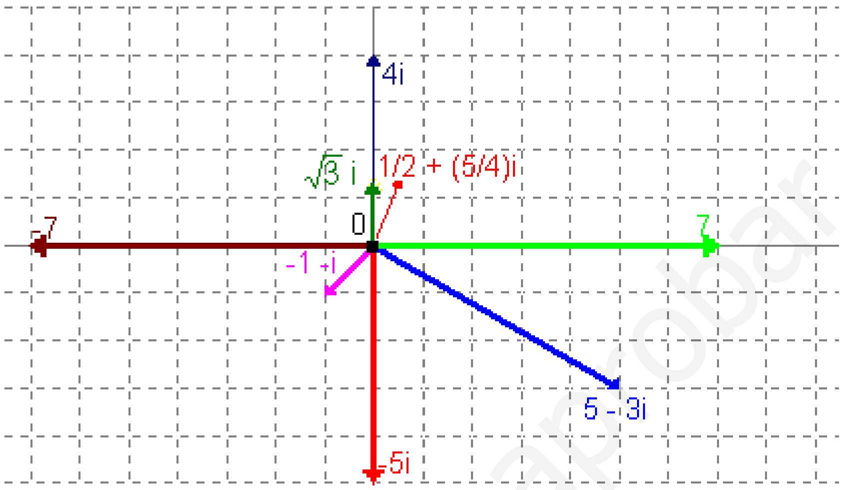
Ejercicios propuestos (❶❸❸)

❶ Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

$$5 - 3i;\ 1/2+(5/4)i;\ -5i;\ 7;\ \sqrt{3}\,i;\ 0;\ -1 - i;\ -7;\ 4i$$

---oo0oo---



◎**Imaginarios :** $5 - 3i$, $\frac{1}{2} + (5/4)\,i$, $-1 - i$, $\sqrt{3}\,i$, $-5i$, $4i$.

◎ **Imaginarios puros** : $\sqrt{3}\,i$, $-5i$, $4i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas:

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$

b) $3x^2 + 27 = 0$

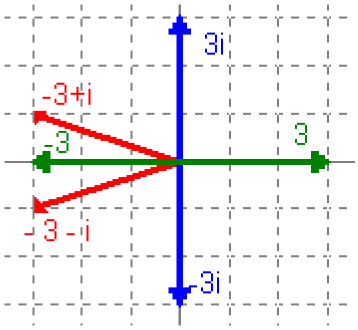
c) $3x^2 - 27 = 0$

---oo0oo---

a) $x^2 + 6x + 10 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$

b) $3x^2 + 27 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{27}{3}} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$

c) $3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{27}{3}} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

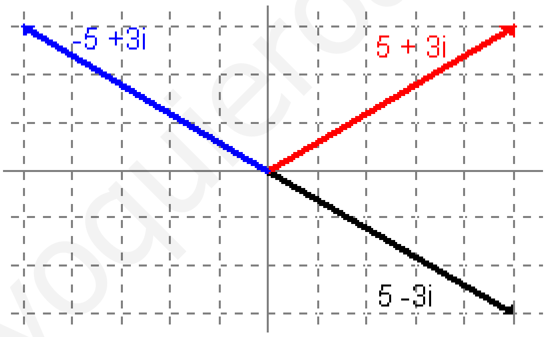


❸ Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

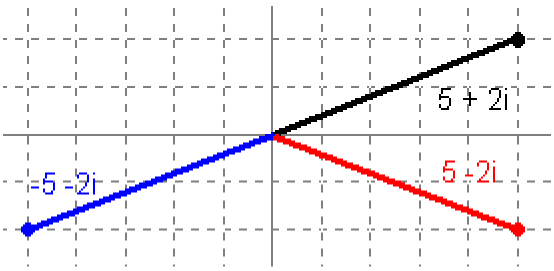
a) 3 – 5i
b) 5 + 2i
c) –1 – 2i
d) –2 + 3i
e) 5
f) 0
g) 2i
h) –5i

---oo0oo---

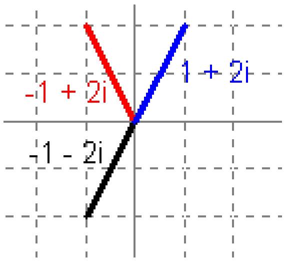
a) 3- 5i, opuesto : -3 +5i, conjugado : - 3 + 5i.



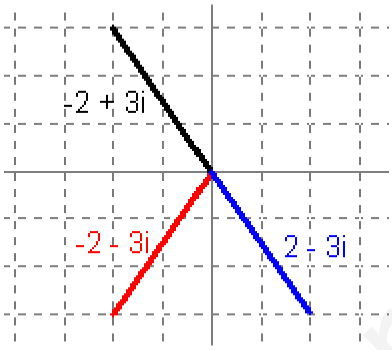
b) 5 + 2i, opuesto : - 5 – 2i, conjugado : 5 – 2i.



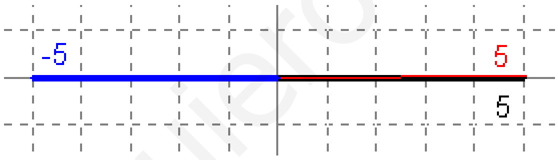
c) – 1 – 2i, opuesto : 1 + 2i, conjugado : -1 + 2i .



