Ejercicios de números complejos

1 Dado el nº complejo $z=\sqrt{3}+i$, escribe su opuesto, su conjugado, su inverso y el inverso de su conjugado.

2 a) Calcula $i^{123}, i^{100}, i^{-33}$

b) Calcula la suma $1+i+i^2+i^3+...........+i^{44}$

3 Calcula x para que el producto $(2x - 3i)(4 + i)$ sea un número imaginario puro

4 Sea $P(z)=z^3+az^2+bz+c$ un polinomio de variable compleja z con $a,b,c\in\Re$. Dos de sus raíces son -2 y -3 + 2i. Halle el valor de a, b y c.

5 Calcula el nº complejo cuyo cubo es un nº real, sabiendo que la componente real es superior en una unidad a la componente imaginaria.

6 ¿Es cierto que $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)$? De no serlo, busca una fórmula alternativa.

7 Resuelve en el conjunto de los números complejos: $9x^2+12x+13=0$ comprobando una de sus soluciones.

8 Poniendo primero $z^2 = w$, o de otra manera, halla los valores de z para los que $4z^4+2z^2-2=0$ dando las respuestas en forma cartesiana con los valores redondeados con tres decimales.

9 Encuentra las cuatro raíces del polinomio: $4z^4+8z^3+z^2-3z-10$

10 Sabiendo que $|z|=2\sqrt{5}$, halle el número complejo z que satisface la ecuación: $\frac{25}{z}-\frac{15}{z*}=1-8i$

11 Halla la ecuación que deben satisfacer las componentes de z, si: $|z|^2+3\mathrm{Re}(z^2)=4$ y represéntala mediante un programa informático adecuado.

12 Halla los valores de n tales que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ es un número real.

13 Dados los números complejos $z=3_{130^o}$ y $w=2_{312^o}$ escribe tanto en forma cartesiana como en polar:

a) z^5 b) $z+w$ c) $z\cdot w$ d) $\frac{z}{w}$

14 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean los números complejos $3\pm 2i$

15 a) Halle las tres raíces de la ecuación $8z^3+27=0$ dando las soluciones en forma cartesiana.
b) Si estas tres raíces representan los vértices de un triángulo en un diagrama de Argand, demuestre que su área es igual a $\frac{27\sqrt{3}}{16}$.

16 Resuelve: $z^4+256=0$ dando las soluciones en forma módulo-argumental.

17 Se sabe que –3 – 4i es una de las raíces quintas de un número complejo z. Halla z y las restantes raíces escritas en forma polar.

18 Dados $z_1=r cis\,\pi/3$ y $z_2=i-1$, halle el valor de r si $\left|z_1\cdot z_2{}^4\right|=12$

19 Halla las cinco soluciones de $\sqrt[5]{-i}$ escritas en la forma $r\cdot cis\theta$

20 Halla los números complejos z_1 y z_2 solución del sistema $\begin{cases} 2z_1-iz_2=1 \\ z_1-z_2=1-2i \end{cases}$

21 Sea $u = 1 + i\sqrt{3}$ y $v = 1 + i$, donde $i^2 = -1$

a) Compruebe que $\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

b) Expresando tanto u como v en forma módulo-argumental, compruebe que $\frac{u}{v} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + isen\frac{\pi}{12}\right)$

c) A partir de lo anterior, halle el valor exacto de $tg\,\pi/12$, expresando la respuesta en la forma $a + b\sqrt{3}$, donde $a, b \in Z$

22 Sea la serie geométrica $1 + \frac{1}{3}e^{i\theta} + \frac{1}{9}e^{2i\theta} + \ldots$

a) Halle la razón común, z, de la serie y compruebe que $|z| = \frac{1}{3}$

b) Halle una expresión para esta suma infinita.

c) A partir de lo anterior, demuestre que: $sen\theta + \frac{1}{3}sen2\theta + \frac{1}{9}sen3\theta + \ldots = \frac{9sen\theta}{10 - 6\cos\theta}$

