

1 Dadas las funciones:

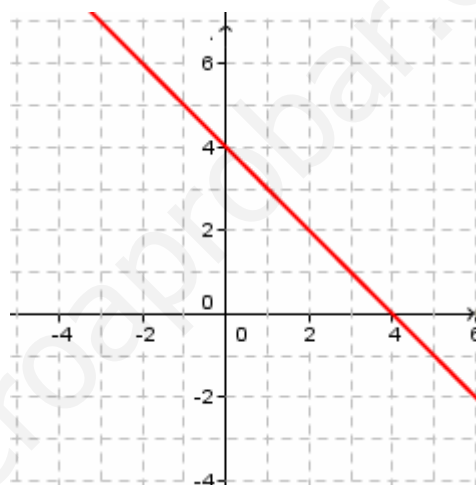
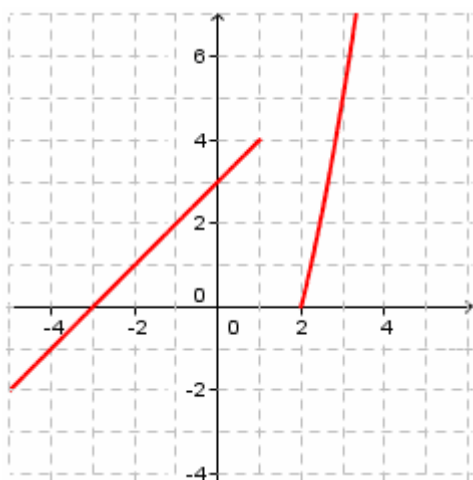
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad g(x) = 4 - x$$

- Calcular sus dominios
- Representa gráficamente ambas funciones
- Calcular $f + g$, $f \cdot g$, f / g

SOLUCIÓN:

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - [1,2] = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

$\text{Dom } g = \mathbb{R}$



c) Función $f + g$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x+3+4-x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 + 4 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow (f + g)(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Función $f \cdot g$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} (x+3)(4-x) & \text{si } x \leq 1 \\ (x^2 - 4)(4-x) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Función f / g

$$(f / g)(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{4-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2-4}{4-x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2

Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \qquad g(x) = x^2 - 5$$

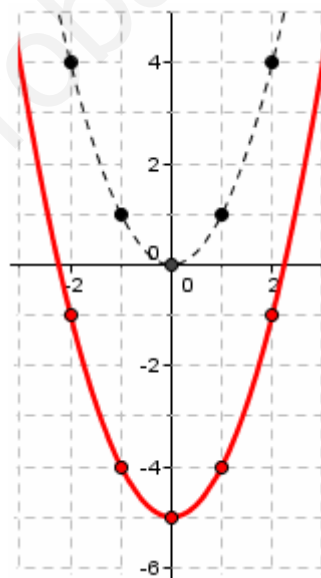
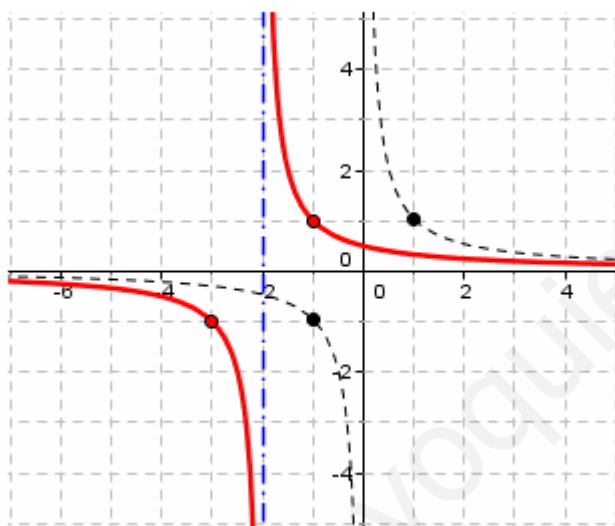
- Calcular sus dominios
- Representa gráficamente ambas funciones
- Calcular $f + g$, $f \cdot g$, f / g , especificando sus dominios.

SOLUCIÓN:

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Dom $g = \mathbb{R}$

- b) La función f es la transformada de $y = \frac{1}{x}$ (traslación horizontal 2 unidades a la izquierda)
 La función g es la transformada de $y = x^2$ (traslación vertical 5 unidades hacia abajo)

c) Teniendo en cuenta los dominios de f y g :

$$\circ (f + g)(x) = \frac{1}{x+2} + x^2 - 5$$

Dom $(f + g) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\circ (f \cdot g)(x) = \frac{x^2 - 5}{x+2}$$

Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\circ (f / g)(x) = \frac{1}{(x+2)(x^2 - 5)}$$

Dom $(f / g) = \mathbb{R} - \{-2, \pm\sqrt{5}\}$

3

Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{2x}{x+2} \qquad g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$$

- Calcular sus dominios
- Representa gráficamente ambas funciones
- Calcular $f + g$, $f \cdot g$, f / g , especificando sus dominios.

SOLUCIÓN:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

b) La función $f(x) = \frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{x+2}$.

