

REPASO NÚMEROS COMPLEJOS

1. Realizar las siguientes operaciones con números complejos en forma binómica y representa gráficamente el resultado.

a) $(3 + 2i) + (-5 - 4i)$

b) $(3 - 4i) \cdot (-1 + 2i)$

c) $\frac{3-5i}{2+2i}$

2.1. Pasar a forma polar los siguientes complejos.

a) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4}i$

b) $3i$

c) -8

2.2. Pasar a forma binómica:

a) 2_{45°

b) $3_{(\pi/6)}$

c) $(\sqrt{2})_{180^\circ}$

3. 1. Realizar las siguientes operaciones con complejos en forma polar.

a) $12_{60^\circ} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)_{\frac{\pi}{4}}$

b) $(12_\pi) : \left(3_{\frac{\pi}{6}}\right)$

c) $\left(5_{\frac{\pi}{4}}\right)^3$

3.2. Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica:

$$\frac{(-2\sqrt{3} - 2i) \cdot (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)}{(1+i)^3 \cdot i^{17}}$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 6x + 25 = 0$

b) $x^2 - 12x + 100 = 0$

c) $x^4 + 16 = 0$

5. Calcular el valor de "a" para que el complejo $\frac{6-2i}{1+ai}$ sea imaginario puro

6. Calcula el valor de a para que el número $\frac{4+2ai}{1+i}$:

a) Sea un número real.

b) El afijo de su conjugado esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

7. Calcular el valor de "m" y "n" para que se verifique la siguiente igualdad:

$$5 \cdot (m - 2i) = (3 + ni) \cdot (n - i)$$

8. Hallar dos números complejos tales que su producto sea -18 y su cociente 2i.

9. Verdadero o falso, razona tu respuesta:

a) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

10. Dibujar un pentágono regular calculando las raíces quintas de $4 - 4i$

Ejercicio 1: Realizar las siguientes operaciones con números complejos en forma binómica, indicando el afijo del número resultante.

a) $(3 + 2i) + (-5 - 4i) = -2 - 2i \rightarrow$ Afijo: A(-2,-2)

b) $(3 - 4i) \cdot (-1 + 2i) = -3 + 6i + 4i + 8 = 5 + 10i \rightarrow$ Afijo: B(5,10)

c) $\frac{3-5i}{2+2i} = \frac{(3-5i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{6-6i-10i-10}{8} = \frac{-4-16i}{8} = -\frac{1}{2} - 2i \rightarrow$ Afijo: C $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

Ejercicio 2:

2.1. Pasar a forma polar los siguientes n° complejos.

a) $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4}i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{\frac{3+81}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{2} \\ \alpha = \arctg(3\sqrt{3}) = 79,10^\circ \end{cases}$

Por tanto: $z = \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)_{79,1^\circ}$

b) $3i = 3_{90^\circ}$

c) $-8 = 8_{180^\circ}$

2.2. Pasar a forma binómica los siguientes n° complejos:

a) $2_{45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen}45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen}30^\circ) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $(\sqrt{2})_{180^\circ} = -\sqrt{2}$

Ejercicio 3:

3.1. Realizar las siguientes operaciones con n° complejos en forma polar.

a) $12_{60^\circ} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)_{\frac{\pi}{4}} = 3_{105^\circ}$

b) $(12_\pi) : \left(3_{\frac{\pi}{6}}\right) = 4_{150^\circ}$

c) $\left(5_{\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 125_{135^\circ}$

3.2. Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica:

$$\frac{(-2\sqrt{3}-2i) \cdot (\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)}{(1+i)^3 \cdot i^{17}}$$

$$\frac{(-2\sqrt{3}-2i) \cdot (\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)}{(1+i)^3 \cdot i^{17}} = \frac{4_{210^\circ} \cdot 1_{150^\circ}}{(\sqrt{2}_{45^\circ})^3 \cdot i} = \frac{4_{360^\circ}}{(2\sqrt{2})_{135^\circ} \cdot 1_{90^\circ}} = \sqrt{2}_{135^\circ} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1+i$$

