Examen Números complejos

Nombre: ____

1. (1,75 puntos) Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

$$\frac{(4-2i)i^5}{1+i}$$

2. a) (1 punto) Expresa en forma binómica el número complejo $z = 4_{135°}$ y represéntalo gráficamente.

b) (1 punto) Obtén el opuesto y el conjugado de z.

3. (1,75 puntos) Una de las raíces octavas de un número complejo, z, es $-1+i$. Halla el valor de z.

4. (1,75 puntos) Halla las raíces sextas de -1 e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.

5. (1,75 puntos) Resuelve la ecuación:

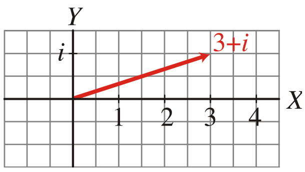
$$3z^4 + 27z^2 = 0$$

Resolución 1:

$$\frac{(4-2i)i^5}{1+i}=\frac{(4-2i)i}{1+i}=\frac{4i-2i^2}{1+i}=\frac{4i+2}{1+i}=\frac{2+4i}{1+i}=\frac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i+4i-4i^2}{1-i^2}=$$

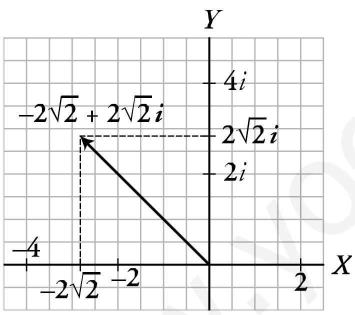
$$=\frac{2-2i+4i+4}{1+1}=\frac{6+2i}{2}=\frac{6}{2}+\frac{2i}{2}=3+i$$

Representación gráfica:



Resolución 2:

a) $z=4_{135^\circ}=4\left(\cos 135^\circ+i\,sen\,135^\circ\right)=4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$



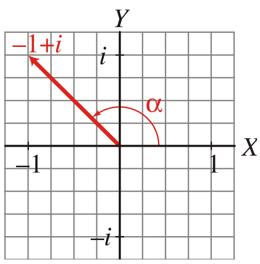
b) Opuesto $\rightarrow$ $-z=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

Conjugado $\rightarrow$ $\bar{z}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

Resolución 3:

Si $-1+i$ es una raíz octava de z, entonces: $z=(-1+i)^8$

Expresamos $-1+i$ en forma polar:



$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{-1} = -1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 135^\circ \text{ (pues está en el 2.º cuadrante)}$$

Por tanto: $z = (-1+i)^8 = \left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^8 = 16_{1080^\circ} = 16_{0^\circ} = 16$

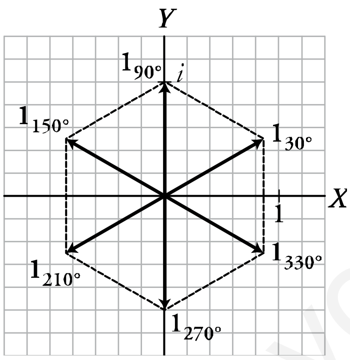
Resolución 4:

$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{6}} = 1_{30^\circ + 60^\circ k} \;; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las seis raíces son:

$$1_{30^\circ}\;;\quad 1_{90^\circ}\;;\quad 1_{150^\circ}\;;\quad 1_{210^\circ}\;;\quad 1_{270^\circ}\;;\quad 1_{330^\circ}$$

Interpretación gráfica:



Los afijos de las seis raíces ocupan los vértices de un hexágono regular centrado en el origen.

Resolución 5:

$$3z^4 + 27z^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3z^2\left(z^2+9\right) = 0$$

$$\begin{cases} 3z^2 = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0 \\ z^2 + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad z^2 = -9 \quad \rightarrow \quad z = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \end{cases}$$

Hay tres soluciones: $z_1 = -3i$; $\quad z_2 = 0$; $\quad z_3 = 3i$