Es la transformada de $y = -\frac{1}{x}$:

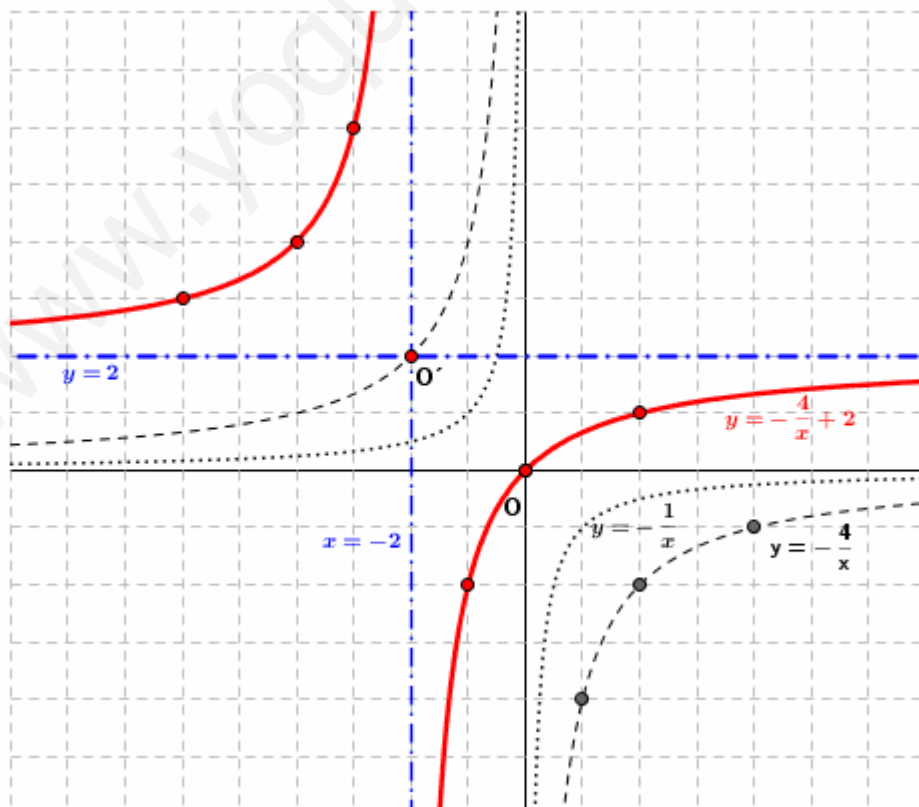
1º) $y = -\frac{1}{x} \rightarrow y = -\frac{4}{x}$ (dilatación, con lo cual no hay variación en las asíntotas)

La parte positiva pasa por los puntos (4,-1), (1,-4) y (2,-2). (Recuerda: $x \cdot y = -4$)

2º) $y = -\frac{4}{x} \rightarrow y = 2 - \frac{4}{x+2}$ (traslación horizontal 2 unidades a la izquierda y vertical 2 unidades hacia arriba, con lo cual las asíntotas son $x = -2$ e $y = 2$)

Trasladando los tres puntos anteriores, dibujamos una de las ramas: (2,1), (-1,-2) y (0,0).

La otra rama se dibuja por simetría central (centro de la simetría es el punto de corte de las asíntotas)



b) La función $f(x) = \frac{3x-1}{x-3} = 3 + \frac{8}{x-3}$.