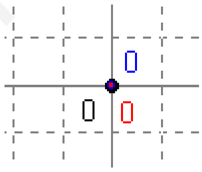
d) –2 + 3i, opuesto : 2 – 3i, conjugado : -2 –3i



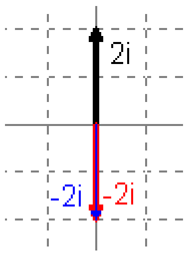
e) 5, opuesto : -5, conjugado : 5



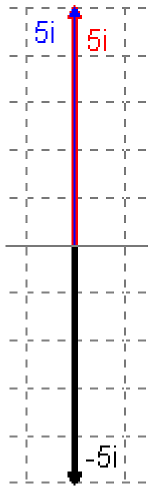
f) 0, conjugado : 0, opuesto : 0.



g) 2i, opuesto : -2i, conjugado –2i



h) –5i, opuesto : 5i, conjugado : 5i



4. Sabemos que $i^2 = -1$. Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Da un criterio para simplificar potencias de i de exponente natural.

---oo0oo---

Estudiemos cómo evoluciona la serie de las potencias de i :

$i^0 = \mathbf{1}$
$i^1 = \mathbf{i}$
$i^2 = \mathbf{-1}$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = \mathbf{-i}$
$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = \mathbf{1}$
$i^5 = i^4 \cdot i = \mathbf{i}$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = \mathbf{-1}$
$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = \mathbf{-i}$
$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$

Vemos que se repite cada cuatro, es decir es congruente, módulo cuatro, luego :

i^n

CRITERIO: Dividimos el exponente entre 4 y lo escribimos como sigue:

$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$

Por tanto, $i^n = i^r$, donde r es el resto de dividir n entre 4.

Aplicando el criterio:

$i^{20} = i^{4 \cdot 5+0} = i^0 = 1$

$i^{21} = i^{4 \cdot 5+1} = i^1 = i$

$i^{22} = i^{4 \cdot 5+2} = i^2 = -1$

$i^{23} = i^{4\cdot 5+3} = i^3 = -i.$

EJERCICIOS PROPUESTOS (❶❸❺)

1. **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + (1/2)(6 - 4i)$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

f) $\dfrac{2+4i}{4-2i}$

g) $\dfrac{1-4i}{3+i}$

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i}$

i) $\dfrac{5+i}{-2-i}$

j) $\dfrac{1+5i}{3+4i}$

k) $\dfrac{4-2i}{i}$

l) $6-3\left(5+\dfrac{2}{5}i\right)$

m) $\dfrac{3i(-4i+2)}{-2+3i}$

n) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}$

---oo0oo---

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i =$ **$18 - 18i$**

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + (1/2)(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i =$ **$-9i$**

c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 =$ **$16 + 2i$**

d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 =$ **$28 + 3i$**

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) = (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) = (1 - 5i)(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i =$ **$16 - 2i$**

f) $\dfrac{2+4i}{4-2i}=\dfrac{(2+4i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\dfrac{8+4i+16i+8i^2}{4^2-(2i)^2}=\dfrac{8+20i+8\cdot(-1)}{16-4\cdot(-1)}=\dfrac{8+20i-8}{16+4}=\dfrac{20i}{20}=$ **i**

g) $\dfrac{1-4i}{3+i}=\dfrac{(1-4i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)}=\dfrac{3-i-12i+4i^2}{3^2-i^2}=\dfrac{3-13i+4\cdot(-1)}{9-(-1)}=\dfrac{3-13i-4}{9+1}=\dfrac{-1-13i}{10}$ **$=(-1/10)-(13/10)i$**

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i}=\dfrac{(4+4i)\cdot(-3-5i)}{(-3+5i)\cdot(-3-5i)}=\dfrac{-12-20i-12i-20i^2}{(-3)^2-(5i)^2}=\dfrac{-12-32i-20\cdot(-1)}{9-25(-1)}=\dfrac{8-32i}{34}=\dfrac{4}{17}-\dfrac{16}{17}i$

i) $\frac{5+i}{-2-i}=\frac{(5+i)\cdot(-2+i)}{(-2-i)\cdot(-2+i)}=\frac{-10+5i-2i+i^2}{(-2)^2-i^2}=\frac{-10+3i-1}{4-(-1)}=\frac{-11+3i}{5}=-\frac{11}{5}+\frac{3}{5}i$

j) $\frac{1+5i}{3+4i}=\frac{(1+5i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)}=\frac{3-4i+15i-20i^2}{3^2-(4i)^2}=\frac{3+11i-20(-1)}{9-16(-1)}=\frac{3+11i+20}{9+16}=\frac{23}{25}+\frac{11}{25}i$

k) $\frac{4-2i}{i}=\frac{(4-2i)\cdot i}{i^2}=\frac{4i-2i^2}{-1}=-2-4i$

l) $6-3\left(5+\frac{2}{5}i\right)=6-15-\frac{6}{5}i=-9-\frac{6}{5}i$

m) $\frac{3i(-4i+2)}{-2+3i}=\frac{(-12i^2+6i)\cdot(-2-3i)}{(-2+3i)\cdot(-2-3i)}=\frac{-24-36i-12i-18i^2}{(-2)^2-(3i)^2}=\frac{-24-48i-18(-1)}{4-9(-1)}=\frac{-6}{13}-\frac{48}{13}i$

n) $\frac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}=\frac{-9(1-2i)\cdot(2-2i)}{(2+2i)\cdot(2-2i)}=\frac{(-9+18i)(2-2i)}{2^2-(2i)^2}=\frac{-18+18i+36i+36}{4-4(-1)}=\frac{18+54i}{16}=\frac{9}{8}+\frac{27}{8}i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ **Obtén polinomios cuyas raíces sean:**

a) $2+\sqrt{3}i$ y $2-\sqrt{3}i$

b) $-3i$ y $3i$

c) $1+2i$ y $3-4i$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales.)

