Examen global Matemáticas C.C.S.S.

PRIMERA EVALUACIÓN

1. **(a)** Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{x-y+z=1} \end{cases}$$

(a-1) añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{x-y+z=1} \\ \boldsymbol{x-y+z=4} \end{Bmatrix} \underset{\boldsymbol{E3-E2}}{\overset{\boldsymbol{E2-E1}}{\Longleftrightarrow}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{-2y=-2} \\ \boldsymbol{0\cdot z=3} \end{Bmatrix}$$

Podemos observar que el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, en consecuencia el sistema es incompatible.

(a-2) añade una ecuación para que el sistema sea compatible y determinado.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{x-y+z=1} \\ \boldsymbol{z=2} \end{Bmatrix} \overset{\boldsymbol{E2-E1}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{-2y=-2} \\ \boldsymbol{z=3} \end{Bmatrix}$$

Podemos observar que el rango de la matriz de los coeficientes es, el de la matriz ampliada es 3 y el nº de incógnitas es 3, en consecuencia el sistema es compatible y determinado. La solución es : x = 1, y = 1, z = 2.

(b) Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x+2y+az=8} \\ \boldsymbol{3x+2y-2z=3} \\ \boldsymbol{x-2y+z=0} \end{cases}$$

(b-1) Discute el sistema según los valores de a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right) \xleftrightarrow[-2E1+E3]{\substack{E1 \\ -3E1+E2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & a-2 & 8 \end{array}\right) \xleftrightarrow[3E2-4E3]{\substack{E1 \\ E2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -4a-7 & -23 \end{array}\right)$$

Si -4a – 7 = 0 $\Leftrightarrow a=\frac{-7}{4} \Rightarrow rangA = 2 \neq rangA^{*} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible$

Si $a \neq \frac{-7}{4} \Rightarrow rangA = 3 = rangA^{*} = nº incógnitas \Rightarrow Sistema\ compatible\ y\ determinado$

(b-2) Al sustituir a por 4, el sistema equivalente al dado es:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \Rightarrow x=1 \\ 8y-5z=3 \Rightarrow y=1 \\ -23z=-23 \Rightarrow z=1 \end{cases}$$

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calcula X tal que $A^2 - X = 2A^t + 8I_3$

$$A^2 - X = 2A^t + 8I \Leftrightarrow X = A^2 - 2A^t - 8I$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix},\ 2 \cdot A^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calcula la inversa de $\frac{1}{2} \cdot A$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F3 - F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F3 - F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow[2F2+F3]{2F1+F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\substack{(1/2)F1 \\ (1/2)F2 \\ (1/2)F3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

Es decir: $\left[\frac{1}{2} A\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

3. Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 € y se obtiene un beneficio unitario de 100 €. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 € y se obtiene un beneficio unitario de 50 €.

(a) Plantea y resuelve un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtener un beneficio total de al menos 12500 €.

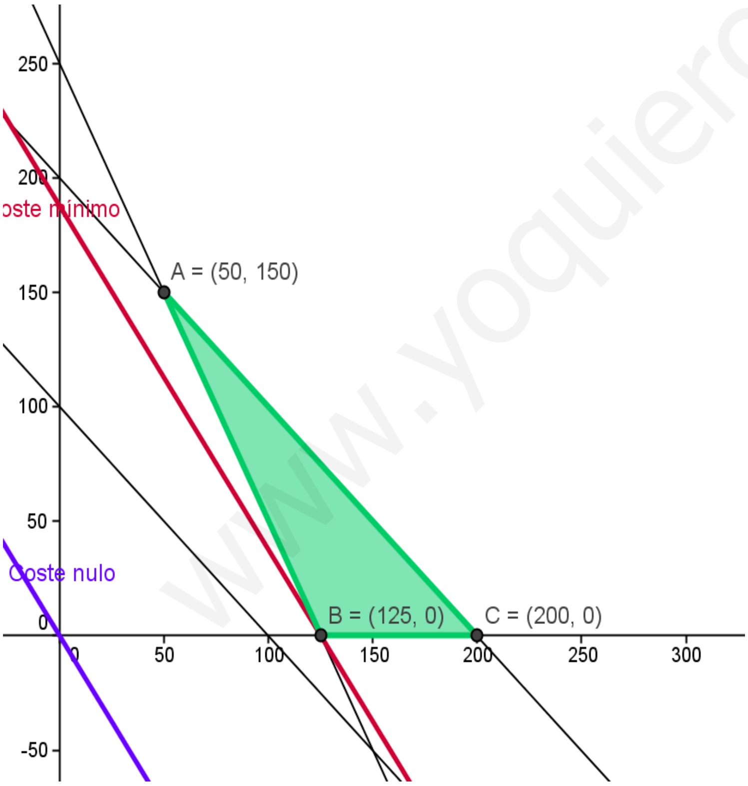
(b) Plantea y resuelve un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2550 €