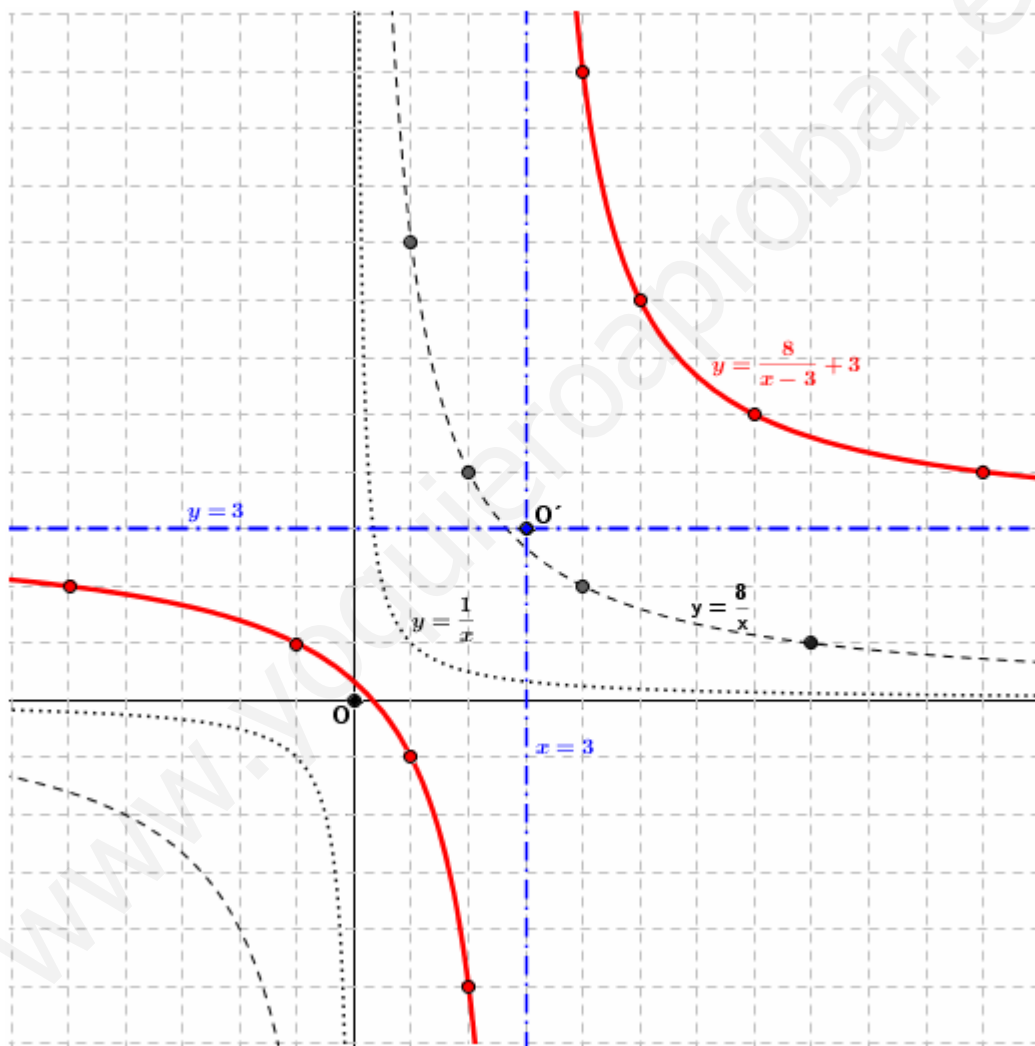
Es la transformada de $y = \frac{1}{x}$:

1º) $y = -\frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{8}{x}$ (dilatación, con los cual no hay variación en las asíntotas)

La parte positiva pasa por los puntos (8,1), (1,8), (4,2) y (2,4). (Recuerda: $x \cdot y = 8$)

2º) $y = \frac{8}{x} \rightarrow y = 3 + \frac{8}{x-3}$ (traslación horizontal 3 unidades a la derecha y vertical 3 unidades hacia arriba, con los cual las asíntotas son $x = 3$ e $y = 3$)

Trasladando los 4 puntos anteriores, dibujamos una de las ramas: (11,4), (4, 11), (7, 5) y (5,7).



c) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

$g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$

○ $(f+g)(x) = \frac{2x}{x+2} + \frac{3x-1}{x-3}$

Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

○ $(f \cdot g)(x) = \frac{2x(3x-1)}{(x+2)(x-3)}$

Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

○ $(f/g)(x) = \frac{2x(x-3)}{(x+2)(3x-1)}$

Dom $(f/g) = \mathbb{R} - \left\{-2, 3, \frac{1}{3}\right\}$

4

Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

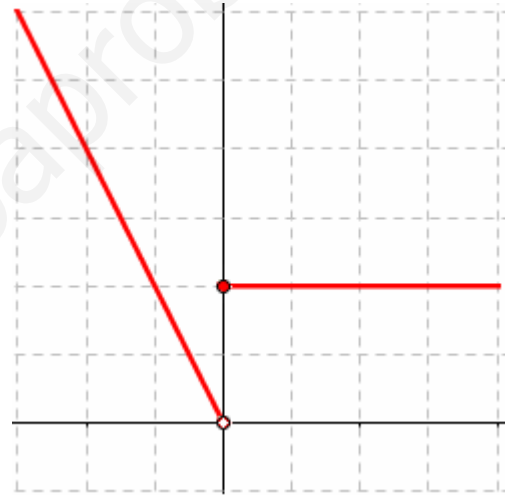
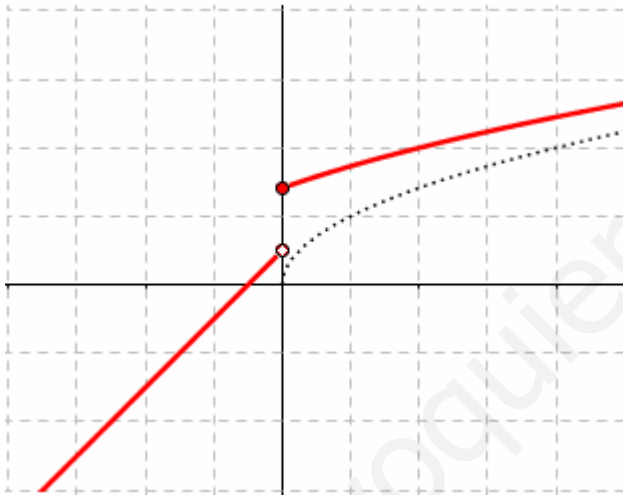
- Calcular sus dominios
- Representa gráficamente ambas funciones
- Calcular la expresión analítica de $f + g$, $f \cdot g$, f / g , especificando sus dominios

SOLUCIÓN:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ ya que cada rama está bien definida en su intervalo correspondiente.