---oo0oo---

Si las raíces de un polinomio son r_1 y r_2, el polinomio se halla : $(x-r_1)\cdot(x-r_2)$.

a)

$$[x-(2+\sqrt{3}i)]\cdot[x-(2-\sqrt{3}i)]=[(x-2)-\sqrt{3}i]\cdot[(x-2)+\sqrt{3}i]=(x-2)^2-(\sqrt{3}i)^2=x^2-4x+4+3=$$

$= \mathbf{x^2-4x+7}$.

b) $(x-(-3i))\cdot(x-3i)=x^2-9i^2=x^2+9$

c) $(x-(1+2i))\cdot(x-(3-4i))=[x^2-x(3-4i)-x(1+2i)+(1+2i)\cdot(3-4i)]=x^2-(4-2i)x+(3-4i+6i-8i^2=x^2-(4-2i)x+(3+2i+8)=$ $\mathbf{x^2-(4-2i)x+(11+2i)}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ **¿Cuánto debe valer *x*, real, para que $(25-xi)^2$ sea imaginario puro?**

---oo0oo---

Primero hacemos la operación de elevar al cuadrado y en número complejo resultante igualamos la parte real a cero (imaginario puro) :

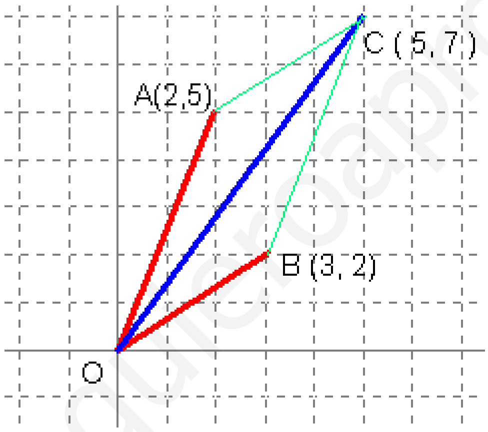
$(25 - xi)^2 = 625 - 50xi + (xi)^2 = (625 - x^2) - 50xi$. Para que sea imaginario puro:
$625 - x^2 = 0$; $x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

❹ **Representa gráficamente $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_1 + z_2$. Comprueba que $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2.**

---oo0oo---

Hallemos la suma $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (2 + 5i) = 5 + 7i$ y ahora representamos los tres números complejos :



Par comprobar que es un paralelogramo (en el dibujo lo parece) hemos de comprobar que los lados OA y BC tienen la misma pendiente (son paralelos) y OB y AC también tienen la misma pendiente.

Dados dos puntos del plano P (x_1 , y_1) y Q (x_2 , y_2), la pendiente de la recta que les une (m), se halla mediante la fórmula :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

❁ Pendiente del lado OA :

$$m_{\overline{OA}} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{5-0}{2-0} = \frac{5}{2}$$

❁ Pendiente de BC :

$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7-2}{5-3} = \frac{5}{2} = m_{\overline{OA}}$$

❁ Pendiente del lado OB :

$$m_{\overline{OB}} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

❁ Pendiente del lado AC :

$$m_{\overline{AC}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{7-5}{5-2} = \frac{2}{3} = m_{\overline{OB}}$$

Otra forma de demostrarlo :

Para que dos rectas sean paralelas sus vectores directores han de ser de componentes proporcionales (condición de paralelismo) :

OA = A – O = (2,5) – (0,0) = (**2, 5**); **BC** = C – B = (5, 7) - (3, 2) = (**2, 5**) = **OA**, luego son paralelos.

OB = B – O = (3, 2) – (0, 0) = (**3, 2**); **AC** = C – A = (5, 7) – (2, 5) = (**3, 2**) = **OB,** también son paralelos**, l**uego **es un paralelogramo**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

EJERCICIOS PROPUESTOS (🕮 ❶❸❼)

❶ **Escribe en forma polar los siguientes números complejos :**

a) $1+\sqrt{3}i$, **b)** $\sqrt{3}+i$, **c)** –1 + i, **d)** 5 – 12i, **e)** 3i, **f)** –5

---oo0oo---

a) $1+\sqrt{3}i \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo} = r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento} = \alpha = \text{arctg}\dfrac{b}{a} = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \text{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ \end{array} \right\} = 2_{60^\circ}$

b) $\sqrt{3}+i \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \end{array} \right\} = 2_{30^\circ}$

c) $-1+i \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{ac tg}\dfrac{1}{-1} = 135^\circ \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{135^\circ}$

d) $5-12i \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{169} = 14 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{-12}{5} = 292^\circ 37' \end{array} \right\} = 14_{292^\circ 37'}$

e) $3i \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{3^3} = 3 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{3}{0} = 90^\circ \end{array} \right\} = 3_{90^\circ}$

f) $-5 \left\{ \begin{array}{c} r=5 \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{0}{-5} = 180 \end{array} \right\} = 5_{180^\circ}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ **Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:**

a) $5_{\pi/6\ rad}$, b) 2_{135° , c) 2_{495° , d) 3_{240° , e) 5_{180° , f) 4_{90°

