

EJERCICIOS RESUELTOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Dados $z_1 = -3+4i$, $z_2 = 5-2i$, $z_3 = \frac{3}{2}$ y $z_4 = 7i$, calcular:

- | | | | | |
|--------------------------------|---|---|-----------------------------|------------------------------------|
| a) $(z_1 - z_2) z_3$ | b) $z_1 z_4 + z_3 z_4$ | c) $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2}$ | d) $z_1 + z_3^{-1}$ | e) z_2^{-1} |
| f) $\overline{z_1 z_2}$ | g) $\overline{(z_1 + z_2)^{-1}}$ | h) $z_1^2 z_3$ | i) $\frac{z_2}{z_1}$ | j) $\frac{z_1}{2z_3 + z_4}$ |

Solución

a) Para calcular $(z_1 - z_2) z_3$, en primer lugar se calcula la operación del paréntesis y a continuación se multiplica el resultado por z_3 :

$$(z_1 - z_2) z_3 = (-3+4i - (5-2i)) \frac{3}{2} = (-3-5+(4+2)i) \frac{3}{2} = (-8+6i) \frac{3}{2} = -12+9i$$

b) En primer lugar se calculan $z_1 z_4$ y $z_3 z_4$ para después sumar los resultados:

$$z_1 z_4 = (-3+4i) 7i = -21i+28i^2 = -28-21i$$

$$z_3 z_4 = \frac{3}{2} 7i = \frac{21}{2} i$$

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = -28-21i + \frac{21}{2} i = -28 - \frac{21}{2} i$$

Notar que otra forma de obtener este resultado es sacar factor común z_4 quedando:

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = (z_1 + z_3) z_4 = \left(-3+4i + \frac{3}{2}\right) 7i = \left(\frac{-3}{2} + 4i\right) 7i = \frac{-21}{2} i + 28i^2 = -28 - \frac{21}{2} i$$

c) En primer lugar se calcula la operación $z_1 + z_4 - 5z_2 = -3+4i + 7i - 5(5-2i) = -28+21i$ y después se calcula su conjugado, $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2} = -28-21i$

d) El inverso de z_3 es $z_3^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ y, por tanto, $z_1 + z_3^{-1} = -3+4i + \frac{2}{3} = \frac{-7}{3} + 4i$

e) Para calcular el inverso de $z_2 = 5-2i$ se puede proceder de dos formas:

- mediante la definición: $z_2^{-1} = \frac{5}{5^2+(-2)^2} - \frac{-2}{5^2+(-2)^2} i = \frac{5}{29} + \frac{2}{29} i$
- escribiéndolo como un cociente y efectuando la división multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5-2i} = \frac{1(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{5+2i}{25-4i^2} = \frac{5+2i}{29} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29} i$$

f) Teniendo en cuenta que el conjugado del conjugado de un número es el propio número, es decir,

$$\overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2, \text{ se tiene } \overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2 = (-3+4i)(5-2i) = -15+6i+20i-8i^2 = -7+26i$$

g) En primer lugar, se realiza la suma de z_1 y z_2 , después se calcula el conjugado de este resultado y finalmente el inverso de éste último:

$$z_1 + z_2 = -3 + 4i + 5 - 2i = -3 + 5 + (4 - 2)i = 2 + 2i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = 2 - 2i$$

$$\left(\overline{z_1 + z_2}\right)^{-1} = \frac{1}{2 - 2i} = \frac{1(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \frac{2 + 2i}{4 - 4i^2} = \frac{2 + 2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