	Nº unidades	Coste	Beneficio
Bien 1	x	15x	100x
Bien 2	y	10y	50y
Total	X+y	15x+10y	100x+50y

(a) Restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y\geq 100 \\ x+y\leq 100 \\ 100x+50y\geq 12500 \\ x,y\geq 0 \end{array}\right\},$$

Función objetivo: Coste = C(x,y) = 15x+10y € a minimizar.



El conjunto de soluciones factibles es la zona sombrada y la solución óptima se obtiene en el punto B = (125, 0).

El coste mínimo de 1875 € se consigue con x = 125 unidades del bien 1 e y = 0 unidades del bien 2.

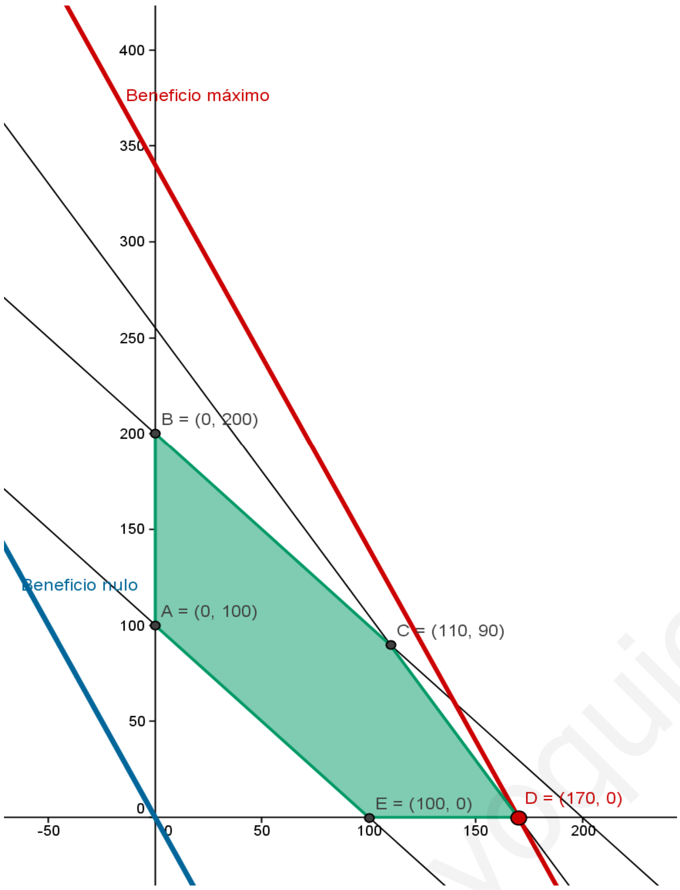
(b) Restricciones:

$$\left.\begin{cases} x + y \geq 100 \\ x + y \leq 100 \\ 15x + 10y \leq 2550 \\ x, y \geq 0 \end{cases}\right\},$$

Función objetivo: Beneficio = B(x,y) = 100x+50y € a maximizar.

El conjunto de soluciones factibles es la zona sombrada y la solución óptima se obtiene en el punto B = (125, 0).

El coste mínimo de 1875 € se consigue con x = 125 unidades del bien 1 e y = 0 unidades del bien 2.



El conjunto de soluciones factibles es la zona sombrada y la solución óptima se obtiene en el punto D = (170, 0).

El beneficio máximo de 17000 € se consigue con x = 170 unidades del bien 1 e y = 0 unidades del bien 2.

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<2\\ \dfrac{x}{2}, & x\ge 2\end{cases}$$

Continuidad:

$Domf = R$

$$\left\{\begin{array}{c} f(0)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{f\ presenta\ en\ x=0\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ 1^{a}\ especie}$$

$$\left\{\begin{array}{c} f(2)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{2}=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{f\ presenta\ en\ x=2\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ 1^{a}\ especie}$$

Derivabilidad:

La función NO es derivable en x = 0 y en x = 2 por no ser continua en dichos puntos.