---oo0oo---

a) $5_{\pi/6} = 5_{30^\circ} = 5(\cos 30^\circ + i\,\text{sen} 30^\circ) = 5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + (1/2)\,i\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

b) $2_{135^\circ} = 2(\cos 135^\circ + i\,\text{sen}\,135^\circ) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $2_{495^\circ} = 2_{360^\circ+135^\circ} = 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

d) $3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i\,\text{sen}\,240^\circ) = 3\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180^\circ} = 5(\cos 180^\circ + i\,\text{sen}\,180^\circ) = 5(-1 + 0) = -5$

f) $4_{90^\circ} = 4(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ) = 4(0 + 1i) = 4i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ **Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado del número complejo $z = r_\alpha$.**

---oo0oo---

⦿ Opuesto de z : $-z = r_{180^\circ+\alpha}$

⦿ Conjugado de z : $\bar{z} = r_{360^\circ-\alpha}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ **Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo: $z = 8\,(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ)$**

---oo0oo---

$$z = 8_{30^\circ} = 8(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\sqrt{3} + 4i$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ **Sean los números complejos $z_1 = 4_{60^\circ}$ y $z_2 = 3_{210^\circ}$.**
a) Expresa z_1 y z_2 en forma binómica.
b) Halla $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 y pasa los resultados a forma polar.
c) Compara los módulos y los argumentos de $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 con los de z_1 y z_2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.

---oo0oo---

a) $z_1 = 4_{60^\circ} = 4\,(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2+2\sqrt{3}\,i$

$z_2 = 3_{210^\circ} = 3\,(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

b) $z_1 \cdot z_2 = \left(2+2\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right) = -3\sqrt{3}-3i-9i-3\sqrt{3}i^2 = -12i = 12_{270^\circ}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{2+2\sqrt{3}i} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\cdot\left(2-2\sqrt{3}i\right)}{\left(2+2\sqrt{3}i\right)\left(2-2\sqrt{3}i\right)} = \frac{-3\sqrt{3}+9i-3i-3\sqrt{3}}{2^2-\left(2\sqrt{3}i\right)^2} = \frac{-6\sqrt{3}+6i}{16} = \frac{-3\sqrt{3}}{8}+\frac{3}{8}i$$

y en forma polar :

$$\frac{-3\sqrt{3}}{8}+\frac{3}{8}i \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{\left(-3\sqrt{3}/8\right)^2+(3/8)^2} = \sqrt{\frac{27}{64}+\frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{3/8}{-3\sqrt{3}/8} = \operatorname{arctg}-\frac{\sqrt{3}}{3} = 150^\circ \end{array} \right\} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ}$$

c) $z_1 \cdot z_2 = 4_{60^\circ} \cdot 3_{210^\circ} = (4 \cdot 3)_{60^\circ+210^\circ} = 12_{270^\circ}$ (producto de módulos y suma de argumentos)

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210}}{4_{60}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210^\circ-60^\circ} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ}$, es decir se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Ejercicios propuestos (📖 ❶❸❾)

❶ **Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:**

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ}$, **b)** $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ}$, **c)** $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ}$, **d)** $5_{(2\pi/3)\,\text{rad}} : 1_{60^\circ}$, **e)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^5$

---oo0oo---

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ} = (1 \cdot 5)_{150^\circ+30^\circ} = 5_{180^\circ} = 5\,(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = 5\,(-1+ i\cdot 0) = -5$

b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ} = (6:3)_{45^\circ-15^\circ} = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}+i$

c) $2_{10^\circ}\cdot 1_{40^\circ}\cdot 3_{70^\circ} = (2\cdot1\cdot3)_{10^\circ+40^\circ+70^\circ} = 6_{120^\circ} = 6\,(\cos 120 + i\,\text{sen}120) = -3+3\sqrt{3}\,i$

d) $5_{2\pi/3} : 1_{60^\circ} = 5_{120^\circ} : 1_{60^\circ} = (5:1)_{120^\circ-60^\circ} = 5_{60^\circ} = 5(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}60^\circ) = \frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^5$, primero lo convertimos a forma polar:

$$\left(1-\sqrt{3}\,i\right)\left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha &= \text{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = 300^\circ \end{aligned}\right\} = 2_{300^\circ}$$ y ahora hacemos la potencia :

$$\left(2_{300^\circ}\right)^5 = 2^5_{300\cdot5} = 32_{1500^\circ} = 32_{360\cdot4+60} = 32_{60^\circ} = 32(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}60^\circ) = 32\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16+16\sqrt{3}\,i$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷ **Dados los complejos $z_1 = 5_{45^\circ}$, $z_2 = 2_{15^\circ}$, $z_3 = 4i$, obtén en forma polar:**

a) $z_1\cdot z_3 = 5_{45^\circ}\cdot 4_{90^\circ} = (5\cdot4)_{45^\circ+90^\circ} = 20_{135^\circ}$, ya que $z_3 = 4i = 4_{90^\circ}$

b) $\frac{z_1}{z_2^2} = \frac{5_{45^\circ}}{\left(2_{15^\circ}\right)^2} = \frac{5_{45^\circ}}{\left(2^2\right)_{15^\circ\cdot2}} = \frac{5_{45^\circ}}{4_{30^\circ}} = \left(\frac{5}{4}\right)_{45^\circ-30^\circ} = \left(\frac{5}{4}\right)_{15^\circ}$

c)

$$\frac{z_1^3}{z_2\cdot z_3^2} = \frac{\left(5_{45^\circ}\right)^3}{2_{15^\circ}\cdot\left(4_{90^\circ}\right)^2} = \frac{\left(5^3\right)_{45\cdot3}}{2_{15}\cdot\left(4^2\right)_{90\cdot2}} = \frac{125_{135^\circ}}{2_{15^\circ}\cdot16_{180^\circ}} = \frac{125_{135^\circ}}{32_{195^\circ}} = \left(\frac{125}{32}\right)_{135^\circ-195^\circ} = \left(\frac{125}{32}\right)_{-60^\circ} = \left(\frac{125}{32}\right)_{300^\circ}$$