$\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ ya que cada rama está bien definida en su intervalo correspondiente.

b) La función $y = \sqrt{x+2}$ es la transformada de $y = \sqrt{x}$ (traslación horizontal 2 unidades a la izquierda)



$$c) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ x + \frac{1}{3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\circ (f+g)(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ -x + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$$

$$\circ (f \cdot g)(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ -2x^2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R}$$

$$\circ (f/g)(x) = \begin{cases} 2 + \frac{\sqrt{x+2}}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{2x+1}{4x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R}$$

5

Se consideran las funciones:

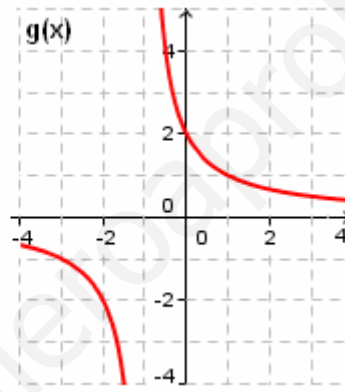
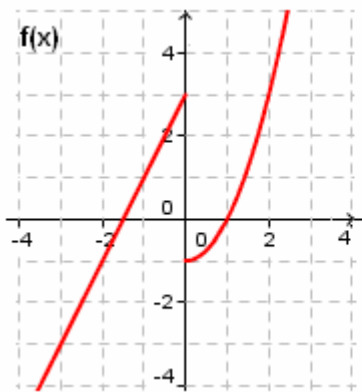
$$f(x) = \begin{cases} 3+2x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \frac{2}{x+1}$$

- Representar gráficamente las dos funciones.
- Calcular el dominio y la imagen de la función g .
- Calcular: $(g \circ f)(3)$, $(g \circ f)(0)$, $(f \circ g)(-2)$, $(f \circ g)(1)$

SOLUCIÓN:

- a) La función f está formada por una recta de pendiente 2 que pasa por $(0,3)$ y la parábola $y = x^2$ trasladada verticalmente 1 unidad hacia abajo.

La función g es una hipérbola, la transformada de $y = \frac{1}{x}$, dilatada ($k = 2$, pasa por $(2,1)$ y $(1,2)$) y, a continuación, trasladada verticalmente 2 unidades hacia arriba.



b) $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1\}$

Para determinar la imagen calculamos su función inversa:

Sea $y = \frac{2}{x+1}$, despejamos x

$$yx + y = 2 \rightarrow yx = 2 - y \rightarrow x = \frac{2-y}{y} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2-x}{x}$$

Por tanto, $\text{Im } g = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(8) = \frac{2}{9}$

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-2) = -1$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 0$

6

Se consideran las funciones:

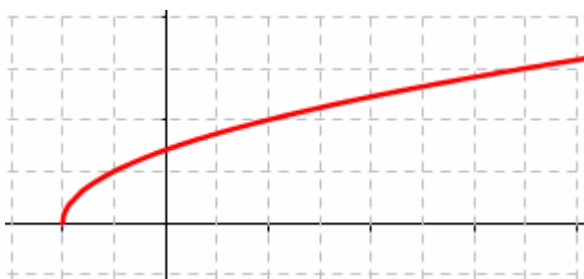
$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-3}$$

- Representar gráficamente ambas funciones.
- Calcular el dominio de ambas funciones
- Determinar la expresión analítica de $f + g$, $f \cdot g$ y f / g , especificando sus dominios.
- Hallar las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$
- Calcular la imagen de las funciones f y g .

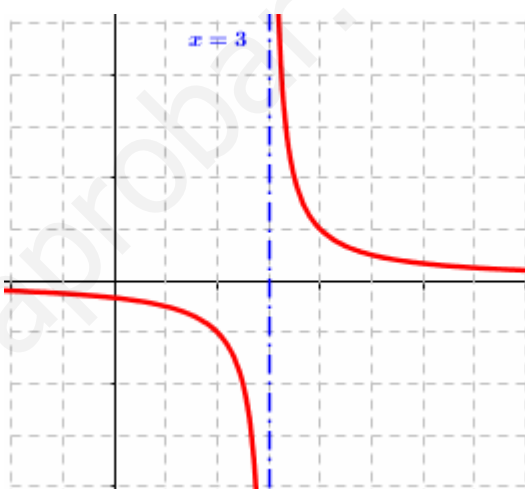
SOLUCIÓN:

a)



$$\text{Dom } f = [-2, +\infty)$$

$$\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{3\}$$



b)

$$\circ (f + g)(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x+2}$$

$$\text{Dom } (f + g) = [-2, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$\circ (f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$$

$$\text{Dom } (f \cdot g) = [-2, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$\circ (f/g)(x) = (x-3)\sqrt{x+2}$$

$$\text{Dom } (f/g) = [-2, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$\text{c) } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-3} + 2} = \sqrt{\frac{2x-5}{x-3}} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - 3}$$

d) Para calcular la imagen de cada función vamos a calcular previamente su función inversa.

