1. Resuelve una de las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:
   a) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$
   b) $4 \operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 3$
   c) $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$

2. Resuelve uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0,\ 2\pi]$:
   a) $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \\ x - y = 30^{\circ} \end{cases}$
   b) $\begin{cases} y + \operatorname{sen}^2 x = 2 \\ y + \cos^2 x = 1 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = -1 \end{cases}$

3. Dado el triángulo ABC con $a = 1$ m, $B = 30^{\circ}$ y $C = 45^{\circ}$:
   a) Resuelve el triángulo.
   b) Calcula su área.

4. Realiza uno de los dos apartados siguientes:
   a) Calcula el valor de la siguiente expresión, simplificando el resultado: $\dfrac{\operatorname{cotg} 150^{\circ} - \operatorname{cosec} 315^{\circ}}{\sec 120^{\circ} - \operatorname{tg} 240^{\circ}}$
   b) Simplifica todo lo que puedas la expresión $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$

5. Realiza la siguiente operación con números complejos, expresando el resultado en forma polar y trigonométrica:
$$\sqrt[5]{\frac{-8-8\sqrt{3}\,i}{\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^2}}$$

6. Encuentra las posibles soluciones, en forma binómica, de la siguiente ecuación: $z^5 + 125z^2 = 0$.

Soluciones

1. Resuelve una de las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:

a) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

Por un lado:

$$\cos 4x = \cos(3x + x) = \cos 3x \cdot \cos x - \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x$$

y, por otro:

$$\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cdot \cos x + \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x$$

Sumando las dos igualdades anteriores obtenemos:

$$\cos 4x + \cos 2x = 2\cos 3x \cdot \cos x$$

Entonces la ecuación que hemos de resolver es equivalente a:

$$2\cos 3x \cdot \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\cos 3x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos 3x - 1) = 0$$

Hay dos posibilidades.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^{\circ} + 180^{\circ}k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{2} + k\pi$).
- $2\cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = 60^{\circ} + 360^{\circ}k$, o bien $3x = 300^{\circ} + 360^{\circ}k \Leftrightarrow x = 20^{\circ} + 120^{\circ}k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$), o bien $x = 100^{\circ} + 120^{\circ}k$ (en radianes sería $\frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$).

b) $4\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 3 \Leftrightarrow 4\operatorname{sen} x + 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow 4\operatorname{sen} x + 2(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\operatorname{sen} x + 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow -4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x - 1 = 0$.

Llamando $\operatorname{sen} x = t$, tenemos $-4t^2 + 4t + 1 = 0$, ecuación de segundo grado cuya solución es $t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-1)}}{2\cdot(-4)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$. Así pues $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 30^{\circ} + 360^{\circ}k$, o bien $x = 120^{\circ} + 360^{\circ}k$ (en radianes serían $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, o bien $x = \frac{2\pi}{6} + 2k\pi$).

c) $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3}\operatorname{sen} x \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3}\sqrt{1 - \cos^2 x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3 - 3\cos^2 x}$. Elevando ambos miembros al cuadrado: $1 - 2\cos x + \cos^2 x = 3 - 3\cos^2 x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Llamando $\cos x = t$, tenemos $2t^2 - t - 1 = 0$, ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

- Si $t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0^{\circ} + 360^{\circ}k = 360^{\circ}k$ (en radianes $x = 2k\pi$). Esta solución habría que descartarla pues $\operatorname{cosec} x$ y $\operatorname{cotg} x$ no están definidas para $x = 2k\pi$.
- Si $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 120^{\circ} + 360^{\circ}k$, o bien $x = 240^{\circ} + 360^{\circ}k$ (en radianes $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, o bien $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$). La segunda solución habría que descartarla pues:

Por un lado, $\operatorname{cosec} 240^{\circ}=\dfrac{1}{\operatorname{sen} 240^{\circ}}=\dfrac{1}{-\operatorname{sen} 60^{\circ}}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}/2}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Y, por otro lado, $\operatorname{cotg} 240^{\circ}=\operatorname{cotg} 60^{\circ}=\dfrac{\cos 60^{\circ}}{\operatorname{sen} 60^{\circ}}=\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Así pues $\operatorname{cosec} 240^{\circ}-\operatorname{cotg} 240^{\circ}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}$.

