Matemáticas I - Complejos

1. *Calcula* $\left(\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{12}$*. Expresa el resultado en forma binómica, pero mejor realiza todas las operaciones en forma polar.*

2. *Halla todas las soluciones de la ecuación* $z^6 + 8 = 0$*, represéntalas gráficamente y exprésalas en forma binómica.*

3. *Determina los valores de m y n para los que se cumple la igualdad:* $\frac{m+2i}{3+ni} = \left(\sqrt{2}\right)_{315°}$

4. *a) Utiliza la fórmula de* ***De Moivre*** *para hallar expresiones para sen(4t) y cos(4t).*

b) A partir de ellas, obtén una fórmula para tg(4t) en función de tg(t)

Respuestas

1. *Calcula* $\left(\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{12}$*. Expresa el resultado en forma binómica, pero mejor realiza todas las operaciones en forma polar.*

   |2- 2i| = $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, arg(2-2i) = arctg(-1) = 135º o 315º. Es 315º porque la parte imaginaria es negativa y la real positiva.

   $\left|1-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{1+3}=2,\ arg\left(1-\sqrt{3}\,i\right)=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=120º\ o\ 300º$. Se trata de 300º por la misma razón de antes. Entonces,

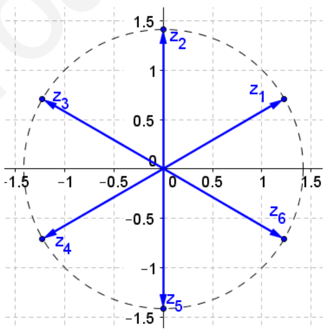
$$\left(\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{12}=\left(\frac{\left(2\sqrt{2}\right)_{315º}}{2_{300º}}\right)^{12}=\left(\left(\sqrt{2}\right)_{15º}\right)^{12}=\left(2^6\right)_{180º}=-64$$

2. *Halla todas las soluciones de la ecuación* $z^6+8=0$*, represéntalas gráficamente y exprésalas en forma binómica.*

   Será:

$$z=\sqrt[6]{-8}=\sqrt[6]{8_{180º}}=\left(\sqrt[6]{8}\right)_{\frac{180º}{6}+k\frac{360º}{6}}=\sqrt{2}_{30º+k\cdot 60º}=$$

$$\begin{cases}\sqrt{2}_{30º}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\\ \sqrt{2}_{90º}=\sqrt{2}i\\ \sqrt{2}_{150º}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\\ \sqrt{2}_{210º}=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\\ \sqrt{2}_{270º}=-\sqrt{2}i\\ \sqrt{2}_{330º}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{cases}$$



3. *Determina los valores de m y n para los que se cumple la igualdad:* $\frac{m+2i}{3+ni}=\left(\sqrt{2}\right)_{315°}$

$$\left(\sqrt{2}\right)_{315°}=\sqrt{2}\left(\cos(315º)+i\cdot sen(315º)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1-i$$

$$\frac{m+2i}{3+ni}=1-i\ \Rightarrow (m+2i)=(3+ni)(1-i)=(3+n)+(n-3)i$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=3+n\\ 2=n-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=5\\ m=8\end{cases}$$

4. *a) Utiliza la fórmula de* ***De Moivre*** *para hallar expresiones para sen(4t) y cos(4t).*

$$cos(4t) + i \cdot sen(4t) = \left(\cos(t) + i \cdot sen(t)\right)^4$$
$$= \binom{4}{0}(\cos(t))^4(\mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}(t))^0 + \binom{4}{1}(\cos(t))^3(\mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}(t))^1$$
$$+ \binom{4}{2}(\cos(t))^2(\mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}(t))^2 + \binom{4}{3}(\cos(t))^1(\mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}(t))^3$$
$$+ \binom{4}{4}(\cos(t))^0(\mathrm{i} \cdot \mathrm{sen}(t))^4 =$$
$$\boldsymbol{cos^4(t) + 4cos^3(t)sen(t)i - 6cos^2(t)sen^2(t) - 4cos(t)sen^3(t)i + sen^4(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{cos(4t) = cos^4(t) - 6cos^2(t)sen^2(t) + sen^4(t)} \\ \boldsymbol{sen(4t) = 4cos^3(t)sen(t) - 4cos(t)sen^3(t)} \end{cases}$$

b) A partir de ellas, obtén una fórmula para tg(4t) en función de tg(t)

$$tg(4t) = \frac{\mathrm{sen}(4t)}{cos(4t)} = \frac{\boldsymbol{4cos^3(t)sen(t) - 4cos(t)sen^3(t)}}{\boldsymbol{cos^4(t) - 6cos^2(t)sen^2(t) + sen^4(t)}}$$

$Dividiendo\ numerador\ y\ denominador\ por\ cos^4(t),$

$$tg(4t) = \frac{\boldsymbol{4tg(t) - 4tg^3(t)}}{1 - \boldsymbol{6tg^2(t) + tg^4(t)}}$$