23 Sea $z = \cos\theta + i\,sen\theta$ con $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$

a) Desarrolla z^3 con el binomio de Newton

b) Partiendo de este desarrollo y de la fórmula de Moivre demuestra las fórmulas: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ y $sen3\theta = 3\,sen\theta - 4sen^3\theta$

① $z=\sqrt{3}+i$

Opuesto : $\boxed{-z=-\sqrt{3}-i}$

Conjugado : $\boxed{z^{*}=\sqrt{3}-i}$

Inverso : $\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{3+1}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{1}{4}}$

Inverso del conjugado : $\frac{1}{z^{*}}=\frac{1}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}+i}{3+1}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4}}$ De hecho, coincide con el conjugado del inverso.

② a) $\begin{array}{l|l} 123 & 4 \\ \cline{2-2} 03 & 30 \end{array} \rightarrow i^{123}=i^{3}=\boxed{-i}$

$\begin{array}{l|l} 100 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 25 \end{array} \rightarrow i^{100}=i^{0}=\boxed{1}$

$\begin{array}{l|l} 33 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 8 \end{array} \rightarrow i^{-33}=i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{-i}{i(-i)}=\frac{-i}{1}=\boxed{-i}$

b) $\begin{array}{l|l} 44 & 4 \\ \cline{2-2} 04 & 11 \end{array} \rightarrow i^{44}=i^{0}=1$

$1+i+i^{2}+i^{3}+ - - - - - + i^{44} = \underbrace{\cancel{1}+\cancel{i}-\cancel{1}-\cancel{i}}+\underbrace{\cancel{1}+\cancel{i}-\cancel{1}-\cancel{i}}+ - - - \underbrace{\cancel{\ }}+1=\boxed{1}$

También : $S_{44}=\frac{i^{44}\cdot i-1}{i-1}=\frac{1\cdot i-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1$ ✓

③ $(2x-3i)(4+i)=8x+2xi-12i-3i^{2}=(8x+3)+i(2x-12)=$ imaginario puro. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 8x+3=0 \rightarrow \boxed{x=-3/8}$

④ Raíces : $-2,\ -3+2i \longrightarrow -3-2i$

$(z+2)(z-(-3+2i))(z-(-3-2i))=(z+2)(z+3-2i)(z+3+2i)=(z+2)((z+3)^{2}-4i^{2})=$

$=(z+2)(z^{2}+6z+9+4)=(z+2)(z^{2}+6z+13)=z^{3}+6z^{2}+13z+2z^{2}+12z+26=\boxed{z^{3}+8z^{2}+25z+26}$

$a=8\ ;\ b=25\ ;\ c=26$

⑤ $\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ Re(z)=1+Im(z) \Rightarrow a=1+b \end{array}\right\}\ z=(1+b)+bi$

$z^{3}=\left[(1+b)+bi\right]^{3}=(1+b)^{3}+3(1+b)^{2}bi+3(1+b)(bi)^{2}+(bi)^{3}=$

$=1+3b^{2}+3b+b^{3}+3bi(1+2b+b^{2})+(3+3b)\cdot b^{2}i^{2}+b^{3}i^{3}=$

$=1+\cancel{3b^{2}}+3b+b^{3}+3bi+6b^{2}i+3b^{3}i-\cancel{3b^{2}}-3b^{3}-b^{3}i=$

$=(1+3b-2b^{3})+i(3b+6b^{2}+2b^{3})=$ nº real $\Rightarrow 2b^{3}+6b^{2}+3b=0$

$2b^{3}+6b^{2}+3b=0\ ;\ b(2b^{2}+6b+3)=0 \nearrow \boxed{b=0}$

$\searrow 2b^{2}+6b+3=0\ ;\ b=\frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{4}=\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{4}=\boxed{\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}}$