Lo que ocurre es que al elevar al cuadrado lo signos se convierten a positivos.

2. Resuelve uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0,\ 2\pi]$:

a) $\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y\\ x-y=30^{\circ}\end{cases}$

Como $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y$, y de la primera ecuación se deduce que $\cos x\cdot\cos y-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y=0$, entonces $\cos(x+y)=0$. De la segunda ecuación $x=30^{\circ}+y$. Por tanto

$$\cos(30^{\circ}+2y)=0\Leftrightarrow 30^{\circ}+2y=\begin{cases}90^{\circ}\\270^{\circ}\end{cases}\Leftrightarrow 2y=\begin{cases}60^{\circ}\\240^{\circ}\end{cases}\Leftrightarrow y=\begin{cases}30^{\circ}\\120^{\circ}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}\\[2mm]\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}.$$

Como $x=30^{\circ}+y\Rightarrow x=\begin{cases}60^{\circ}\\150^{\circ}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}\\[2mm]\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}$.

Por tanto hay dos parejas de soluciones $(x_1,\ y_1)=\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$, $(x_2,\ y_2)=\left(\dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Recuérdese que las soluciones había que darlas en el intervalo $[0,\ 2\pi]$.

b) $\begin{cases}y+\operatorname{sen}^2 x=2\\ y+\cos^2 x=1\end{cases}$

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x=1\Leftrightarrow\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=-1\Leftrightarrow\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$y+\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}=2\Leftrightarrow y+1=2\Leftrightarrow y=1.$$

c) $\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \cos 2x+\cos 2y=-1\end{cases}$

Observemos que $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1$.

De la misma manera, $\cos 2y=2\cos^2 y-1$.

Sustituyendo en la segunda ecuación: $2\cos^2 x-1+2\cos^2 y-1=-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\cos^2 y=1$.

Despejando $\cos x$ de la primera ecuación y sustituyendo en esta última obtenemos:

$2(1-\cos y)^2+2\cos^2 y=1 \Leftrightarrow 2\left(1+\cos^2 y-2\cos y\right)+2\cos^2 y=1 \Leftrightarrow 4\cos^2 y-4\cos y+1=0$.

Haciendo $\cos y=t$, tenemos la ecuación $4t^2-4t+1=0$ (la misma que aparece en el apartado b) del ejercicio 1), cuya solución es $t=\dfrac{1}{2}$. Entonces $\cos y=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{5\pi}{3}\end{cases}$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\cos x+\cos y=1 \Leftrightarrow \cos x=1-\cos y \Leftrightarrow \cos x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{5\pi}{3}\end{cases}$$

Tenemos pues dos parejas de soluciones: $(x_1,\ y_1)=\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, $(x_2,\ y_2)=\left(\dfrac{5\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}\right)$

3. Recordemos que en el triángulo ABC, $a=1$ m, $B=30^\circ$ y $C=45^\circ$.

   a) En primer lugar $A=180^\circ-30^\circ-45^\circ=105^\circ$.

   Por el teorema de los senos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}105^\circ}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}30^\circ} \Leftrightarrow b=\dfrac{\operatorname{sen}30^\circ}{\operatorname{sen}105^\circ} \Leftrightarrow b\simeq 0{,}518$ m.