Observar que se podría haber invertido el orden de realización de las dos últimas operaciones ya que se verifica $\left(\overline{a + bi}\right)^{-1} = \overline{(a + bi)^{-1}}$

h) $z_1^2 z_3 = (-3 + 4i)^2 \frac{3}{2} = (9 - 24i + 16i^2) \frac{3}{2} = (9 - 24i - 16) \frac{3}{2} = (-7 - 24i) \frac{3}{2} = \frac{-21}{2} - 36i$

i) Se efectúa el cociente multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 - 2i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 2i)(-3 - 4i)}{(-3 + 4i)(-3 - 4i)} = \frac{-15 - 20i + 6i + 8i^2}{9 - 16i^2} = \frac{-15 - 14i - 8}{9 + 16} = \frac{-23 - 14i}{25} = \frac{-23}{25} - \frac{14}{25}i$$

j) En primer lugar se calcula el denominador

$$2z_3 + z_4 = 2\frac{3}{2} + 7i = 3 + 7i$$

y, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, el cociente queda:

$$\frac{z_1}{2z_3 + z_4} = \frac{-3 + 4i}{3 + 7i} = \frac{(-3 + 4i)(3 - 7i)}{(3 + 7i)(3 - 7i)} = \frac{-9 + 21i + 12i - 28i^2}{9 - 49i^2} = \frac{-9 + 33i + 28}{9 + 49} = \frac{19 + 33i}{58} = \frac{19}{58} + \frac{33}{58}i$$

2. Dados los números complejos $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 3 + 6i$, determinar el número x que verifica cada una de las siguientes igualdades:

a) $z_1 + x = z_2$ b) $z_1^2 x = 1$ c) $z_1 + z_2 + x = 1$ d) $z_2^2 + x = -z_1^2$ e) $z_2 x = z_1$

Solución

a) Despejando x se tiene $x = z_2 - z_1 = 3 + 6i - (2 - i) = 3 - 2 + (6 + 1)i = 1 + 7i$

b) Despejando x se tiene $x = \frac{1}{z_1^2}$ que existe al ser z_1^2 no nulo.

Aplicando la fórmula del cuadrado de una diferencia, se tiene:

$$z_1^2 = (2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$$

y calculando el inverso del resultado anterior queda

$$x = \frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{3 - 4i} = \frac{1(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i}{9 - 16i^2} = \frac{3 + 4i}{9 + 16} = \frac{3 + 4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

c) Despejando x se tiene $x = 1 - z_1 - z_2 = 1 - (2 - i) - (3 + 6i) = 1 - 2 - 3 + (1 - 6)i = -4 - 5i$

d) Despejando x se tiene $x = -z_1^2 - z_2^2$. Calculando el cuadrado de z_1 y z_2 se tiene:

$$z_1^2 = (2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$$

$$z_2^2 = (3+6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 = 9 + 36i - 36 = -27+36i$$

$$\text{Así, } x = -z_1^2 - z_2^2 = -(3-4i) - (-27+36i) = -3 + 4i + 27 - 36i = 24-32i$$

e) Al ser z_2 no nulo, se puede despejar x obteniéndose $x = \frac{z_1}{z_2}$. Para calcular este cociente se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$x = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{3+6i} = \frac{(2-i)(3-6i)}{(3+6i)(3-6i)} = \frac{6-12i-3i+6i^2}{9-36i^2} = \frac{6-15i-6}{9+36} = \frac{-15i}{45} = \frac{-1}{3}i$$

3. Determinar una ecuación de coeficientes reales cuyas soluciones en \mathbb{C} sean -3 , $2+i$ y $2-i$.

Solución

Si -3 , $2+i$ y $2-i$ son las soluciones de una ecuación, esta ha de ser proporcional a

$$(x-(-3)) (x-(2+i)) (x-(2-i)) = 0$$

realizando el producto del primer miembro de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} (x-(-3)) (x-(2+i)) (x-(2-i)) &= (x+3) (x-2-i) (x-2+i) = (x+3) ((x-2)^2 - i^2) = (x+3) (x^2 - 4x + 4 + 1) = \\ &= (x+3) (x^2 - 4x + 5) = x^3 - x^2 - 7x + 15 \end{aligned}$$

Por tanto, una de las ecuaciones que cumplen la condición indicada es $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

4. Determinar un polinomio de coeficientes reales de grado 4 que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$.

Solución

Teniendo en cuenta que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria tiene también su conjugada, las cuatro raíces del polinomio buscado son $-4i$, $4i$, $-5+2i$ y $-5-2i$.