d) $\frac{z_1\cdot z_2^3}{z_3} = \frac{5_{45^\circ}\cdot\left(2_{15^\circ}\right)^3}{4_{90^\circ}} = \frac{5_{45^\circ}\cdot8_{45^\circ}}{4_{90^\circ}} = \frac{5\cdot8_{45^\circ+45^\circ}}{4_{90^\circ}} = \frac{40_{90^\circ}}{4_{90^\circ}} = \left(\frac{40}{4}\right)_{90^\circ-90^\circ} = 10_{0^\circ}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ **Expresa cos3α y sen 3α en función de sen α y cos α utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.**

---oo0oo---

Vamos a realizar $(1_\alpha)^3$ de dos formas :

❁ En forma binómica :

$(1_{\alpha})^3 = 1\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)^3 = \cos^3\alpha + i\,3\cos^2\alpha\,\text{sen}\alpha + 3i^2\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha + i^3\,\text{sen}^3\alpha = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\,\text{sen}\alpha\,i - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha - i\,\text{sen}^3\alpha = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\text{sen}\alpha - \text{sen}^3\alpha)i$

❁ En forma polar y después pasado a binómica :

$(1_{\alpha})^3 = (1^3)_{3\alpha} = 1_{3\alpha} = \cos 3\alpha + i\,\text{sen}\,3\alpha$

Como los números complejos resultantes han de ser iguales, igualando la parte real (fondo azul) :

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$$

y la parte imaginaria (fondo amarillo) :

$$\text{sen}\,3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\text{sen}\alpha - \text{sen}^3\alpha)$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

Ejercicios propuestos (📖 ❶❹❶)

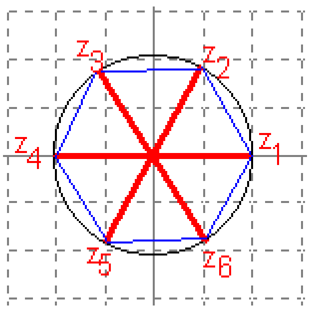
❶ **Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.**

---oo0oo---

$1 = 1 + 0i = 1_{0º+360k}$, luego :

$$\sqrt[6]{1_{0º+360k}} = \left(\sqrt[6]{1}\right)_{\frac{0+360k}{6}} = 1_{60k} \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 1_{0º} = \cos 0º + i\,\text{sen}0º = 1+0i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 1_{60º} = \cos 60º + i\,\text{sen}60º = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 1_{120º} = \cos 120º + i\,\text{sen}120º = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 1_{180} = \cos 180º + i\,\text{sen}180º = -1+0i \\ k=4 \Rightarrow z_5 = 1_{240º} = \cos 240º + i\,\text{sen}240º = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=5 \Rightarrow z_6 = 1_{300º} = \cos 300º + i\,\text{sen}300º = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Las raíces se hallan en los vértices de un hexágono regular de radio 1, en los ángulos anteriores :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

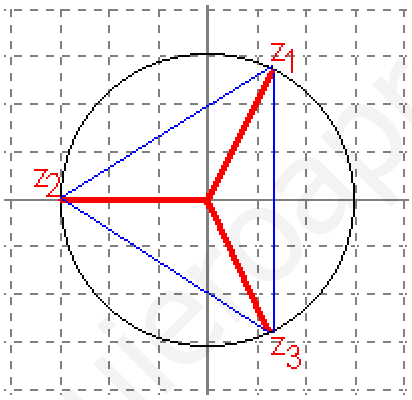
❷ **Resuelve la ecuación $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.**

---oo0oo---

$z^3+27=0; z=\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^\circ}}=\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{180^\circ+360k}{3}}=3_{60+120k}$ y dando a k los valores 0,1 y 2:

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1=3_{60^\circ}=3(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen} 60^\circ)=3\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ k=1 \Rightarrow z_2=3_{180^\circ}=3(\cos 180^\circ + i\,\mathrm{sen} 180^\circ)=3(-1+0i)=-3 \\ k=2 \Rightarrow z_3=3_{300^\circ}=3(\cos 300^\circ + i\,\mathrm{sen} 300^\circ)=3\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Ahora las tres soluciones están dirigidas a los vértices de un triángulo equilátero de radio 3 y ángulos 60º, 180º y 300º (a 120 º) :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸ **Calcula:**

a) $\sqrt[3]{-i}$, el número –i en forma polar es $-i = 1_{270^\circ}$, luego :

$$\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1_{270^\circ}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270+360k}{3}}=1_{90+120k}\begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1=1_{90^\circ}=\cos 90^\circ + i\,\mathrm{sen} 90^\circ = 0+i=i \\ k=1 \Rightarrow z_2=1_{210^\circ}=\cos 210^\circ + i\,\mathrm{sen} 210^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \\ k=2 \Rightarrow z_3=1_{330^\circ}=\cos 330^\circ + i\,\mathrm{sen} 330^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

b) $\sqrt[3]{-8+8\sqrt{3}\,i}$, hallemos primero el módulo del radicando para ponerlo en forma polar :

$$-8+8\sqrt{3}\,i\begin{cases} r=\sqrt{(-8)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{64+64\cdot 3}=\sqrt{256}=16 \\ \alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{8\sqrt{3}}{-8}=\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})=120^\circ \end{cases}=16_{120^\circ}$$