$$\text{Inversa de } f: y = \sqrt{x+2} \rightarrow y^2 = x+2 \rightarrow x = y^2 - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

$$\text{Por tanto, } \text{Dom } f^{-1} = \mathbb{R} \rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Inversa de } g: y = \frac{1}{x-3} \rightarrow yx - 3y = 1 \rightarrow yx = 1 + 3y \rightarrow x = \frac{1+3y}{y} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x}$$

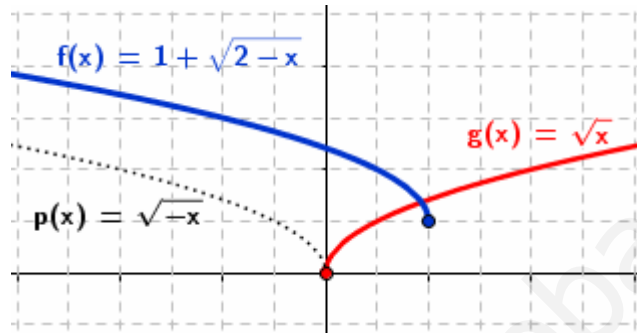
$$\text{Por tanto, } \text{Dom } g^{-1} = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

7

Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{2-x}$, representa gráficamente la función y calcula:

- Su dominio definición.
- Su función inversa.
- Su imagen

SOLUCIÓN:



a) $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / 2-x \geq 0\} = (-\infty, 2]$

b) $y = 1 + \sqrt{2-x} \rightarrow y-1 = \sqrt{2-x} \rightarrow (y-1)^2 = 2-x \rightarrow x = 2 - (y-1)^2 = -y^2 + 2y + 1$

Por tanto, $f^{-1}(x) = -x^2 + 2x + 1$

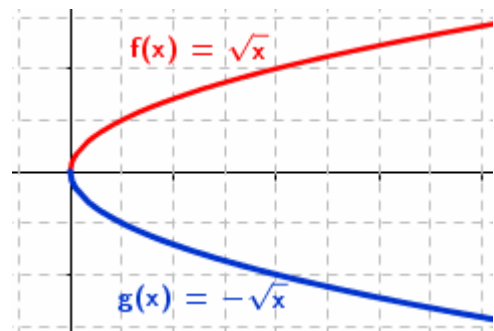
c) $\text{Im}(f) = \text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$

8

Hallar el dominio de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{-x}$. ¿Se puede obtener $f + g$?

SOLUCIÓN:

- o $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty)$
- o $\text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\} = (-\infty, 0]$
- o $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \{0\}$
- o Sólo existe la imagen de $x = 0$ para la función suma.

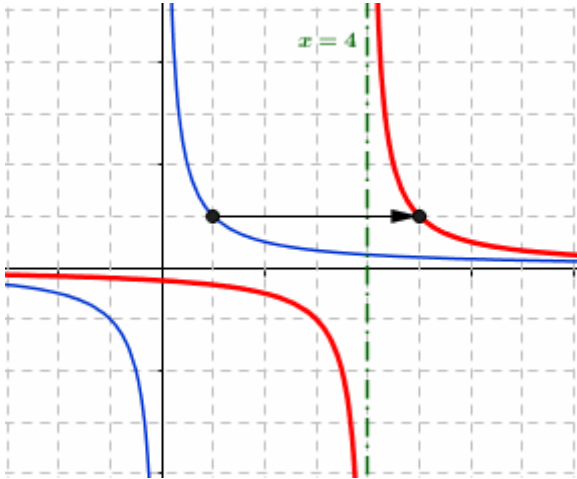


9

Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

- a) Representa en unos mismos ejes ambas funciones, indicando cómo se obtiene f a partir de g.
 b) Calcular $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} y sus respectivos dominios.

SOLUCIÓN:

La función f es la trasladada de g horizontalmente 4 unidades a la derecha.

Sus asíntotas son $y = 0$, $x = 4$.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}-4} = \frac{x}{1-4x} \quad \rightarrow \text{Dom } (f \circ g) = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x-4}\right) = x-4 \quad \rightarrow \text{Dom } (g \circ f) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$f^{-1}(x) = y \rightarrow y = \frac{1}{x-4} \rightarrow \frac{1}{y} = x-4 \rightarrow \frac{1}{y} + 4 = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 4 \rightarrow \text{Dom } (f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$$

