1. Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x^2-3x-6}{x+1}, & x<-1 \\ 4x-5, & -1<x\leq 2 \\ \frac{4}{x-2}, & x>2 \end{cases}$$

(**3 puntos**)

2. Calcula el valor de *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} \frac{3a+x}{x^2+1}, & x\leq -3 \\ 2x-a, & x>-3 \end{cases}$, sea continua en su dominio. Razona la respuesta.

(**2 puntos**)

3. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{4x+5}{5x+1}\right]^{\frac{x^2}{x+1}}$

(b) $\lim_{x\to \infty}\left[\frac{2x+3}{2x-2}\right]^{-7x^2}$

(c) $\lim_{x\to -\infty}\frac{7x+7}{\sqrt{7x^2+7}}$

(**3 puntos**)

4. Determina las asíntotas verticales y horizontales de la función:

$$f(x)=\frac{4x+4}{x^2-1}$$

(**2 puntos**)

Soluciones

1. Dominio de f = $R-\{-1\}$. La función es continua en todos los puntos distintos de -1 y 2.

Estudiamos ahora la función en x = -1 y en x = 2.

En **x = -1** presenta una **discontinuidad evitable** ya que:

$$\left\{\begin{array}{c} f(-1)\ no\ existe \\ \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{3(x-2)(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} 3(x-2) = -9 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (4x-5) = -9 \end{array}\right\}$$

En **x = 2** presenta una **discontinuidad inevitable de 1ª especie** ya que:

$$\left\{\begin{array}{c} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} (4x-5) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{4}{x-2} = +\infty \end{array}\right\}$$

2. Para que f(x) sea continua ha de serlo en x = -3, ya que en el resto de los puntos continua.

f(x) es continua en en x = -3 $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(-3) = \frac{3a-3}{10} \\ \lim\limits_{x\to -3^-} \frac{3a+x}{x^2+1} = \frac{3a-3}{10} \\ \lim\limits_{x\to -3^+} (2x-a) = -6-a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{3a-3}{10} = -6-a$

3. (a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\frac{4x+5}{5x+1}\right]^{\frac{x^2}{x+1}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-\infty} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\frac{2x+3}{2x-2}\right]^{-7x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5\cdot(-7x^2)}{2x-2}} = e^{-\infty} = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{7x+7}{\sqrt{7x^2+7}} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{-7x+7}{\sqrt{7x^2+7}} = \frac{-7}{\sqrt{7}}$

4. $Domf = R-\{\pm 1\}$

$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4x+4}{x^2-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{4x+4}{x^2-1} = +\infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow$ La recta x = 1 es una asíntota vertical.

$\lim_{x \to -1} \frac{4x+4}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{4 \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{4}{x-1} = -2 \Leftrightarrow$ La recta x = -1 **NO** es una asíntota vertical.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x+4}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x+4}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow$ La recta y = 0 es una asíntota horizontal.