Ahora ya podemos hallar las raíces cuartas del número :

$$\sqrt[4]{16_{120^\circ}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{120+360k}{4}} = 2_{30^\circ+90k^\circ}\begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}30^\circ) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}+i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{120^\circ} = 2(\cos 120^\circ + i\,\mathrm{sen}120^\circ) = 2\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1+\sqrt{3}i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{210^\circ} = 2(\cos 210^\circ + i\,\mathrm{sen}210^\circ) = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1}{2}i\right) = -\sqrt{3}-i \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 2_{300^\circ} = 2(\cos 300^\circ + i\,\mathrm{sen}300^\circ) = 2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1-\sqrt{3}i \end{cases}$$

c) $\sqrt{-25}$, el número - 25 en forma polar es 25_{180°, luego sus raíces son :

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25_{180^\circ}} = \sqrt{25}_{\frac{180+360k}{2}} = 5_{90^\circ+180k^\circ} = \begin{Bmatrix} k=0 \Rightarrow z_1 = 5_{90^\circ} = 5(\cos 90^\circ + i\,\mathrm{sen}90^\circ) = 5i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 5_{270^\circ} = 5(\cos 270^\circ + i\,\mathrm{sen}270^\circ) = -5i \end{Bmatrix}$$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}}$, antes de calcular la raíz cúbica vamos a hacer el cociente del radicando y expresar el resultado en forma polar :

$$\frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i} = \begin{Bmatrix} -2+2i = \begin{bmatrix} r = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{2}{-2} = \mathrm{arctg}-1 = 135^\circ \end{bmatrix} = 2\sqrt{2}_{135^\circ} \\ 1+\sqrt{3}i = \begin{bmatrix} r = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = \\ \alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ \end{bmatrix} = 2_{60^\circ} \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{2}_{135^\circ}}{2_{60}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}_{135^\circ-60^\circ} = \sqrt{2}_{75^\circ}$$

Ahora ya podemos hallar las raíces cúbicas:

$$\sqrt[3]{\frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{75^\circ}} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)_{\frac{75+360k}{3}} = \sqrt[6]{2}_{25^\circ+120k^\circ} = \begin{Bmatrix} k=0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}_{25^\circ} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{2}_{145^\circ} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[6]{2}_{265^\circ} \end{Bmatrix}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹ **Resuelve las ecuaciones:**

a) $x^4 + 1 = 0$

b) $x^6 + 64 = 0$

---oo0oo---

a) $x^4 + 1 = 0$; $x = \sqrt[4]{-1}$, como $-1 = 1_{180^\circ}$:

$$\sqrt[4]{1_{180^\circ}} = \left(\sqrt[4]{1}\right)_{\frac{180+360k}{4}} = 1_{45^\circ+90k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow s_1 = 1_{45^\circ} = \cos 45^\circ + i\,\mathrm{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=1 \Rightarrow s_2 = 1_{135^\circ} = \cos 135^\circ + i\,\mathrm{sen} 135^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=2 \Rightarrow s_3 = 1_{225^\circ} = \cos 225^\circ + i\,\mathrm{sen} 225^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=3 \Rightarrow s_4 = 1_{315^\circ} = \cos 315^\circ + i\,\mathrm{sen} 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

b) $x^6 + 64 = 0$; $x = \sqrt[6]{-64}$; $-64 = 64_{180^\circ}$, luego :

$$\sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \left(\sqrt[6]{64}\right)_{\frac{180+360k}{6}} = 2_{30^\circ+60k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow s_1 = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen} 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i \\ k=1 \Rightarrow s_{12} = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + i\,\mathrm{sen} 90^\circ) = 2(0+i) = 2i \\ k=2 \Rightarrow s_3 = 2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i\,\mathrm{sen} 150^\circ) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i \\ k=3 \Rightarrow s_4 = 2_{210^\circ} = 2(\cos 210^\circ + i\,\mathrm{sen} 210^\circ) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i \\ k=4 \Rightarrow s_5 = 2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i\,\mathrm{sen} 270^\circ) = 2(0-i) = -2i \\ k=5 \Rightarrow s_6 = 2_{330^\circ} = 2(\cos 330^\circ + i\,\mathrm{sen} 330^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ Comprueba que si *z* y *w* son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones: z · w, z/w, z^2 , z^3.

---oo0oo---

Si z y w son raíces sextas de 1 ⇨ $z^6 = 1$ y $w^6 = 1$
Veamos si también $(z \cdot w)^6 = 1$, $(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1$, luego sí es raíz sexta de 1.
Ha de cumplirse $(z/w)^6 = 1$; $(z/w)^6 = z^6/w^6 = 1/1 = 1$, luego sí es raíz sexta de 1.
Veamos a qué es igual $(z^2)^6 = (z^6)^2 = 1^2 = 1$, luego sí es raíz sexta de 1.
Ahora veamos $(z^3)^6 = (z^6)^3 = 1^3 = 1$, sí es raíz sexta de 1.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ El número 4 + 3i es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z. Halla las otras tres raíces cuartas de z.