10

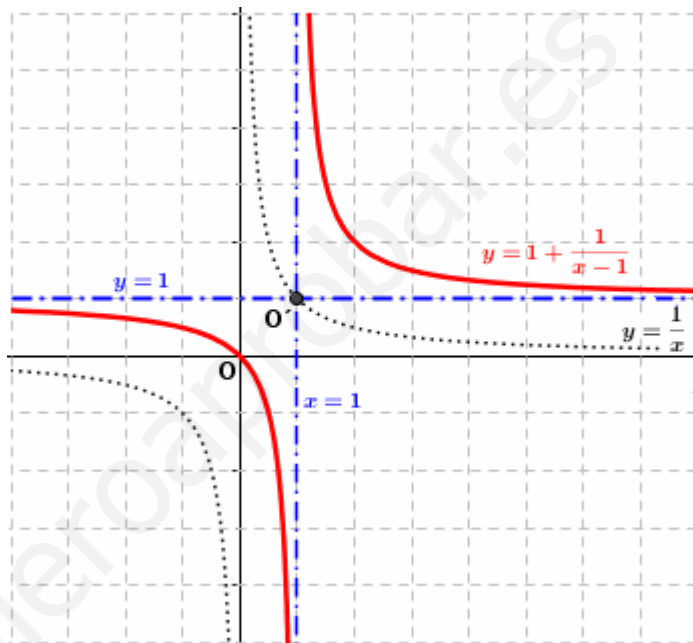
Representar la función $g(x) = \frac{x}{x-1}$:

- Comprobar que $g \circ g = I$, siendo I la función identidad.
- Hallar g^{-1} .
- ¿Qué relación hay entre g y g^{-1} ? ¿Por qué?

SOLUCIÓN:

$$y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

La función es la transformada de $y = \frac{1}{x}$, trasladada horizontalmente 1 unidad a la derecha y verticalmente 1 unidad hacia arriba



$$\text{a) } (g \circ g)(x) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x-x+1} = x$$

Luego, se cumple la igualdad $g \circ g = I$

$$\text{b) } g^{-1}(x) = y \rightarrow y = \frac{x}{x-1} \rightarrow yx - y = x \rightarrow yx - x = y \rightarrow x(y-1) = y \rightarrow x = \frac{y}{y-1}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$$

c) Ambas funciones son iguales, porque se verifica $g \circ g = I$:

$$g \circ g = I \rightarrow g \circ g \circ g^{-1} = I \circ g^{-1} \rightarrow g \circ I = I \circ g^{-1} \rightarrow g = g^{-1}$$

11

Dada las funciones definida por:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad g(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

a) Representar ambas funciones indicando las transformaciones realizadas a partir de $y = \frac{1}{x}$

b) Calcular: $g \circ f$, f^{-1} , $\text{Im}(f)$

SOLUCIÓN:

La función $f(x) = \frac{x-3}{x+5} = 1 - \frac{8}{x+5}$.

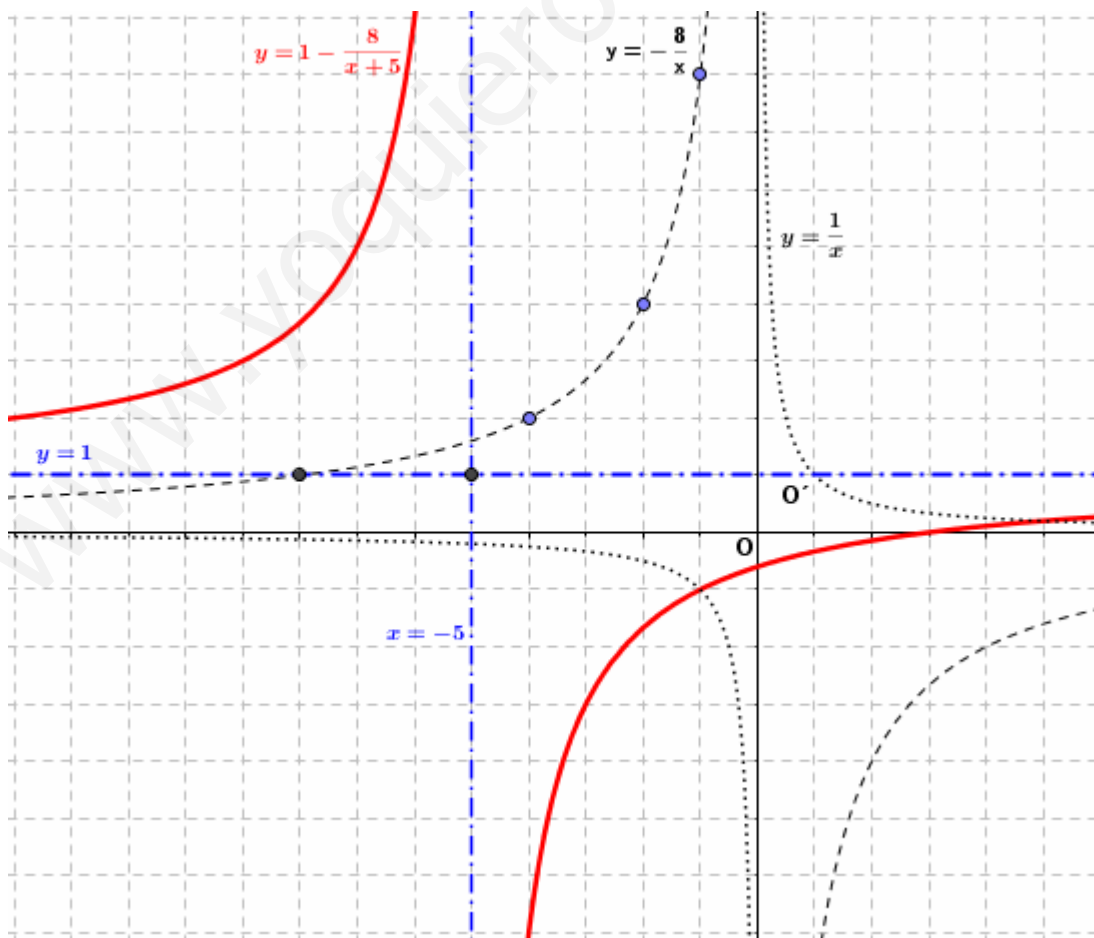
Es la transformada de $y = \frac{1}{x}$:

1º) $y = \frac{1}{x} \rightarrow y = -\frac{8}{x}$ (dilatación, con lo cual no hay variación en las asíntotas)

Una de las ramas pasa por los puntos $(-8,1)$, $(-1,8)$, $(-4,2)$ y $(-2,4)$. (Recuerda: $x \cdot y = -8$)

2º) $y = -\frac{8}{x} \rightarrow y = 1 - \frac{8}{x+5}$ (traslación vertical 1 unidad hacia arriba y horizontal 5 a la izquierda, con lo cual las asíntotas son $x = -5$ e $y = 1$)

Trasladando los 4 puntos anteriores, dibujamos una de las ramas: $(-13,3)$, $(-6,9)$, $(-9,3)$ y $(-7,5)$



La función $f(x) = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$.

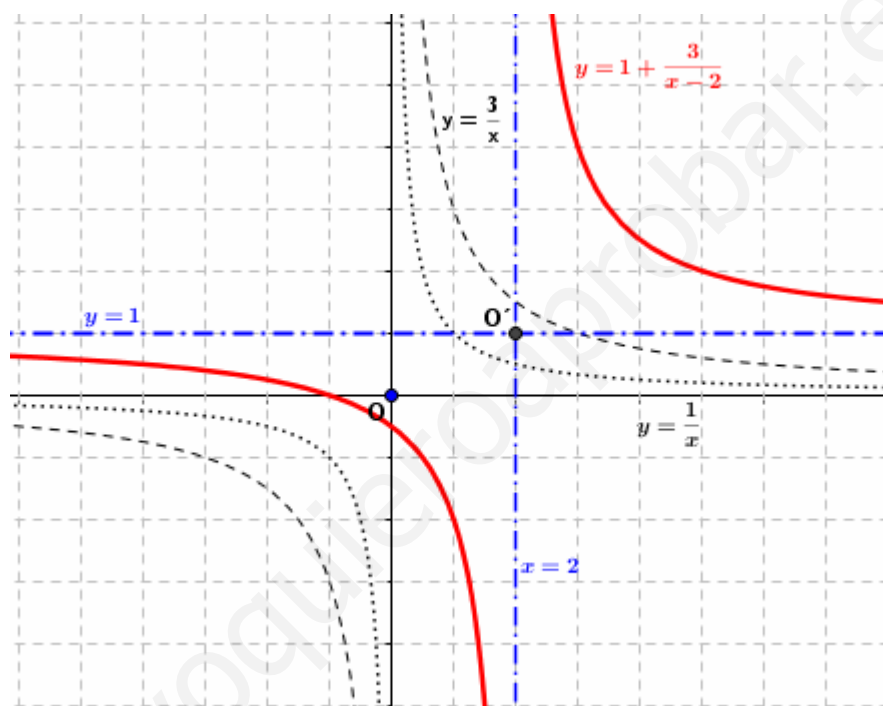
Es la transformada de $y = \frac{1}{x}$:

1º) $y = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{3}{x}$ (dilatación, con lo cual no hay variación en las asíntotas)

Una de las ramas pasa por los puntos (1,3) y (3,1). (Recuerda: $x \cdot y = 3$)

2º) $y = \frac{2}{x} \rightarrow y = 1 + \frac{3}{x-2}$ (traslación vertical 1 unidad hacia arriba y horizontal 2 a la derecha, con lo cual las asíntotas son $x = 2$ e $y = 1$)

Trasladando los 2 puntos anteriores, dibujamos una de las ramas: (2,5) y (4,3).



a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-2} - 3}{\frac{x+1}{x-2} + 5} = \frac{-2x+7}{6x-9}$

b, c) Despejamos x en la expresión de la función:

$$y = \frac{x+1}{x-2} \rightarrow y(x-2) = x+1 \rightarrow yx - 2y = x+1 \rightarrow yx - x = 1+2y \rightarrow x(y-1) = 1+2y \rightarrow x = \frac{1+2y}{y-1}$$

Luego, $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-1} \rightarrow \text{Im}(f) = \text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$

