Números Complejos

PREGUNTAS MÁS FRECUENTES

1. **¿Qué es la unidad imaginaria i?**
Es un elemento del que conocemos únicamente su cuadrado: $i^2 = -1$.Obviamente, no se trata de un número real.

2. **¿Qué es un número complejo?**
Es un número que dispone de dos características distintas -de ahí el nombre de complejo. Tiene algo de real y algo de imaginario. Se suele utilizar la letra ***z*** en su definición que en su forma cartesiana es $z = x + yi$ siendo *x*, *y* dos números reales. A todos los números reales se les considera como números complejos con *y* = 0.

3. **¿Cuáles son las definiciones más importantes en los números complejos escritos en forma cartesiana?**
La *Parte Real* es el número real que no multiplica a la unidad imaginaria **i**. Se utiliza la expresión *Re*. Para el número complejo $z = x + yi$ será: $\mathrm{Re}(z) = x$
La *Parte Imaginaria* es el número real que multiplica a la unidad imaginaria **i**. Se utiliza la expresión *Im*. Para el número complejo $z = x + yi$ será: $\mathrm{Im}(z) = y$

<u>Ejemplos</u>:
Siendo $z = 3 + 2i \to \mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = 2$
Siendo $z = 7i \to \mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = 7$
Siendo $z = 3 - i \to \mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = -1$
Siendo $z = 3 \to \mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = 0$

4. **¿Cómo se representa gráficamente un número complejo escrito en forma cartesiana?**
Se utiliza un plano cartesiano de manera que cada punto del plano equivale a un número complejo y viceversa. Los números reales están situados sobre el eje X y los imaginarios puros sobre el eje Y. En consecuencia al eje X se le llama eje real y al eje Y, eje imaginario. De esta manera al número complejo $z = 3 + 2i$ le corresponde el punto *P*(3, 2).

5. **¿Qué se entiende por conjugado de un número complejo?**
Dado un número complejo cualquiera, se denomina su conjugado a aquel que tiene su misma parte real y opuesta parte cartesiana. Por ejemplo $3 + 2i$ y $3 - 2i$ son conjugados. En el plano cartesiano estarían situados simétricamente respecto del eje real. Pasa de uno a otro se denomina *conjugar*, operación que algunos textos representan con un segmento horizontal sobre el número complejo: Por ejemplo: $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$ y otros con un asterisco: Por ejemplo: $(3 - 2i)^* = 3 - 2i$

6. **¿Cómo se suman números complejos escritos en forma cartesiana?**
Se suma partes reales con partes reales y partes imaginarias con partes imaginarias. La definición es:
$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

<u>Ejemplo</u>:
$(3 + 2i) + (5 - 7i) = (3 + 5) + (2 - 7)i = 8 - 2i$

7. **¿Cómo se multiplica un número real por un número complejo escrito en forma cartesiana?**
Se multiplica el número real por la parte real y por la parte imaginaria del nº complejo. La definición es:
$$k \cdot (x + yi) = kx + kyi$$

<u>Ejemplo</u>:
$4 \cdot (5 - 7i) = 20 - 28i$

8. ¿Cómo se multiplican dos números complejos escritos en forma cartesiana?

Se utiliza la siguiente definición: $(x_1 + y_1 i)\cdot(x_2 + y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$

En la práctica se multiplican distribuyendo el producto cual si fuesen polinomios pero aplicando que $i^2 = -1$

Ejemplo:
$(3+2i)\cdot(5-7i) = 15 - 21i + 10i - 14i^2 = 15 - 21i + 10i + 14 = 29 - 11i$

9. ¿Cómo se divide un número complejo escrito en forma cartesiana entre un número real?

Se dividen tanto la parte real como la parte imaginaria entre el número real.

Ejemplo:
$$\frac{5-7i}{4} = \frac{5}{4} - \frac{7}{4}i$$

10. ¿Cómo se dividen dos números complejos escritos en forma cartesiana?

Se multiplican tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador. Así quedaría un número real en el denominador aplicándose el apartado anterior.

Ejemplo:
$$\frac{5-7i}{1+2i} = \frac{(5-7i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-10i-7i+14i^2}{1-2i+2i-4i^2} = \frac{5-10i-7i-14}{1+4} = \frac{-9-14i}{5} = \frac{-9}{5} - \frac{14}{5}i$$

11. ¿Cómo se eleva la unidad imaginaria *i* a un exponente entero?