---oo0oo---

Las raíces cuartas de cualquier complejo tienen el mismo módulo y se diferencian en 360kº/4 = 90kº en cada argumento, hallemos el módulo y argumento de la que conocemos :

$$4 + 3i = \begin{cases} r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} = 36^\circ\ 52'\ 11'' \end{cases} = 5_{36^\circ 52' 11''}$$

Luego las otras tres raíces cuartas de *z* serán:

$$5_{36^\circ\,52'\,11'' + 90^\circ} = 5_{126^\circ\,52'\,11''} = \underline{-3+4i}$$

$$5_{36^\circ\,52'\,11'' + 2\cdot 90^\circ} = 5_{216^\circ\,52'\,11''} = \underline{-4-3i}$$

$$5_{36^\circ\,52'\,11'' + 3\cdot 90^\circ} = 5_{306^\circ\,52'\,11''} = \underline{3-4i}$$

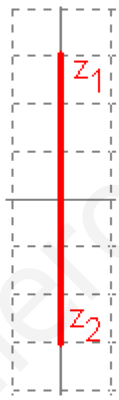
❼ **Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:**

---oo0oo---

a)

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9_{180^\circ}} = \left(\sqrt{9}\right)_{\frac{180+360k}{2}} = 3_{90^\circ+180k^\circ} = \begin{Bmatrix} k=0 \Rightarrow z_1 = 3_{90^\circ} = 3(\cos 90^\circ + i\,\mathrm{sen}90^\circ) = 3(0+i) = 3i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 3_{270^\circ} = 3(\cos 270^\circ + i\,\mathrm{sen}270^\circ) = 3(0-i) = -3i \end{Bmatrix}$$

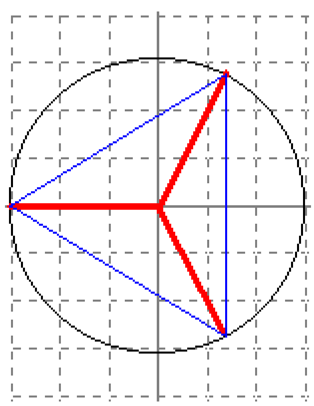
las dos raíces difieren en 180º (véase el valor 180kº que se suma al argumento), la representación serán afijos opuestos :



b)

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{180+360k}{3}} = 3_{60^\circ+120k^\circ} = \begin{Bmatrix} k=0 \to z_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}60^\circ) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ k=1 \to z_2 = 3_{180^\circ} = 3(\cos 180^\circ + i\,\mathrm{sen}180^\circ) = -3 \\ k=2 \to z_3 = 3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i\,\mathrm{sen}300^\circ) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{Bmatrix}$$

Estas tres raíces difieren en 120º, es decir se representan en los vértices de un triángulo equilátero de radio el módulo (3), a partir de la primera que forma un ángulo de 60º con el eje horizontal :



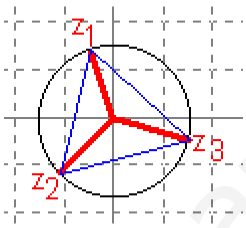
c) $\sqrt[3]{2-2i}$ **,** primero hemos de pasar el número 2 – 2i a forma polar :

$$2-2i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2} \\ \alpha=\text{arc tg}\dfrac{-2}{2}=\text{arc tg}-1=315^{\circ},\text{ ya que }270^{\circ}<\alpha<360^{\circ} \end{array}\right\}=2\sqrt{2}_{315^{\circ}}$$

y ahora hallamos sus tres raíces cúbicas :

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}_{315^{\circ}}}=\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right)_{\frac{315+360k}{3}}=\sqrt{2}_{105^{\circ}+120k^{\circ}}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\sqrt{2}_{105^{\circ}}=\sqrt{2}(\cos 105^{\circ}+i\,\text{sen}105^{\circ})=-0'366+1'366i \\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt{2}_{225^{\circ}}=\sqrt{2}(\cos 225^{\circ}+i\,\text{sen}225^{\circ})=-1-i \\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt{2}_{345^{\circ}}=\sqrt{2}(\cos 345^{\circ}+i\,\text{sen}345^{\circ})=1'366-0'366i \end{array}\right\}$$

También se dirigen a los vértices de un triángulo equilátero (es una raíz cúbica) pero de radio raíz de dos y empezando en 105º :



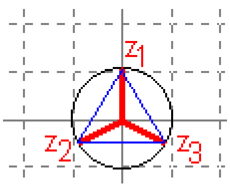
d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$, hemos de hacer primero la división y pasar el resultado a forma binómica :

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{\sqrt{2}_{315^{\circ}}}{\sqrt{2}_{45^{\circ}}}=1_{270^{\circ}}$$

y ahora hallamos las tres raíces cúbicas :

$$\sqrt[3]{1_{270^{\circ}}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270+360k}{3}}=1_{90^{\circ}+120k^{\circ}}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=1_{90^{\circ}}=\cos 90^{\circ}+i\,\text{sen}90^{\circ}=i \\ k=1\Rightarrow z_2=1_{210^{\circ}}=\cos 210^{\circ}+i\,\text{sen}210^{\circ}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \\ k=2\Rightarrow z_3=1_{330^{\circ}}=\cos 330^{\circ}+i\,\text{sen}330^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \end{array}\right\}$$

De nuevo una raíz cúbica, forman ángulos de 120º con modulo 1, empezando en 90º :

