

11 | Números complejos

1. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(3 - 2i) + (-5 + 6i)$ d) $(1 + i) - (2 + i) + (3 + i) - (4 + i)$
 b) $(-4 + 2i) - (6 - 3i)$ e) $(1 + i) - 2(2 + i) + 3(3 + i) - 4(4 + i)$
 c) $2(2 + 3i) - 3(4 - 2i) - 5i$

2. Realiza las siguientes operaciones:

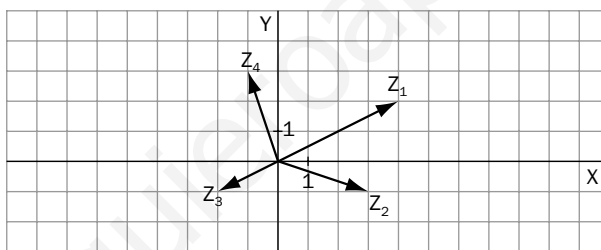
- a) $(1 - 3i) \cdot (-2 + 5i)$ d) $(1 + i) \cdot (2 + i) \cdot (3 + i)$
 b) $(-3 + 3i) \cdot (2 - 3i)$ e) $(1 + i) \cdot (1 + 2i) \cdot (1 + 3i) - 2i$
 c) $3(-2 + 2i) \cdot (-3 + 3i) - 2i$

3. Calcula los siguientes cocientes de números complejos:

- a) $\frac{2 + i}{2 - i}$ b) $\frac{2 - 3i}{3 + 2i}$ c) $\frac{1 - 5i}{3 - 4i}$ d) $\frac{(3 - 2i) \cdot (1 + 4i)}{2 + 2i}$

4. Escribe en forma binómica los números complejos z_1 , z_2 , z_3 y z_4 representados en la siguiente figura y, después, calcula las siguientes operaciones:

- a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 + z_2 + z_3$ c) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ d) $z_1 - z_2 + z_3 - z_4$



5. Calcula el inverso de los siguientes números complejos:

- a) $2 + 2i$ b) $1 - 3i$ c) $-8 + 6i$ d) $-12 - 5i$

6. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

- a) $(3 - 2i)^2$ b) $(4 - i)^3$ c) $(-2 + 3i)^4$

7. Representa los siguientes números complejos y escríbelos en su forma polar:

- a) $3 + 3i$ b) $3 - \sqrt{3}i$ c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ d) $-1 + i$

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

- a) $(-2 + 2i)^5$ b) $(1 + \sqrt{3}i)^6$ c) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$

9. Calcula el valor de las siguientes raíces de números complejos:

- a) $\sqrt[3]{3 - 3i}$ b) $\sqrt{2 + \sqrt{12}i}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt{-1 - 3i}}$

10. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- a) $z^2 - 6z + 10 = 0$ b) $z^4 + z = 0$ c) $z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 = 0$

11. Calcula el valor de k para que el producto de números complejos $(3 - 2i) \cdot (k + 1 - ki)$:

- a) Dé como resultado un número imaginario puro.
 b) Dé como resultado un número real.

SOLUCIONES

1. a) $-2 + 4i$ d) -2
 b) $-10 + 5i$ e) $-10 - 2i$
 c) $-8 + 7i$

2. a) $13 + 11i$ d) $10i$
 b) $3 + 15i$ e) $-10 - 2i$
 c) $-38i$

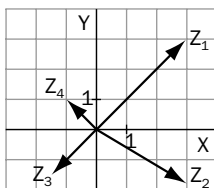
3. a) $\frac{(2+i)^2}{(2-i) \cdot (2+i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$
 b) $\frac{(2-3i) \cdot (3-2i)}{(3+2i) \cdot (3-2i)} = \frac{-13}{13}i = -i$
 c) $\frac{(1-5i) \cdot (3+4i)}{(3-4i) \cdot (3+4i)} = \frac{23-11i}{25} = \frac{23}{25} - \frac{11}{25}i$
 d) $\frac{(11+10i) \cdot (2-2i)}{(2+2i) \cdot (2-2i)} = \frac{21}{4} - \frac{1}{4}i$

4. $z_1 = 4 + 2i$ $z_3 = -2 - i$
 $z_2 = 3 - i$ $z_4 = -1 + 3i$
 a) $7 + i$ b) 5 c) $4 + 3i$ d) $-i$

5. a) $\frac{2-2i}{(2+2i) \cdot (2-2i)} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
 b) $\frac{1+3i}{(1-3i) \cdot (1+3i)} = \frac{1+3i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$
 c) $\frac{-8-6i}{(-8+6i) \cdot (-8-6i)} = \frac{-8-6i}{100} = -\frac{2}{25} - \frac{3}{50}i$
 d) $\frac{-12+5i}{(-12-5i) \cdot (-12+5i)} = \frac{-12+5i}{169} = -\frac{12}{169} + \frac{5}{169}i$

6. a) $5 - 12i$ b) $52 - 47i$ c) $-119 + 120i$

7. a) $z_1 = 3 + 3i = 3\sqrt{2}_{45^\circ}$
 b) $z_2 = 3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}_{330^\circ}$
 c) $z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{225^\circ}$
 d) $z_4 = -1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$



8. a) $(2\sqrt{2}_{135^\circ})^5 = 128\sqrt{2}_{675^\circ} = 128\sqrt{2}_{315^\circ} =$
 $= 128\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) =$
 $= 128\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 128 - 128i$
 b) $(2_{60^\circ})^6 = 64_{360^\circ} = 64(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 64$
 c) $(2_{315^\circ})^{10} = 1024_{3150^\circ} = 1024_{270^\circ} =$
 $= 1024(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -1024i$

9. a) $\sqrt[3]{3-3i} = \sqrt[3]{\sqrt{18}_{315^\circ}} =$
 $= \begin{cases} \sqrt[6]{18_{315^\circ}} = \sqrt[6]{18}_{105^\circ} \\ \sqrt[6]{18_{675^\circ}} = \sqrt[6]{18}_{225^\circ} \\ \sqrt[6]{18_{1035^\circ}} = \sqrt[6]{18}_{345^\circ} \end{cases}$

b) $\sqrt{2+\sqrt{12}i} = \sqrt{4_{60^\circ}} = \begin{cases} 2_{\frac{60^\circ}{2}} = 2_{30^\circ} \\ 2_{\frac{420^\circ}{2}} = 2_{210^\circ} \end{cases}$

c) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{240^\circ}} =$

$$= \begin{cases} \sqrt[4]{2_{240^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{60^\circ} \\ \sqrt[4]{2_{600^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{150^\circ} \\ \sqrt[4]{2_{960^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{240^\circ} \\ \sqrt[4]{2_{1320^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{330^\circ} \end{cases}$$

10. a) $z_1 = 3 + i$ $z_2 = 3 - i$
 b) $z^4 + z = z(z^3 + 1) = 0 \Rightarrow z_1 = 0$
 $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -1$, $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 c) $z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 =$
 $= (z-1) \cdot (z+2) \cdot (z^2+1) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -2, z_3 = i, z_4 = -i$

11. $(3-2i) \cdot (k+1-ki) =$
 $= 3k+3-3ki-2ki-2i+2ki^2 =$
 $= k+3-(5k+2)i$

a) Para $k = -3$ el resultado es un número imaginario puro.

b) Para $k = -\frac{2}{5}$ el resultado es un número real.