Empecemos con exponentes enteros positivos. El resultado de cualquier potencia i^n será uno de estos cuatro resultados: 1, *i*, -1, -*i*. Para distinguirlos se divide el exponente *n* entre cuatro y se mira el resto. Si el resto es cero (es decir, que el exponente es múltiplo de cuatro) la potencia resulta 1. Si el resto es uno la potencia resulta *i*. Si el resto es dos la potencia resulta -1 y si el resto es tres la potencia resulta -*i*. En la práctica consiste en sustituir el exponente por el resto de su división entre cuatro. Y como mucho sólo quedaría realizar dicha potencia.
Si el exponente es entero negativo, se divide 1 entre la potencia con exponente positivo. De nuevo sólo resulta uno de los cuatro resultados: 1, *i*, -1, -*i*.

Ejemplos:
$i^{48} = i^0 = 1$ $\quad i^{177} = i^1 = i$ $\quad i^{54} = i^2 = -1$ $\quad i^{23} = i^3 = -i$ $\quad i^{-34} = \frac{1}{i^{34}} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$

12. ¿Cómo se eleva un número complejo escrito en forma cartesiana a un exponente entero?

Empecemos con exponentes enteros positivos. Se aplica el binomio de Newton sustituyendo las potencias de la unidad imaginaria i según se explicó antes.
Si el exponente es entero negativo, se divide 1 entre la potencia con exponente positivo.

Ejemplos:
$$(-2+3i)^4 = \binom{4}{0}(-2)^4 + \binom{4}{1}(-2)^3\cdot(3i)^1 + \binom{4}{2}(-2)^2\cdot(3i)^2 + \binom{4}{3}(-2)^1\cdot(3i)^3 + \binom{4}{4}(3i)^4 =$$
$$= 1\cdot 16 - 4\cdot 8\cdot 3i + 6\cdot 4\cdot 9i^2 - 4\cdot 2\cdot 27i^3 + 1\cdot 81i^4 = 16 - 96i + 216\cdot(-1) + 216\cdot(-i) + 81\cdot 1 =$$
$$= 16 - 96i - 216 - 216i + 81 = -119 - 312i$$

$$(2-i)^{-3} = \frac{1}{(2-i)^3} = 1/\left[\binom{3}{0}2^3 - \binom{3}{1}2^2\cdot i^1 + \binom{3}{2}2\cdot i^2 + \binom{3}{3}i^3\right] = 1/\left[1\cdot 8 - 3\cdot 4\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 - 1\cdot i^3\right] = 1/\left[8 - 12i - 6 + i\right] =$$
$$= \frac{1}{2-11i} = \frac{1\cdot(2+11i)}{(2-11i)\cdot(2+11i)} = \frac{2+11i}{4+22i-22i-121i^2} = \frac{2+11i}{4+121} = \frac{2+11i}{125} = \frac{2}{125} + \frac{11}{125}i$$

13. ¿Cómo se hace la raíz de un número complejo escrito en forma cartesiana?

En forma cartesiana sólo se puede hacer la raíz cuadrada. Se iguala a un número complejo genérico, se eleva al cuadrado, se identifica la parte real con la parte real y la parte imaginaria con la parte imaginaria para acabar resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos lleva a una ecuación bicuadrada. Se obtienen dos raíces cuadradas opuestas. Se explicará más adelante un método más eficaz.

> <u>Ejemplo</u>:
>
> $\sqrt{3-4i}=x+yi$
>
> $$3-4i=(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2=x^2+2xyi-y^2=(x^2-y^2)+2xyi\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=3\\ 2xy=-4\ \rightarrow y=\dfrac{-2}{x}\Rightarrow\end{cases}$$
>
> $$\Rightarrow x^2-\left(\frac{-2}{x}\right)^2=3\Rightarrow x^2-\frac{4}{x^2}=3\Rightarrow x^4-4=3x^2\Rightarrow x^4-3x^2-4=0\Rightarrow x^2=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\begin{cases}4 & \Rightarrow x=\pm2\Rightarrow y=\mp1\\ -1 & \rightarrow \text{Sin solución}\end{cases}$$
>
> $\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$
>
> $$(2-i)^{-3}=\frac{1}{(2-i)^3}=1/\left[\binom{3}{0}2^3-\binom{3}{1}2^2\cdot i^1+\binom{3}{2}2\cdot i^2+\binom{3}{3}i^3\right]=1/\left[1\cdot8-3\cdot4\cdot i+3\cdot2\cdot i^2-1\cdot i^3\right]=1/\left[8-12i-6+i\right]=$$
>
> $$=\frac{1}{2-11i}=\frac{1\cdot(2+11i)}{(2-11i)\cdot(2+11i)}=\frac{2+11i}{4+22i-22i-121i^2}=\frac{2+11i}{4+121}=\frac{2+11i}{125}=\frac{2}{125}+\frac{11}{125}i$$

14. ¿Qué es la forma polar de un número complejo?