$b=0 \rightarrow a=1 \Rightarrow \boxed{z=1}$

$b=\frac{-3+\sqrt{3}}{2} \rightarrow a=1+\frac{-3+\sqrt{3}}{2}=\frac{2-3+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow \boxed{z=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-3}{2}}=0'366-0'634i$

$b=\frac{-3-\sqrt{3}}{2} \rightarrow a=1+\frac{-3-\sqrt{3}}{2}=\frac{2-3-\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{z=\frac{-\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{-\sqrt{3}-3}{2}}=-1'366-2'366i$

⑥ Probemos con un ejemplo:

$$z_1 = 2+5i \qquad z_2 = 3-i \rightarrow z_1 \cdot z_2 = (2+5i)(3-i) = 6-2i+15i-5i^2 = 11+13i$$

$$\left.\begin{array}{l} Re(z_1 \cdot z_2) = 11 \\ Re(z_1) \cdot Re(z_2) = 2 \cdot 3 = 6 \end{array}\right] \text{Son distintos.}$$

La fórmula correcta sería: $\boxed{Re(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1) \cdot Re(z_2) - Im(z_1) \cdot Im(z_2)}$

⑦ $9x^2+12x+13=0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-468}}{18} = \frac{-12 \pm 18i}{18} = \boxed{\frac{-2 \pm 3i}{3}}$$

Comprobación:

$$9 \cdot \left(\frac{-2 \pm 3i}{3}\right)^2 + 12 \cdot \frac{-2 \pm 3i}{3} + 13 = \cancel{9}\, \frac{4 \mp 12i + 9i^2}{\cancel{9}} + 4(-2 \pm 3i) + 13 =$$

$$= 4 \mp \cancel{12i} - 9 - 8 \pm \cancel{12}i + 13 = 17 - 17 = 0 \checkmark$$

⑧ $z^2 = w \rightarrow 4w^2 + 2w - 2 = 0$

$$w = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \frac{-2 \pm 6}{8} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\pm\sqrt{2}}{2}} = \pm 0'707 \\ -1 \Rightarrow z^2 = -1 \rightarrow z = \boxed{\pm i} \end{cases}$$

⑨

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 4 & 8 & 1 & -3 & -10 \\ 1 & & 4 & 12 & 13 & 10 \\ \hline & 4 & 12 & 13 & 10 & \boxed{0} \\ -2 & & -8 & -8 & -10 & \\ \hline & 4 & 4 & 5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$4z^2+4z+5=0 \;;\; z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-80}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{-4 \pm 8i}{8} = \frac{-1 \pm 2i}{2} = -\frac{1}{2} \pm i$$

$\boxed{\text{Soluciones: } 1, -2, -\frac{1}{2}+i, -\frac{1}{2}-i}$

⑩ $|z| = 2\sqrt{5}$

$$\frac{25}{z} - \frac{15}{z^*} = 1-8i \;;\; \frac{25z^* - 15z}{z \cdot z^*} = 1-8i \;;\; \frac{25(a-bi)-15(a+bi)}{(2\sqrt{5})^2} = 1-8i \;;$$

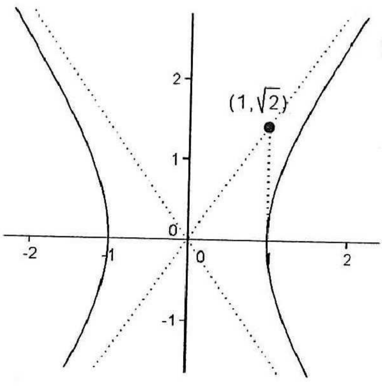
$$25a - 25bi - 15a - 15bi = 20(1-8i) \;;\; 10a - 40bi = 20 - 160i \begin{cases} 10a = 20 \Rightarrow a = 2 \\ 40b = 160 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

