11 Números complejos

1. Sean z_1, z_2 y z_3 las tres raíces cúbicas de la unidad, demuestra que se verifica la siguiente igualdad:

$$(z_1 - z_2 + z_3) \cdot (z_1 + z_2 - z_3) = 4$$

2. Demuestra que para cualquier número natural n se verifica:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{3n} + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{3n} = 2$$

3. Representamos por $\overline{z}$ el conjugado del número complejo z; es decir, si $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$.

a) Demuestra que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ para cualquier pareja de números complejos z_1 y z_2.

b) Demuestra que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ para cualquier número complejo z.

c) Ayudándote de los apartados anteriores, comprueba que: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot (|z_1|^2 + |z_2|^2)$

4. Con ayuda del cociente de los números complejos $z_1 = -1 + \sqrt{3}\, i$ y $z_2 = 1 + i$, calcula valores exactos de sen $\frac{5\pi}{12}$ y de cos $\frac{5\pi}{12}$.

5. Resuelve, en el conjunto de los números complejos, la ecuación $z^4 = \overline{z}$.

6. Regiones del plano definidas con la ayuda de los números complejos.

Has visto que se puede asociar a cada número complejo su afijo, que no es más que un punto del plano geométrico. Por esta razón, se pueden definir ciertas regiones del plano con la ayuda de expresiones algebraicas en las que intervienen números complejos. En primer lugar, demuestra las siguientes afirmaciones:

a) El módulo de la diferencia de dos números complejos es igual a la distancia que separa a sus afijos.

b) $|z - (1 + i)| = 3$ representa el conjunto de puntos del plano que pertenecen a la circunferencia de centro el punto (1, 1) y radio 3.

c) El conjunto de números complejos z tales que $|z| = 5$ representa el conjunto de puntos del plano que pertenecen a la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 5.

d) $|z - i| \leq 3$ representa el conjunto de puntos del plano que pertenecen al círculo de centro (0, 1) y radio 3, incluidos los que pertenecen a la circunferencia que lo limita.

7. Representa geométricamente el conjunto de puntos del plano definido por los afijos de los números complejos z que verifican:

$$|z - i| = |z + 2|$$

8. Sea Re(z) la parte real del número complejo z y sea Im(z) la parte imaginaria del mismo número complejo, es decir: si $z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = a \\ \mathrm{Im}(z) = b \end{cases}$

Representa geométricamente el conjunto de puntos del plano definido por los afijos de los números complejos z que verifican:

$$\begin{cases} -1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 3 \\ \mathrm{Im}(z - i) \geq 2 \end{cases}$$

9. Determina el conjunto de puntos del plano definido por los afijos de los números complejos z que verifican:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(iz) \leq 2 \\ \mathrm{Im}(-iz) = 3 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. $z_1^2 - (z_2 - z_3)^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + 2z_2z_3 =$
$= (1_{0°})^2 - (1_{120°})^2 - (1_{240°})^2 + 2 \cdot 1_{120°} \cdot 1_{240°} =$
$= 1 - (\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) - (\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) + 2 =$
$= 1 + 0{,}5 + 0{,}5 + 2 = 4$

---

2. $(1_{120°})^{3n} + (1_{240°})^{3n} = 1_{360°n} + 1_{720°n} = 1 + 1 = 2$

---

3. a) Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} = a - bi + c - di \end{array}\right. \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \\ |z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right. \Rightarrow z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

c) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$
$= (z_1 + z_2) \cdot \overline{z_1 + z_2} + (z_1 - z_2) \cdot \overline{z_1 - z_2} =$
$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) =$
$= |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + |z_2|^2 + |z_1|^2 -$
$- z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2 \cdot \overline{z_1} + |z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

---

4. $$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} =$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \frac{2_{\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}_{\frac{5\pi}{12}}} =$$

$$= \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} + \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12} i$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}$$

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

---

5. $z = r_\alpha$
$\overline{z} = r \cos \alpha - r \operatorname{sen} \alpha i = r(\cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha) i) = r_{-\alpha}$

Por tanto, la ecuación se puede escribir como:

$r^4_{4\alpha} = r_{-\alpha} \Rightarrow r^4 = r$ y $4\alpha = -\alpha + 360° k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = 0 \Rightarrow z = 0 \\ r = 1 \text{ y } \alpha = 72° k \text{ con } k = 0, 1, 2, 3 \text{ ó } 4 \end{array}\right.$$

---

6. a) Se toman $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
$A(a, b)$, $B(c, d)$

$$\left.\begin{array}{l} |z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \\ d(A, B) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| = d(A, B)$

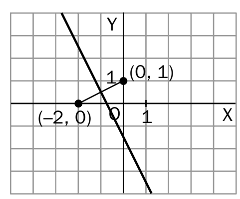
b) Por el apartado anterior, $|z - (1 + i)| = 3$ representa al conjunto de puntos z del plano tales que su distancia al punto (1, 1) es igual a tres, es decir, representa a la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.

c) Por el apartado a, $|z| = |z - (0 + 0i)| - 5$ representa una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 5.

d) $|z - i|$ representa la distancia existente entre el punto asociado al número complejo z y el punto (0, 1). Si esta distancia debe ser menor o igual que 3, estarán incluidos todos los puntos que pertenecen al interior o a la frontera de la circunferencia de centro (0, 1) y radio 3.

---

7. El conjunto de puntos tales que $|z - i| = |z + 2|$ representa la mediatriz del segmento de extremos $(0, -1)$ y $(-2, 0)$.



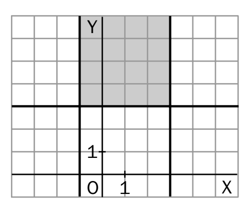
---

8. Sea $z = x + iy$.

$$\left\{\begin{array}{l} -1 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 3 \\ \operatorname{Im}(z - i) \geqslant 2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ y - 1 \geqslant 2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ y \geqslant 3 \end{array}\right.$$



---

9. Sea $z = x + iy$.

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Re}(iz) \leqslant 2 \\ \operatorname{Im}(-iz) = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -y \leqslant 2 \\ -x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y \geqslant -2 \\ x = -3 \end{array}\right.$$