Ejercicio 4: Resolver las siguientes ecuaciones, expresando las soluciones en forma binómica:

a) $z^2 - 6z + 25 = 0$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

b) $x^2 - 12x + 100 = 0$

$$z = \frac{12 \pm \sqrt{-256}}{2} = \frac{12 \pm 16i}{2} = 6 \pm 8i$$

c) $x^4 + 16 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{-16}$

$$z = -16 = 16_{180^\circ} \Rightarrow \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_1 = 2_{45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = 2_{135^\circ} = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_3 = 2_{225^\circ} = 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$z_4 = 2_{315^\circ} = 2(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Ejercicio 5: Calcular el valor de "a" para que el complejo $z = \frac{6-2i}{1+ai}$ sea imaginario puro

$$z = \frac{6-2i}{1+ai} = \frac{(6-2i)(1-ai)}{(1+ai)(1-ai)} = \frac{6-6ai-2i-2a}{1+a^2} = \frac{6-2a}{1+a^2} + \frac{-6a-2}{1+a^2}i$$

El número z es imaginario puro si su parte real es cero $\rightarrow 6 - 2a = 0 \rightarrow a = 3$

Ejercicio 6. Calcula el valor de a para que el número $\frac{4+2ai}{1+i}$:

a) Sea un número real.

b) El afijo de su conjugado esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

$$\frac{4+2ai}{1+i} = \frac{(4+2ai)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(4+2a) + (2a-4)i}{2} = (2+a) + (a-2)i$$

a) Es número real si $a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$

b) Conjugado: $(2+a) + (2-a)i \rightarrow$ Su afijo $(2+a, 2-a)$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante si se verifica:

$$2+a = 2-a \rightarrow a = 0$$

Ejercicio 7. Calcular el valor de "m" y "n" para que se verifique la siguiente igualdad:

$$5 \cdot (m - 2i) = (3 + ni) \cdot (n - i)$$

$$5m - 10i = 3n - 3i + n^2i + n \rightarrow 5m - 10i = 4n + (n^2 - 3)i \rightarrow \begin{cases} 5m = 4n \rightarrow m = \pm \frac{4\sqrt{7}}{5}i \\ -10 = n^2 - 3 \rightarrow n = \pm\sqrt{7}i \end{cases}$$

Ejercicio 8. Hallar dos números complejos tales que su producto sea -18 y su cociente 2i.

Sea $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot s_\beta = -18 \rightarrow (r \cdot s)_{\alpha+\beta} = 18_{180^\circ} \rightarrow \begin{cases} r \cdot s = 18 \\ \alpha + \beta = 180^\circ \end{cases} \\ \frac{r_\alpha}{s_\beta} = 2i \rightarrow \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} = 2_{90^\circ} \rightarrow \begin{cases} \frac{r}{s} = 2 \\ \alpha - \beta = 90^\circ \end{cases} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha - \beta = 90^\circ \end{cases} \rightarrow \alpha = 135^\circ, \beta = 45^\circ$$

$$\begin{cases} r \cdot s = 18 \\ \frac{r}{s} = 2 \end{cases} \rightarrow s = 3, r = 6$$

Los números son 6_{135° y 3_{45°

Ejercicio 9. Verdadero o falso, razona tu respuesta:

a) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

a) Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos.

Calculamos el conjugado del producto:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i \rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = ac - bd - (ad + bc)i$$

Hallamos el producto de sus conjugados:

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = ac - bd + (-ad - bc)i = ac - bd - (ad + bc)i$$

Luego es cierto.

b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$$

Ejercicio 10. Dibujar un pentágono regular calculando las raíces quintas de $4 - 4i$

$$\text{Sea } z = 4 - 4i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \\ \alpha = \arctg(-1) = 315^\circ \end{cases}$$

$$\text{Sea } w_k = \sqrt[5]{(\sqrt{32})_{315^\circ}} = (\sqrt{2})_{63^\circ + 72^\circ k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las raíces son:

$$W_1 = (\sqrt{2})_{63^\circ} \quad W_2 = (\sqrt{2})_{135^\circ} \quad W_3 = (\sqrt{2})_{207^\circ} \quad W_4 = (\sqrt{2})_{279^\circ} \quad W_5 = (\sqrt{2})_{351^\circ}$$