$\boxed{z = 2+4i}$

⑪ $z = x+iy \rightarrow z^2 = (x+iy)^2 = x^2+2xiy+i^2y^2 = (x^2-y^2)+i2xy$

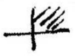
$|z|^2 + 3\,Re(z^2) = 4 \rightarrow x^2+y^2+3(x^2-y^2) = 4$;

$x^2+y^2+3x^2-3y^2 = 4$; $4x^2-2y^2 = 4$; $\boxed{x^2 - \frac{y^2}{2} = 1}$



Es una Hipérbola

⑫ $1+i\sqrt{3} = \begin{cases} m=\sqrt{1+3}=2 \\ \text{Tg}\,\alpha=\sqrt{3} \rightarrow \alpha=60° \end{cases}$



$(1+i\sqrt{3})^m = \left(2_{60°}\right)^m = 2^m_{m\cdot 60°}$ = nº real , su argumento será $K\cdot 180°$ $(K=0,\pm1,\pm2,\dots)$

$m\cdot 60° = K\cdot 180° \Rightarrow \boxed{m=3K}$ $(K=0,\pm1,\pm2,\dots)$

⑬ a) $z^5=\left(3_{130°}\right)^5 = 243_{650°} = \boxed{243_{290°}} = 243\cdot(\cos 290+i\,\text{sen}\,290) = \boxed{83'11-228'35i}$

b) $z=3_{130°} = 3(\cos 130+i\,\text{sen}\,130) = -1'93+2'30i$

$w=2_{312°} = 2(\cos 312+i\,\text{sen}\,312) = 1'34-1'49i$

$z+w = -1'93+2'30i+1'34-1'49i = \boxed{-0'59+0'81i} = \left\{\begin{array}{l} m=\sqrt{0'59^2+0'81^2}=1 \\ \text{tg}\,\alpha=\frac{0'81}{-0'59} \Rightarrow \alpha=126° \end{array}\right\} = \boxed{1_{126°}}$

c) $z\cdot w = 3_{130}\cdot 2_{312} = 6_{442°} = \boxed{6_{82°}} = \boxed{0'84+5'94i}$

d) $\frac{z}{w} = \frac{3_{130}}{2_{312}} = 1'5_{-182°} = \boxed{1'5_{178°}} = \boxed{-1'50+0'05i}$

⑭ $(z-(3+2i))(z-(3-2i)) = ((z-3)+2i)((z-3)-2i) = (z-3)^2-4i^2 = z^2-6z+9+4 = z^2-6z+13$

$\boxed{z^2-6z+13=0}$

⑮ a) $8z^3+27=0$; $z^3=-\frac{27}{8}$; $z=\sqrt[3]{\frac{-27}{8}}$;

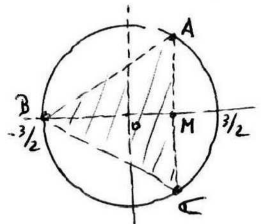
$z=\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)_{180°}} = \left(\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\right)_{\frac{180}{3}+\frac{N\cdot 360}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)_{60°+N\cdot 120°} = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)_{60°} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{4}+i\frac{3\sqrt{3}}{4}} \\ \left(\frac{3}{2}\right)_{180°} = \boxed{-\frac{3}{2}} \\ \left(\frac{3}{2}\right)_{300°} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}} \end{cases}$

También :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 0 & 0 & 27 \\ -3/2 & & -12 & 18 & -27 \\ \hline & 8 & -12 & 18 & \lfloor 0 \end{array} \longrightarrow z_1=-3/2 \checkmark$$

$8z^2-12z+18=0$; $4z^2-6z+9=0$; $z=\frac{6\pm\sqrt{36-144}}{8} = \frac{6\pm\sqrt{-108}}{8} = \frac{6\pm 6\sqrt{3}\,i}{8} = \frac{3\pm 3\sqrt{3}\,i}{4}$ ✓

b) $AC = 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $BM = \frac{3}{2}+\frac{3}{4} = \frac{9}{4}$