Es una escritura alternativa a la forma cartesiana. Está diseñada para realizar rápidamente las operaciones que nos llevarían más trabajo realizadas en forma cartesiana: Radicación, Potenciación, División y Multiplicación.

En lugar de conocer su parte real y su imaginaria, conoceremos su distancia (positiva) al origen (*módulo*) y el ángulo (*argumento*) que forman la parte positiva del eje Real y el segmento que une el número complejo al origen. Como distintos valores de este ángulo (por ejemplo 30º y 390º) podrían representar la misma posición del número complejo, se denomina argumento principal cuando es positivo menor de 360º.

El módulo de un número complejo se suele representar con dos rayas verticales (como las del valor absoluto) y siempre es positivo. El argumento se representa con *Arg*. Se escribe primero el valor del módulo y como subíndice el argumento. Por ejemplo: $z=5_{30^\circ}$ significa un número complejo de módulo 5 y argumento 30º.

15. ¿Cómo se pasa un número complejo de la forma polar a la forma cartesiana?

Para el número complejo $z=m_\alpha$ se utilizan la siguiente fórmula: $z=m\cdot(\cos\alpha+i\cdot sen\,\alpha)$

> <u>Ejemplo</u>:
>
> $z=3_{167^\circ}=3\cdot(\cos167^\circ+i\cdot sen\,167^\circ)=-2{,}92+0{,}67i$

16. ¿Cómo se pasa un número complejo de la forma cartesiana a la forma polar?

El módulo del número complejo $z=x+yi$ se halla con: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ (Pitágoras, en definitiva)

El argumento depende de la posición en que esté situado el número complejo:

$$\text{Para } z=x+yi:\begin{cases}x>0,\ y=0\rightarrow Arg(z)=0^\circ\\ 1^{\text{er}}\text{ Cuadrante }\rightarrow Arg(z)=arctg\left(y/x\right)\\ x=0,\ y>0\rightarrow Arg(z)=90^\circ\\ 2^\circ\text{ ó }3^\circ\text{ Cuadrante }\rightarrow Arg(z)=arctg\left(y/x\right)+180^\circ\\ x=0,\ y<0\rightarrow Arg(z)=270^\circ\\ 4^\circ\text{ Cuadrante }\rightarrow Arg(z)=arctg\left(y/x\right)+360^\circ\end{cases}$$

El número complejo 0 tiene cero de módulo pero su argumento queda indefinido.

Ejemplos:

$z=3\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{3^2}=3\\ Arg(z)=0^o\end{cases}\rightarrow z=3_{0^o}$

$z=3+4i\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5\\ Arg(z)=arctg(4/3)=53{,}13^o\end{cases}\rightarrow z=5_{53{,}13^o}$

$z=4i\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{4^2}=4\\ Arg(z)=90^o\end{cases}\rightarrow z=4_{90^o}$

$z=-5+12i\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13\\ Arg(z)=arctg(12/-5)+180^o=112{,}62^o\end{cases}\rightarrow z=13_{112{,}62^o}$

$z=-2\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{(-2)^2}=2\\ Arg(z)=180^o\end{cases}\rightarrow z=2_{180^o}$

$z=-8-6i\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}=10\\ Arg(z)=arctg(-8/-5)+180^o=237{,}99^o\end{cases}\rightarrow z=10_{237{,}99^o}$

$z=-i\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{(-1)^2}=1\\ Arg(z)=270^o\end{cases}\rightarrow z=1_{270^o}$

$z=24-10i\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{24^2+(-10)^2}=26\\ Arg(z)=arctg(-10/24)+360^o=337{,}38^o\end{cases}\rightarrow z=26_{337{,}38^o}$

17. ¿Cómo se suman o restan dos números complejos escritos en forma polar?

No hay ninguna fórmula rápida que permita deducir el módulo y el argumento del resultado de la suma o resta. Estas operaciones deben realizarse en forma cartesiana. Si se proponen en forma polar deben pasarse primero a forma cartesiana, sumarse, y convertir el resultado a la forma polar.

18. ¿Cómo se multiplican dos números complejos escritos en forma polar?