En el resto de los puntos del dominio es derivable y su derivada es:

$$f(x)=\begin{cases}2(x+1), & x<0\\ \dfrac{-1}{x^2}, & 0<x<2\\ \dfrac{1}{2}, & x>2\end{cases}$$

2. (**a**) Determina las asíntotas verticales y horizontales, si las tiene, de la función:

$$f(x)=\frac{3x^2-12x+12}{x^2-4}$$

$Domf = R—\{-2,+2\}$

1º) $\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{3(x-2)}{x+2}=4 \Longrightarrow$ la recta x = 2 No es asíntota vertical.

2º) $\lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=+\infty$, $\lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=-\infty \Longrightarrow$ la recta x = -2 es asíntota vertical.

3º) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = 3$, $\lim_{x\to \infty} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = 3 \Longrightarrow$ la recta y= 3 es asíntota horizontal.

(b) Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

$$m(x) = \log_5 \left(\frac{3x-1}{2x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_5(3x-1) - \frac{1}{3}\log_5 2 - \frac{2}{3}\log_5 x$$

$$m'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x-1} \cdot \frac{1}{ln5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln5}$$

$$n(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4x-5}}\right)^4 = \left(\frac{3}{4x-5}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$n'(x) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4x-5}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{-12}{(4x-5)^2}\right)$$

3. **(a)** Dada $f(x) = ax + b + \frac{3}{x}$, calcula a y b para que la función cumpla:

- (3, 4) se punto de la gráfica
- La recta tangente a la gráfica en ese punto sea horizontal.

$(3,4) \in gráfica \Rightarrow f(3) = 4 \Longrightarrow 3a + b + 1 = 4$

$f'(x) = a - \dfrac{3}{x^2}$

La recta tangente a la gráfica en ese punto sea horizontal $\Longrightarrow f'(3) = 0 \Longrightarrow f'(3) = a - \frac{1}{3} = 0$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 3a + b = 3 \\ a - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$, obtenemos a = 1/3 y b =2

(b) Indica los extremos relativos de la función: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}}$

$\boldsymbol{Domf = R - \{-1, +1\}}$

$\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x(x-1)^2(x+2)}{(x^2-1)^2}}$

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2}$

Intervalo	x<-2	-2<x<-1	-1<x<0	0<x<1	x>1
Signo de f’	f’ >0	f’ < 0	f’ < 0	F’ >0	F’ >0
Monotonía de f	F creciente	F decreciente	F decreciente	F creciente	F creciente

x = -2 es máximo relativo, x = 0 es mínimo relativo.

TERCERA EVALUACIÓN

1. Calcula:

1.1 $\int_1^3\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\frac{1+x}{x}\right)dx=\int_1^3\left(x^{\frac{-3}{2}}-\frac{1}{x}-1\right)dx=\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}-lnx-x\right]_1^3=\frac{-2}{\sqrt{3}}-ln3$

1.2 $\int\left(\sqrt[3]{x^5}-\sqrt{x^5}+\frac{1+x^2}{x}\right)dx=\int\left(x^{5/3}-x^{5/2}+\frac{1}{x}+x\right)dx=\frac{3}{8}x^{8/3}-\frac{2}{7}x^{7/2}+ln|x|+\frac{1}{2}x^2+C$

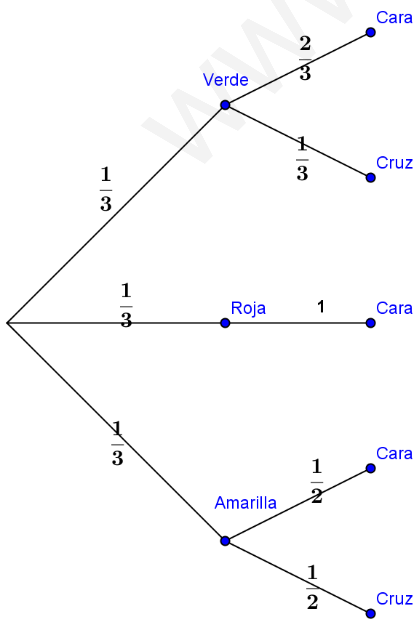
1.3 $\int_2^3\frac{3xdx}{x^2-2}=\frac{3}{2}\int_2^3\frac{2xdx}{x^2-2}=\frac{3}{2}\left[ln|x^2-2|\right]_2^3=\frac{3}{2}(ln7-ln2)=\frac{3}{2}ln\frac{7}{2}$

1.4 $\int\frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{3}{2\sqrt{x}}\cdot e^{3\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}}+C$

1. (a) Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada una de ellas hay una moneda. La moneda de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz. Laneda de la caja roja tiene dos caras. Y la moneda de la caja amarilla no está trucada. SE toma al azar una aja y se lanza la moneda que está en esa caja.