Área $= \frac{3\sqrt{3}/2\cdot 9/4}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$ ✓

También : Área $= 3\cdot$ Área AOB $= 3\cdot\frac{3/2\cdot 3/2\cdot \text{Sen}\,120°}{2} = 3\cdot\frac{3/2\cdot 3/2\cdot \sqrt{3}/2}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$ ✓

⑯ $z^4+256=0 \rightarrow z^4=-256$; $z=\sqrt[4]{-256}$

$z=\sqrt[4]{-256} = \sqrt[4]{256_{180°}} = \begin{cases} \boxed{4_{45°}} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}} \\ \boxed{4_{135°}} = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}} \\ \boxed{4_{225°}} = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}} \\ \boxed{4_{315°}} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}} \end{cases}$

⑰

$$\sqrt[5]{z} = \begin{cases} -3-4i & \longrightarrow \quad z = (-3-4i)^5 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{cases}$$

$$-3-4i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{9+16} = 5 \\ tg\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 233'13^\circ \end{array} \right\} = 5_{233'13} \Rightarrow z = \left(5_{233'13}\right)^5 = \left(3125_{1165'65}\right) = \boxed{3125_{85'65^\circ}}$$

$$\sqrt[5]{z} = \left\{ \begin{array}{l} \boxed{5_{233'13^\circ}} \\ 5_{233'13^\circ+72^\circ} = \boxed{5_{305'13^\circ}} \\ 5_{305'13^\circ+72^\circ} = 5_{377'13^\circ} = \boxed{5_{17'13^\circ}} \\ 5_{17,13^\circ+72^\circ} = \boxed{5_{89'13^\circ}} \\ 5_{89'13^\circ+72^\circ} = \boxed{5_{161'13^\circ}} \end{array} \right.$$

⑱

$$z_1 = r_{\pi/3}$$

$$z_2 = i-1 = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ tg\alpha = \frac{1}{-1} \rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\} = (\sqrt{2})_{3\pi/4}$$

$$|z_1 \cdot z_2^4| = \left| r_{\pi/3} \cdot \left[(\sqrt{2})_{3\pi/4}\right]^4 \right| = \left| r_{\pi/3} \cdot 4_{3\pi} \right| = \left| (4r)_{\frac{10\pi}{3}} \right| = 4r \; ; \; 4r = 12 \Rightarrow \boxed{r=3}$$

⑲

$$\sqrt[5]{-i} = \sqrt[5]{1_{270^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} 1_{54} = \boxed{0'59 + 0'81i} \\ 1_{126} = \boxed{-0'59 + 0'81i} \\ 1_{198} = \boxed{-0'95 - 0'31i} \\ 1_{270} = \boxed{-i} \\ 1_{342} = \boxed{0'95 - 0'31i} \end{array} \right.$$

⑳

$$\left. \begin{array}{l} 2z_1 - iz_2 = 1 \\ z_1 - z_2 = 1-2i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \xrightarrow{x(-2)} \end{array} \begin{array}{l} 2z_1 - iz_2 = 1 \\ \underline{-2z_1 + 2z_2 = -2+4i} \\ (2-i)z_2 = -1+4i \end{array}$$

$$z_2 = \frac{-1+4i}{2-i} = \frac{(-1+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2-i+8i+4i^2}{4-i^2} = \boxed{-\frac{6}{5}+\frac{7}{5}i}$$

x(-i)

$$\begin{array}{l} 2z_1 - iz_2 = 1 \\ \underline{-iz_1 + iz_2 = -i-2} \\ (2-i)z_1 \quad = -1-i \end{array}$$

$$z_1 = \frac{3-i}{2-i} = \frac{(-1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2-i-2i-i^2}{4-i^2} = \boxed{\frac{-1}{5}-\frac{3}{5}i}$$