Por tanto, el polinomio es cualquiera proporcional a:

$$\begin{aligned} (x-(-4i)) (x-4i) (x-(-5+2i)) (x-(-5-2i)) &= (x+4i) (x-4i) (x+5-2i) (x+5+2i) = \\ &= (x^2 - 16i^2) ((x+5)^2 - 4i^2) = (x^2+16) (x^2+10x+25+4) = (x^2+16) (x^2+10x+29) = \\ &= x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 160x + 464 \end{aligned}$$

5. Dada una ecuación polinómica de grado 4 de coeficientes reales, responder a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuántas soluciones imaginarias puede tener si una de sus raíces es real?

b) Si $8i$ y $5-3i$, son dos soluciones, ¿cuáles son las otras soluciones?

Solución

a) Como el polinomio es de grado 4, tiene 4 raíces reales o imaginarias. Teniendo en cuenta que si tiene una raíz imaginaria tiene también su conjugada y que una de sus raíces es real, se deduce que este polinomio de grado 4 o no tiene raíces imaginarias o tiene 2.

b) Teniendo en cuenta que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria tiene también a su conjugada, las otras dos soluciones serán las conjugadas de las dadas, es decir, $-8i$ y $5+3i$.

6. Resolver en \mathbf{R} y en \mathbf{C} las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Solución

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ es una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 + 3t - 10 = 0$, cuyas soluciones son:

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$$

- Considerando la solución $t = -5$, se obtiene $x^2 = -5$, de donde $x = \pm \sqrt{-5} = \pm \sqrt{5} \sqrt{-1} = \pm \sqrt{5} i$
- Considerando la solución $t = 2$, se obtiene $x^2 = 2$, de donde $x = \pm \sqrt{2}$

Por tanto, las soluciones en \mathbf{R} son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ y las soluciones en \mathbf{C} son, además de las dos anteriores, $x = \sqrt{5} i$ y $x = -\sqrt{5} i$.

b) Factorizando el polinomio, la ecuación $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ queda $x(x^2 + 5x + 6) = 0$, y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que

o bien $x = 0$ o bien $x^2 + 5x + 6 = 0$, de donde, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones tanto en \mathbf{R} como en \mathbf{C} son $x = 0$, $x = -2$ y $x = -3$.

c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ es una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 + 2t + 1 = 0$, que se puede escribir de la forma, $(t+1)^2 = 0$, cuya solución es $t = -1$, doble.

Considerando la solución $t = -1$, se obtiene $x^2 = -1$, de donde $x = \pm \sqrt{-1} = \pm i$

Por tanto, la ecuación no tiene soluciones en \mathbf{R} y las soluciones en \mathbf{C} son $x = i$ y $x = -i$, dobles.

7. Determinar el módulo, el argumento, la forma polar y la forma trigonométrica de los siguientes números complejos:

- a) $2+2i$ b) $-2+2i$ c) $2-2i$ d) $-2-2i$ e) $-\sqrt{5}$ f) $\frac{5}{3}i$ g) $\sqrt{3}+i$

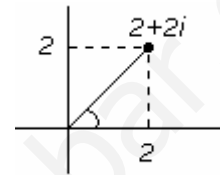
Solución

En todos los apartados se representa el número complejo para ayudar a determinar su argumento.

a) El módulo y el argumento de $2+2i$ son:

$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(2+2i) = \arctg \frac{2}{2} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

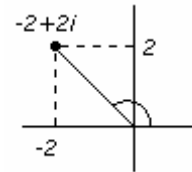


Por tanto, la forma polar de $2+2i$ es $(2\sqrt{2})_{\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$

b) El módulo y el argumento de $-2+2i$ son:

$$|-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(-2+2i) = \arctg \frac{2}{-2} = \arctg (-1) = \frac{3\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar y trigonométrica de $-2+2i$ son, respectivamente:

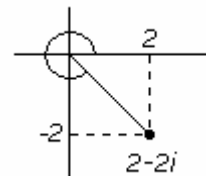
$$|-2+2i| = (2\sqrt{2})_{3\pi/4}$$

$$|-2+2i| = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right)$$

c) El módulo y el argumento de $2-2i$ son:

$$|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(2-2i) = \arctg \frac{-2}{2} = \arctg -1 = \frac{7\pi}{4}$$

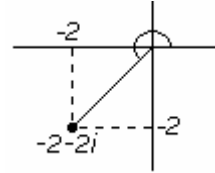


Por tanto, la forma polar de $2-2i$ es $(2\sqrt{2})_{7\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right)$

d) El módulo y el argumento de $-2-2i$ son:

$$|-2-2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(-2-2i) = \arctg \frac{-2}{-2} = \arctg 1 = \frac{5\pi}{4}$$

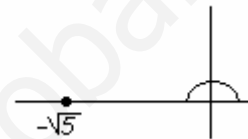


Por tanto, la forma polar de $-2-2i$ es $(2\sqrt{2})_{5\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right)$.

e) De la figura se concluye de forma inmediata que el módulo y el argumento de $-\sqrt{5}$ son:

$$|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$$

$$\arg(-\sqrt{5}) = \pi$$

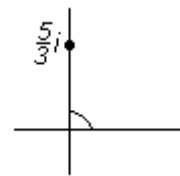


Por tanto, la forma polar de $-\sqrt{5}$ es $\sqrt{5}_{\pi}$ y la forma trigonométrica $\sqrt{5} (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

f) De la figura se concluye de forma inmediata que el módulo y el argumento de $\frac{5}{3}i$ son:

$$\left| \frac{5}{3}i \right| = \frac{5}{3}$$

$$\arg\left(\frac{5}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

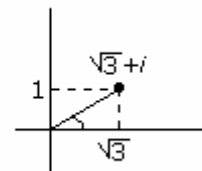


Por tanto, la forma polar de $\frac{5}{3}i$ es $\left(\frac{5}{3}\right)_{\pi/2}$ y la forma trigonométrica $\frac{5}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$

g) El módulo y el argumento de $\sqrt{3} + i$ son:

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(\sqrt{3} + i) = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



Por tanto, la forma polar y trigonométrica de $\sqrt{3} + i$ son, respectivamente:

$$\sqrt{3} + i = 2_{\pi/6} \qquad \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$$

8. Determinar la forma binómica de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$

b) $3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$

c) $1_{3\pi/4}$

d) $\sqrt{2}_{\pi/3}$

Solución

a) El número complejo $\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$ está dado en forma trigonométrica y para obtener su forma binómica basta hacer operaciones, así:

$$\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) El número complejo $3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$ está dado en forma trigonométrica y para obtener su forma binómica basta hacer operaciones, así:

$$3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = 3 (0 + i1) = 3i$$

c) El número complejo $1_{3\pi/4}$ está dado en forma polar, para obtener su forma binómica basta escribir su forma trigonométrica y hacer operaciones, así:

$$1_{3\pi/4} = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

d) El número complejo $\sqrt{2}_{\pi/3}$ está dado en forma polar, para obtener su forma binómica basta escribir su forma trigonométrica y hacer operaciones, así:

$$\sqrt{2}_{\pi/3} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

9. Dados los números complejos $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 4_{\pi}$, $z_3 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$ y $z_4 = 1 - \sqrt{3} i$, realizar las operaciones que se indican a continuación expresando los resultados en forma binómica:

a) $z_1 z_2$

b) $z_1 + z_3$

c) z_4^3

d) $z_1 z_3$

e) $\frac{z_2}{z_3}$

f) $\sqrt{z_2}$

g) z_2^4

h) $\sqrt[3]{z_3}$

Solución

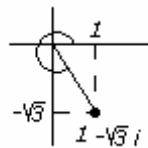
En este ejercicio hay que tener en cuenta que para realizar una operación entre dos números complejos, ambos deben estar escritos de la misma forma: binómica, polar o trigonométrica.