   Análogamente: $\dfrac{1}{\operatorname{sen}105^\circ}=\dfrac{c}{\operatorname{sen}45^\circ} \Leftrightarrow c=\dfrac{\operatorname{sen}45^\circ}{\operatorname{sen}105^\circ} \Leftrightarrow c\simeq 0{,}732$ m.

   b) Utilicemos una de las fórmulas conocidas para calcular el área A del triángulo:

   $$\mathrm{A}=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}518\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0{,}183\,\mathrm{m}^2.$$

4. Realiza uno de los dos apartados siguientes:

   a) Calcula el valor de la siguiente expresión, simplificando el resultado: $\dfrac{\operatorname{cotg}150^\circ-\operatorname{cosec}315^\circ}{\sec 120^\circ-\operatorname{tg}240^\circ}$

$$\frac{\operatorname{cotg}150^\circ-\operatorname{cosec}315^\circ}{\sec 120^\circ-\operatorname{tg}240^\circ}=\frac{\dfrac{\cos 150^\circ}{\operatorname{sen}150^\circ}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}315^\circ}}{\dfrac{1}{\cos 120^\circ}-\dfrac{\operatorname{sen}240^\circ}{\cos 240^\circ}}=\frac{\dfrac{-\cos 30^\circ}{\operatorname{sen}30^\circ}-\dfrac{1}{-\operatorname{sen}45^\circ}}{\dfrac{1}{-\cos 60^\circ}-\dfrac{-\operatorname{sen}60^\circ}{-\cos 60^\circ}}=$$

$$=\frac{\dfrac{-\sqrt{3}/2}{1/2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}/2}}{\dfrac{1}{-1/2}-\dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2}}=\frac{-\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}}{-2-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{-2-\sqrt{3}}=\frac{(-\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(-2+\sqrt{3})}{(-2-\sqrt{3})\cdot(-2+\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3-2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4-3}=\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-3$$

b) Simplifica todo lo que puedas la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{(1+2\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha}{(1+2\cos\alpha)\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$

5. Realiza la siguiente operación con números complejos, expresando el resultado en forma polar y trigonométrica:

$$\sqrt[5]{\frac{-8-8\sqrt{3}\,i}{\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^2}}$$

Por un lado se tiene $\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^2=\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2\left(-2\sqrt{3}\right)(2i)+(2i)^2=12-8\sqrt{3}\,i-4=8-8\sqrt{3}\,i$.

Por tanto $\dfrac{-8-8\sqrt{3}\,i}{\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^2}=\dfrac{-8-8\sqrt{3}\,i}{8-8\sqrt{3}\,i}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}=\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)}{\left(1-\sqrt{3}\,i\right)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)}=\dfrac{-1-2\sqrt{3}\,i-3i^2}{1-3i^2}=$

$$=\frac{-1-2\sqrt{3}i+3}{1+3}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

La parte real de este número complejo es $x=\dfrac{1}{2}$, y la parte imaginaria es $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

El módulo r del número complejo es: $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{3}}=\sqrt{1}=1$.

El argumento α del mismo es: $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}/2}{1/2}=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=120^\circ$.

Por tanto, el número complejo del cual tenemos que hallar su raíz quinta es, en forma polar: $z=1_{120^\circ}$.

Hay cinco soluciones para $\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{1_{120^\circ}}$.

Todas tienen módulo $r=1$ (pues la raíz quinta de 1 es 1) y argumento

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{360^\circ k}{n}=\frac{120^\circ}{5}+\frac{360^\circ k}{5}=24^\circ+72^\circ k.$$

Para $k=0,1,2,3,4$ obtenemos los cinco argumentos (hasta formar un pentágono regular), que son:

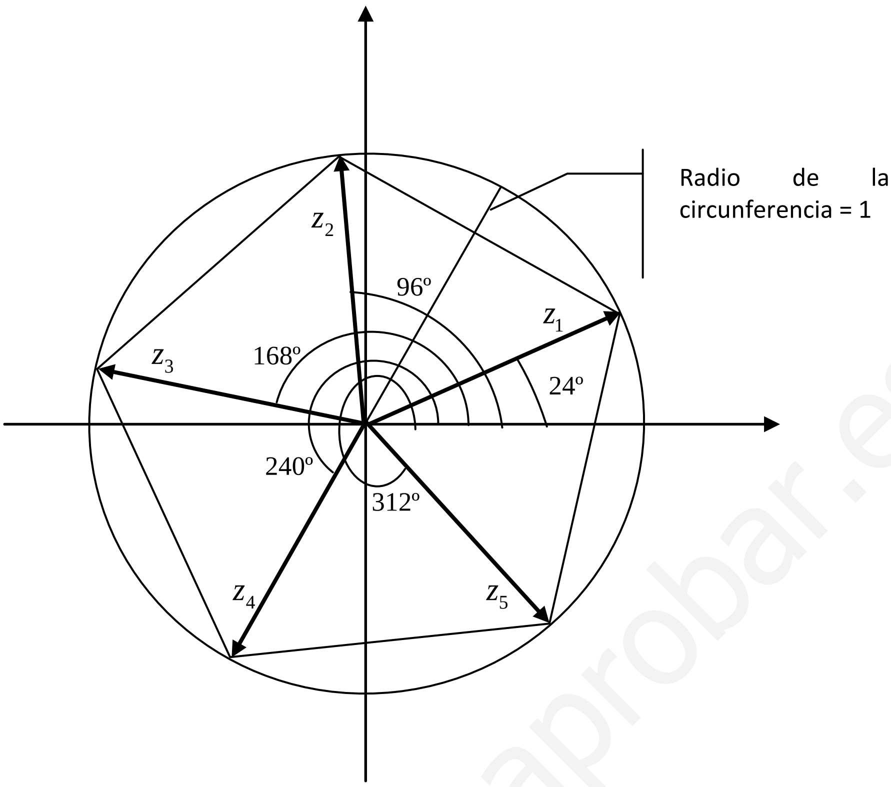
$\alpha_1=24^\circ$, $\alpha_2=96^\circ$, $\alpha_3=168^\circ$, $\alpha_4=240^\circ$, $\alpha_5=312^\circ$.

Las cinco raíces son pues, en forma polar (ver figura de la página siguiente):

$z_1=1_{24^\circ}$, $z_2=1_{96^\circ}$, $z_3=1_{168^\circ}$, $z_4=1_{240^\circ}$, $z_1=1_{312^\circ}$

En forma trigonométrica cada raíz z_k adoptaría la forma $z_k=r_k\left(\cos\alpha_k+i\operatorname{sen}\alpha_k\right)$. Como $r_k=1$, se tiene:

$z_1=\cos 24^\circ+i\operatorname{sen}24^\circ$, $z_2=\cos 96^\circ+i\operatorname{sen}96^\circ$, $z_3=\cos 168^\circ+i\operatorname{sen}168^\circ$, $z_4=\cos 240^\circ+i\operatorname{sen}240^\circ$, $z_5=\cos 312^\circ+i\operatorname{sen}312^\circ$



6. Encuentra las posibles soluciones, en forma binómica, de la siguiente ecuación: $z^5 + 125z^2 = 0$.

   Esta ecuación es la misma que $z^2\left(z^3+125\right)=0$. Hay que encontrar números cuyo cuadrado sea 0, y cuyo cubo sea -125. En el primer caso es claro que $z=0$ (se dice que es solución "doble"). En el segundo caso es $z=\sqrt[3]{-125}$. Una solución es, claramente, $z=-5$. Las otras dos que faltan son complejas, en polar, $z_k = r_\alpha$:

   $$r=\sqrt[3]{125}=5,\ \alpha=\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}=60^\circ+120^\circ k.$$

   Por tanto las raíces, y soluciones de $z=\sqrt[3]{-125}$, son:

   - $\mathrm{k}=0 \Rightarrow \alpha=60^\circ \Rightarrow \mathrm{z}_1=5_{60^\circ}=5\left(\cos 60^\circ+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, 60^\circ\right)=\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
   - $\mathrm{k}=1 \Rightarrow \alpha=180^\circ \Rightarrow \mathrm{z}_1=5_{180^\circ}=5\left(\cos 180^\circ+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, 180^\circ\right)=-5$ (esta es la solución real que habíamos obtenido anteriormente).
   - $\mathrm{k}=2 \Rightarrow \alpha=300^\circ \Rightarrow \mathrm{z}_1=5_{300^\circ}=5\left(\cos 300^\circ+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, 300^\circ\right)=\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.