㉑

a) $$\frac{u}{v} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \quad \checkmark$$

b) $$u = 1+i\sqrt{3} = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1+3} = 2 \\ tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} = 2_{\pi/3}$$

$$v = 1+i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ tg\alpha = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = (\sqrt{2})_{\pi/4}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{2_{\pi/3}}{(\sqrt{2})_{\pi/4}} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})_{\pi/12} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad \checkmark$$

c) $$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}i$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\pi/12 &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ \cos\pi/12 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

$a=2;\ b=-1$

㉒ $1+\frac{1}{3}e^{i\theta} + \frac{1}{9}e^{2i\theta} + \cdots$

a) $$z = \frac{1/3\, e^{i\theta}}{1} = \frac{1}{3}e^{i\theta}$$

$$|z| = \left|\frac{1}{3}e^{i\theta}\right| = \left|\frac{1}{3}\cos\theta + i\frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta\right| = \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{9}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} < 1 \ \checkmark$$

b) $$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{i\theta}} = \frac{3}{3-e^{i\theta}} = \frac{3}{(3-\cos\theta)-i\operatorname{sen}\theta} = \frac{3\cdot[(3-\cos\theta)+i\operatorname{sen}\theta]}{[(3-\cos\theta)-i\operatorname{sen}\theta]\cdot[(3-\cos\theta)+i\operatorname{sen}\theta]} =$$

$$= \frac{(9-3\cos\theta)+i3\operatorname{sen}\theta}{(3-\cos\theta)^2-(i\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{(9-3\cos\theta)+i3\operatorname{sen}\theta}{9-6\cos\theta+\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta} = \boxed{\frac{9-3\cos\theta}{10-6\cos\theta} + i\frac{3\operatorname{sen}\theta}{10-6\cos\theta}}$$

c) $$1+\frac{1}{3}e^{i\theta}+\frac{1}{9}e^{2i\theta}+\cdots = 1+\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{3}i\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{9}\cos 2\theta+\frac{1}{9}i\operatorname{sen}2\theta+\cdots =$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{9}\cos 2\theta+\frac{1}{27}\cos 3\theta+\cdots\right)+i\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{9}\operatorname{sen}2\theta+\frac{1}{27}\operatorname{sen}3\theta+\cdots\right]$$

Identificando con el resultado del apartado (b):

↗ $$1+\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{9}\cos 2\theta+\cdots = \frac{9-3\cos\theta}{10-6\cos\theta}$$

↘ $$\frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{9}\operatorname{sen}2\theta+\frac{1}{27}\operatorname{sen}3\theta+\cdots = \frac{3\operatorname{sen}\theta}{10-6\cos\theta} \xRightarrow{(\times 3)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta+\frac{1}{3}\operatorname{sen}2\theta+\frac{1}{9}\operatorname{sen}3\theta+\cdots = \frac{9\operatorname{sen}\theta}{10-6\cos\theta} \ \checkmark$$

㉓ $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

a) $$z^3 = (\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^3 = \cos^3\theta+3\cos^2\theta\, i\operatorname{sen}\theta+3\cos\theta\,(i\operatorname{sen}\theta)^2+(i\operatorname{sen}^3\theta) =$$

$$= [\cos^3\theta-3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta]+i[3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^3\theta] =$$

$$= [\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)]+i[3(1-\operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^3\theta] =$$

$$= [4\cos^3\theta-3\cos\theta]+i[3\operatorname{sen}\theta-4\operatorname{sen}^3\theta]$$

b) $$z = 1_\theta \rightarrow z^3 = (1_\theta)^3 = (1^3)_{3\theta} = 1_{3\theta} = \cos 3\theta + i\operatorname{sen}3\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta-3\cos\theta\\ \operatorname{sen}3\theta &= 3\operatorname{sen}\theta-4\operatorname{sen}^3\theta\end{aligned}} \ \checkmark$$