a) Expresando z_2 en forma binómica se tiene $z_2 = 4_{\pi} = 4(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 4(-1 + i0) = -4$, y multiplicando este resultado por z_1 se obtiene $z_1 z_2 = (2 - i)(-4) = -8 + 4i$.

b) Expresando z_3 en forma binómica queda $z_3 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$, y sumando este resultado con z_1 se obtiene $z_1 + z_3 = 2 - i + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}-2}{2}i$.

c) El cálculo de potencias de un número complejo se simplifica si éste se expresa en forma polar o trigonométrica.

Para calcular la expresión polar de $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$ es necesario calcular su módulo y su argumento:



$$|1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(1 - \sqrt{3}i) = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = \frac{5\pi}{3}$$

y así la forma polar de $1 - \sqrt{3}i$ es $2_{5\pi/3}$

Por tanto, $z_4^3 = \left(2_{5\pi/3} \right)^3 = 2^3_{3 \cdot 5\pi/3} = 8_{5\pi} = 8_{\pi}$

Y la expresión binómica del resultado es $z_4^3 = 8_{\pi} = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 8(-1 + 0i) = -8$

d) La forma binómica de z_3 , obtenida en el apartado b), es $z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$, y multiplicando este resultado por z_1 se obtiene:

$$z_1 z_3 = (2-i) \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i^2 = \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

e) En este caso resulta más sencillo calcular el cociente en forma polar, para lo que se deben expresar numerador y denominador en dicha forma:

$$z_2 = 4_{\pi}$$

$$z_3 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 3_{\pi/4}$$

y realizando la división queda $\frac{z_2}{z_3} = \frac{4_{\pi}}{3_{\pi/4}} = \left(\frac{4}{3} \right)_{\pi - \pi/4} = \left(\frac{4}{3} \right)_{3\pi/4}$

Expresando el resultado en forma binómica queda:

$$\frac{z_2}{z_3} = \left(\frac{4}{3} \right)_{3\pi/4} = \frac{4}{3} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

f) Al estar z_2 expresado en forma polar, sus raíces cuadradas se pueden calcular de forma sencilla.

Las raíces cuadradas de $z_2 = 4_{\pi}$ son:

$$\sqrt[4]{4}_{(\pi+2k\pi)/2} \text{ para } k = 0, 1 \text{ es decir, } 2_{\pi/2} \text{ y } 2_{3\pi/2}$$

La forma binómica de cada una de las dos raíces es:

$$2_{\pi/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2(0+i) = 2i$$

$$2_{3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0+i(-1)) = -2i$$

Notar que en este caso al ser $z_2 = 4_{\pi} = -4$, un número real, su raíz cuadrada se puede calcular como sigue:

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i.$$

g) Al estar z_2 expresado en forma polar, el cálculo de su cuarta potencia es inmediato,

$$z_2^4 = (4_{\pi})^4 = 4^4_{4\pi} = 256_0$$

que expresado en forma binómica es $z_2^4 = 256_0 = 256(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = 256(1+i0) = 256$

Como en el apartado anterior, notar que al ser $z_2 = 4_{\pi} = -4$, un número real, su potencia cuarta se puede calcular como sigue:

$$z_2^4 = (-4)^4 = 256$$

h) Como $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ tiene por expresión polar $z_3 = 3_{\pi/4}$, sus raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{3}_{(\pi/4+2k\pi)/3} \text{ para } k = 0, 1, 2 \text{ es decir, } \sqrt[3]{3}_{\pi/12}, \sqrt[3]{3}_{9\pi/12} \text{ y } \sqrt[3]{3}_{17\pi/12}$$

La forma binómica de cada una de las tres raíces es:

$$\sqrt[3]{3}_{\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$$

$$\sqrt[3]{3}_{9\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{9\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{9\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\operatorname{sen}\frac{9\pi}{12}$$

$$\sqrt[3]{3}_{17\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{17\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}$$
