 + isen26,57^0)$
$z_F = 3(cos180^0 + isen180^0)$; $-z_F = 3(cos0^0 + isen0^0)$; $\overline{z_F} = 3(cos180^0 + isen180^0)$

www.yoquieroaprobar.es

12. Encuentra los menores enteros positivos m y n que verifican que $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^m = (1 - i)^n$.

Paso ambos números a polar:

$z = 1 + i\sqrt{3} = 2_{60^0}$

$z = 1 - i = \sqrt{2}_{315^0}$ pues está en el cuarto cuadrante

$$(2_{60^0})^m = \left(\sqrt{2}_{315^0}\right)^n \rightarrow (2^m)_{60^0 m} = \left(\sqrt{2}^n\right)_{315^0 n}$$

Igualo módulos y argumentos:

$$2^m = \sqrt{2}^n \rightarrow 2^m = 2^{\frac{n}{2}} \rightarrow m = \frac{n}{2} \rightarrow n = 2m$$

$$315^0 n = 60^0 m + 360^0 k \rightarrow 630^0 m = 60^0 m + 360^0 k \rightarrow 630^0 m - 60^0 m = 360^0 k \rightarrow$$

$$570^0 m = 360^0 k \rightarrow 19^0 m = 12^0 k$$

El menor m que hace que sea un múltiplo de 360^0 es m=12, pues 12 y 19 son primos entre sí y, por tanto, n=24

13. Escribe verdadero o falso:

a) Si z es real se verifica que $|z| = z$.

Falso. Contraejemplo: si $z = -3 \rightarrow |z| = 3 \neq z$

b) Para cualquier número complejo se verifica $Re(z^4) = 4Re(z)$.

Falso. Contraejemplo $Re(2^4)=16$ $4Re(2)=8$

c) El número 7 es real y por tanto no es complejo.

Falso. Todos los reales son complejos. Tienen nula la parte imaginaria.

d) Si el opuesto de un complejo coincide con su conjugado, entonces es imaginario puro.

Verdadera. Sea $z = bi$ un número imaginario puro. Su conjugado es $\bar{z} = -bi$ y su opuesto es $-z = -bi$ luego su conjugado coincide con su opuesto.

e) Ninguna de las raíces cuartas de -16 es un número real.

Verdadero. $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^0}} = \sqrt[4]{16}_{\frac{180^0+360^0k}{4}} = \sqrt[4]{16}_{45^0+90^0k}$ con k=0, 1, 2, 3. Observando el argumento nunca va a ser 0^0 ó 180^0, luego nunca va a ser real.

14. La suma de dos números complejos es 3 + i. La parte real del primero es 2 y el cociente entre este y el segundo es un número real. Hállalos.

Sean dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$,

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = 3 + i \rightarrow a + c = 3; b + d = 1$

$Re(z_1) = 2 \rightarrow a = 2 \rightarrow c = 1$

Por otro lado, el cociente entre el primero y el segundo es real:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + bi}{1 + di} = \frac{(2 + bi)(1 - di)}{(1 + di)(1 - di)} = \frac{2 + bd + (b - 2d)i}{1 + d^2}$$

Como el cociente debe ser real, la parte imaginaria debe ser cero:

$$b - 2d = 0 \rightarrow b = 2d \rightarrow 2d + d = 1 \rightarrow 3d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{3} \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

Así:

$$z_1 = 2 + \frac{2}{3}i \qquad z_2 = 1 + \frac{1}{3}i$$

15. Si z= $\boldsymbol{(i^0 + i^1 + \cdots + i^{10})(3 + ki)}$, *escrito de otro modo* $\boldsymbol{z = \sum_{n=1}^{10} i^n \cdot (3 + ki)}$, halla el valor de k para que el módulo de z sea 5.

Recuerda las potencias del número i son cíclicas, se repite la misma secuencia:

$$i^0 = 1, i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, i^9 = i, i^{10} = -1$$

$$\begin{aligned} z = (i^0 + i^1 + \cdots + i^{10})(3 + ki) &= (1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1)(3 + ki) \\ &= i(3 + ki) = -k + 3i \end{aligned}$$

Como dicen que el módulo debe ser 5

www.yoquieroaprobar.es

$$|z| = \sqrt{k^2 + 3^2} = 5 \rightarrow k^2 + 9 = 25 \rightarrow k^2 = 16 \rightarrow k = \pm\sqrt{16} \rightarrow k_1 = 4 \; y \; k_2 = -4$$

16. Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos sea 8.

Para resolver este ejercicio es conveniente trabajar en polar, Sean $r_\alpha \; y \; s_\beta$ dos números complejos expresados en forma polar.

Su cociente es 3 y lo expreso en forma polar:

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} = 3_{0^0}$$

$$\frac{r}{s} = 3 \rightarrow r = 3s; \; \alpha - \beta = 0^0 \rightarrow \alpha = \beta$$

La suma de sus argumentos es $\pi/3$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$$

La suma de sus módulos es 8: $r + s = 8 \rightarrow 3s + s = 8 \rightarrow 4s = 8 \rightarrow s = 2 \rightarrow r = 6$

Luego los números son: $6_{\frac{\pi}{6}} \; y \; 2_{\frac{\pi}{6}}$.

17. Calcula el valor de b para que el módulo de :

$$\boldsymbol{\frac{-3 + bi}{1 - 2i}}$$

sea igual a $\sqrt{2}$.

El módulo del cociente es el cociente de los módulos:

$$\frac{\sqrt{(-3)^2 + b^2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{2} \rightarrow \frac{\sqrt{9 + b^2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{9 + b^2} = \sqrt{10} \rightarrow 9 + b^2 = 10 \rightarrow b^2 = 1 \rightarrow$$

$b = \pm 1$

www.yoquieroaprobar.es