12

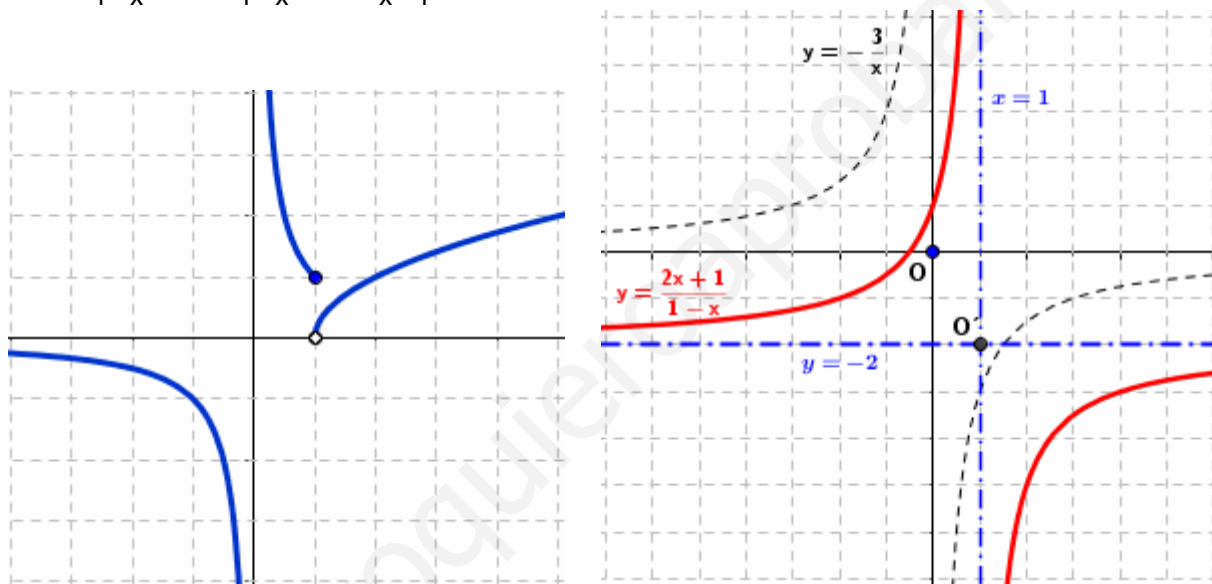
Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{2x+1}{1-x} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Representálas, calculando sus dominios.
- Calcular el dominio de las funciones $f+g$, $f \cdot g$, f/g
- Determina f^{-1} y calcula $\text{Im}(f)$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \frac{2x+1}{1-x} = -2 + \frac{3}{1-x} = -2 - \frac{3}{x-1}$$



$$\text{a) } \text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / 1-x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\}$$

- o Si $x > 1 \rightarrow g(x) = \sqrt{x-1}$ definida en este intervalo.
- o Si $x \leq 1 \rightarrow g(x) = \frac{1}{x}$ no definida si $x = 0$

$$\text{b) } \text{Dom}(f+g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$$\text{Dom}(f/g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$$\text{c) } y = \frac{2x+1}{1-x} \rightarrow y - xy = 2x + 1 \rightarrow y - 1 = 2x + xy \rightarrow y - 1 = x(2+y) \rightarrow x = \frac{y-1}{2+y}$$

$$\text{Por tanto, } f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2+x} \rightarrow \text{Im } f = \text{Dom } f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} / 2+x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

13

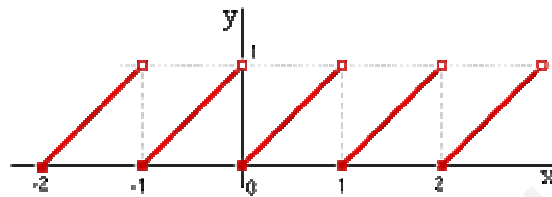
La **función decimal o mantisa**, en la que a cada número x se le asigna su parte decimal:

$$f(x) = \text{dec}(x) = x - E(x), \text{ siendo } E(x) \text{ la función parte entera de } x$$

Representa la función decimal y razona si:

- Es periódica
- Está acotada superior e inferiormente
- Tiene máximo y mínimo.

SOLUCIÓN:



- a. **Es periódica o no.**

La parte decimal de un número real es una función que toma siempre valores comprendidos entre 0 y 1: cada vez que incrementamos un número real en una unidad, se repite la misma imagen (sólo varía su parte entera). Es, por tanto, una función periódica de período $T = 1$.

- b. **Está acotada superiormente e inferiormente.**

Al tomar siempre valores comprendidos entre 0 y 1, la función $f(x) = \text{dec}(x)$ estará acotada superior e inferiormente; luego, estará acotada:

$$\text{Cotas superiores} = \{\text{valores mayores o iguales que } 1\}$$

$$\text{Cotas inferiores} = \{\text{valores menores o iguales que } 0\}$$

- c. **Tiene extremo superior y extremo inferior.**

$$\sup(f) = \{\text{menor cota superior}\} = 1$$

$$\inf(f) = \{\text{mayor cota inferior}\} = 0$$

- d. **Tiene máximo y mínimo.**

No tiene máximo puesto que el valor 1 no lo alcanza en ningún punto mientras que si tiene mínimo ya que el valor cero se alcanza en cualquier punto de abscisa entera.