Calcula razonadamente:

(a-1) El espacio muestral del experimento.



$$E=\{V\cap Cara, V\cap Cruz, R\cap Cara, A\cap Cara, A\cap Cruz\}$$

(a-2) La probabilidad de que salga cara.

$$P(Cara)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{18}$$

(a-3) La probabilidad de que sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

$$P(Roja|Cara)=\frac{P(Roja\cap Cara)}{P(Cara)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{18}}=\frac{6}{13}$$

(b) Sean A y B dos sucesos aleatorios. Supóngase que $\boldsymbol{P(A)=0'4,\ P(A\cup B)=0'7,\ P(B)=p}$

(b-1) ¿Para qué valor de p son A y sucesos incompatibles?

A y B incompatibles $\Leftrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Leftrightarrow 0'7=0'4+p\ \Leftrightarrow p=0'3$

(b-2) ¿Para qué valor de p son A y B sucesos independientes?

A y B independientes $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Además sabemos que para cualquier par de sucesos: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Por lo tanto: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)\Leftrightarrow 0'7=0'4+p-0'4\cdot p\Leftrightarrow 0'3=(1-0'4)p\Leftrightarrow$

$p=0'5$

3. En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención una variable normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

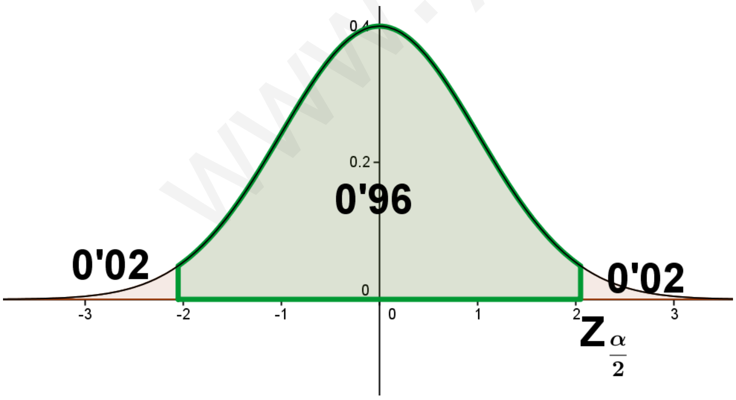
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra 25 clientes no supere los 9 minutos?

$$\boldsymbol{X=\text{tiempo espera}=N(\mu=10,\sigma=2)\Longrightarrow \overline{X}=\text{tiempo medio muestral}=N\left(\mu_{\overline{x}}=10,\sigma_{\overline{x}}=\frac{2}{\sqrt{25}}=0'4\right)}$$

$$\boldsymbol{P(\overline{X}\leq 9)=P\left(Z\leq\frac{9-10}{0'4}\right)=P(Z\leq -2'5)=1-P(Z\leq 2'5)=1-0'9938=0'0062}$$

(b) Indica el intervalo de confianza al 96 % de la media muestral si se toman muestras aleatorias de 64 clientes.

$$\boldsymbol{X=\text{tiempo espera}=N(\mu=10,\sigma=2)\Longrightarrow \overline{X}=\text{tiempo medio muestral}=N\left(\mu_{\overline{x}}=10,\sigma_{\overline{x}}=\frac{2}{\sqrt{64}}=0'25\right)}$$



Si $\boldsymbol{1-\alpha=0'96\Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=2'05}$

$\boldsymbol{P\left(Z\leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=0'98\cong 0'9798\Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=2'05}$

Intervalo de confianza para la media muestral:

$\boldsymbol{\mu\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\overline{x}}}$

$\boldsymbol{(10-2'05\cdot 0'25, 10+2'05\cdot 0'25)=}$

$\boldsymbol{=(9'4875, 10'5125)}$