Se multiplican los módulos y se suman los argumentos: $m_\alpha\cdot p_\beta=(m\cdot p)_{\alpha+\beta}$. Si el argumento pasase de 360º se reduce al argumento principal.

Ejemplo:

$3_{167^o}\cdot 2_{216^o}=(3\cdot 2)_{167+216^o}=6_{383^o}=6_{23^o}$

19. ¿Cómo se dividen dos números complejos escritos en forma polar?

Se dividen los módulos y se restan los argumentos: $\frac{m_\alpha}{p_\beta}=\left(\frac{m}{p}\right)_{\alpha-\beta}$. Si el argumento resultase negativo se reduce al argumento principal.

Ejemplo:

$\frac{3_{156^o}}{2_{231^o}}=\left(\frac{3}{2}\right)_{156^o-231^o}=1{,}5_{-75^o}=1{,}5_{285^o}$

20. ¿Cómo se eleva un número complejo escrito en forma polar a un exponente entero?

Se eleva el módulo al exponente y multiplica el argumento por el exponente. Es la conocida como *fórmula de Moivre*: $(m_\alpha)^n=(m^n)_{n\alpha}$. La fórmula sirve tanto para exponentes enteros positivos como negativos. Si el argumento pasase de 360º ó resultase negativo se reduce al argumento principal.

Ejemplos:

$(2_{156^o})^3=(2^3)_{3\cdot156^o}=8_{468^o}=8_{108^o}$

$(2_{156^o})^{-4}=(2^{-4})_{-4\cdot156^o}=\left(\frac{1}{16}\right)_{-624^o}=\left(\frac{1}{16}\right)_{96^o}$

21. ¿Cómo se halla la raíz enésima de un número complejo escrito en forma polar?

Lo primero que debemos saber es que tendremos tantas soluciones como el índice de la raíz. Se radica el módulo y se divide el argumento sumado a vueltas completas entre el índice: $\sqrt[n]{m_\alpha} = (\sqrt[n]{m})_{\frac{\alpha+360k}{n}}$ para k = 0, 1, 2 …., n – 1.

Si tenemos que hallar la raíz de un número complejo escrito en forma polar, primero lo pasaríamos a forma polar, aplicaríamos lo explicado para hallar sus raíces y por último podríamos pasarlo a forma cartesiana.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{8_{213^o}} = (\sqrt[3]{8})_{\frac{213+360k}{3}} = 2_{71^o+120k} = \begin{cases} 2_{71^o} \\ 2_{191^o} \\ 2_{311^o} \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{81_{232^o}} = (\sqrt[4]{81})_{\frac{232+360k}{4}} = 3_{58^o+90k} = \begin{cases} 3_{58^o} \\ 3_{148^o} \\ 3_{238^o} \\ 3_{328^o} \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{1_{270^o}} = \sqrt[6]{1}_{\frac{270^o+360k}{6}} = 1_{45^o+60k} = \begin{cases} 1_{45^o} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1_{105^o} = -0{,}2588 + 0{,}9659i \\ 1_{165^o} = -0{,}9659 + 0{,}2588i \\ 1_{225^o} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1_{285^o} = 0{,}2588 - 0{,}9659i \\ 1_{345^o} = 0{,}9659 - 0{,}2588i \end{cases}$$

22. ¿Cómo es la forma de Euler de un número complejo?

En principio el número complejo debe tener módulo igual a 1. Es una forma exponencial con exponente imaginario. Este exponente es el argumento, expresado en radianes, multiplicado por la unidad imaginaria. Las tres formas de un mismo número complejo: Polar, Euler y Cartesiana, son:

$$1_\alpha = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot sen\alpha$$

A esta función se le llama $cis(\alpha)$

Si el módulo no fuese 1 sería muy similar:

$$m_\alpha = m \cdot e^{i\alpha} = m \cdot (\cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$$

Ejemplos:

$$1_{180^o} = e^{\pi i} = \cos 180^o + isen 180^o = -1$$

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = 1_{45^o} = \cos 45^o + isen 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2_{210^o} = 2 \cdot e^{\frac{7\pi}{6}i} = 2(\cos 210^o + isen 210^o) = -\sqrt{3} - 2i$$

$$-3+4i = \left\{ \begin{matrix} m = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \\ Arg = arctg(-4/3) + 180^o = 120{,}97^o = 2{,}11 \text{ rad} \end{matrix} \right\} = 5_{120{,}97^o} = 5 \cdot e^{2{,}11i}$$