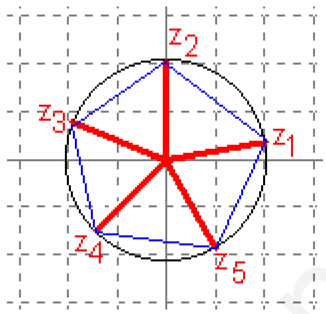


e) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}}$, hacemos el cociente y lo pasamos a polar :

$$-\frac{32}{i}=-\frac{32i}{i^2}=-\frac{32i}{-1}=32i=32_{90^\circ}$$, y ahora ya podemos calcular las raíces quintas :

$$\sqrt[5]{32_{90^\circ}}=\left(\sqrt[5]{32}\right)_{\frac{90+360k}{5}}=2_{18^\circ+72k^\circ}=\begin{cases}k=0\Rightarrow z_1=2_{18^\circ}=2(\cos 18^\circ + i\,sen 18^\circ)=1'90+0'62i\\ k=1\Rightarrow z_2=2_{90^\circ}=2(\cos 90^\circ + i\,sen 90^\circ)=2i\\ k=2\Rightarrow z_3=2_{162^\circ}=2(\cos 162^\circ + i\,sen 162^\circ)=-1'90+0'62i\\ k=3\Rightarrow z_4=2_{234^\circ}=2(\cos 234^\circ + i\,sen 234^\circ)=-1'18-1'62i\\ k=4\Rightarrow z_5=2_{306^\circ}=2(\cos 306^\circ + i\,sen 306^\circ)=1'18-1'62i\end{cases}$$

Ahora las raíces difieren en 72º y se dirigen a los vértices de un pentágono regular de radio 2 :



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR (❶❹❻)

Números complejos en forma binómica

❶ **Calcula:**
a) (3 + 2i) (2 – i) – (1 – i) (2 – 3i)
b) 3 + 2i (–1 + i) – (5 – 4i)
c) –2i – (4 – i)5i
d) (4 – 3i) (4 + 3i) – (4 – 3i)².

---oo0oo---

a) (3 + 2i) (2 – i) – (1 – i) (2 – 3i) = 6 – 3i + 4i – 2i^2 – 2 + 3i + 2i – 3i^2 = 6 – 3i + 4i + 2 – 2 + 3i + 2i + 3 = **9 + 6i**

b) 3 + 2i (–1 + i) – (5 – 4i) = 3 – 2i + 2i^2 – 5 + 4i = 3 – 2i – 2 – 5 + 4i = **– 4 + 2i**

c) –2i – (4 – i)5i = –2i – 20i + 5i^2 = –22i – 5 = **–5 – 22i**

d) (4 – 3i) (4 + 3i) – (4 – 3i)^2 = 16 – (3i)^2 –(16 + 9i^2 - 24i) = 16 + 9 – 16 + 9 + 24i = **18 +24i**

❷ Calcula en forma binómica:

---oo0oo---

a)

$$\frac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}=\frac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i}=\frac{12+6i-6(-1)}{2-2i}=\frac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{36+36i+12i+12i^2}{2^2-(2i)^2}=3+6i$$

b)

$$\frac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}=\frac{-2+3i}{-6+2i}=\frac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}=\frac{12+4i-18i-6i^2}{(-6)^2-(2i)^2}=\frac{12-14i-6(-1)}{36-4(-1)}=\frac{18-14i}{40}=\frac{9}{20}-\frac{7}{20}i$$

c)

$$\frac{2+5i}{3-2i}(1-i)=\frac{7+3i}{3-2i}=\frac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{15+23i}{9+4}=\frac{15}{13}+\frac{23}{13}i$$

d)

$$\frac{1+i}{2-i}+\frac{-3-2i}{1+3i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\frac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1+3i}{2^2+1}+\frac{-9+7i}{1+9}=\frac{1+3i}{5}+\frac{-9+7i}{10}=\frac{2+6i-9+7i}{10}=-\frac{7}{10}+\frac{13}{10}i$$

❸Estos números complejos son los resultados de las operaciones que los siguen. Opera y di cuál corresponde a cuál:

---oo0oo---

a)

$$(1-i)(4-2i)(1+3i)=(2-6i)(1+3i)=20$$

b)

$$\frac{1+2i}{2-i}(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}(2-i)=\frac{(1+2i)(2+i)^2+(1-2i)(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=\frac{(1+2i)(3+4i)+(1-2i)(3-4i)}{2^2-i^2}=\frac{-5+10i-5-10i}{5}=-2$$

c)

$$\frac{2-i}{3-i}-\frac{1}{5}\left(\frac{1+8i}{1+3i}\right)=\frac{(2-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}-\frac{1}{5}\left(\frac{(1+8i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}\right)=\frac{7-i}{10}-\frac{1}{5}\left(\frac{25+5i}{10}\right)=\frac{7-i}{10}-\frac{5+i}{10}=\frac{7-i-5-i}{10}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i$$

d)

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-\frac{3}{2}i}=\frac{4+4i+i^2+1-2i+i^2}{\frac{2-3i}{2}}=\frac{2(3+2i)}{(2-3i)}=\frac{2(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2(13i)}{4-9i^2}=\frac{26i}{13}=2i$$

e)

$$\frac{2-2i}{i}+\frac{3-5i}{2-i}=\frac{(2-2i)i}{i^2}+\frac{(3-5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2i+2}{-1}+\frac{11-7i}{2^2-i^2}=-2i-2+\frac{11-7i}{5}=\frac{-10i-10+11-7i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{17}{5}i$$

❹ **Calcula:**

a) i^{37} ; b) i^{126} ; c) i^{87} ; d) i^{64} ; e) i^{-216} .

---oo0oo---

a) $i^{37} = i^{4\cdot 9+1} = i^{4\cdot 9}\cdot i = (i^4)^9\cdot i = 1^9\cdot i = \mathbf{i}$.

b) $i^{126} = i^{31\cdot 4+2} = (i^4)^{31}\cdot i^2 = 1^{31}\cdot i^2 = i^2 = \mathbf{-1}$

c) $i^{87} = i^{4\cdot 41+3} = (i^4)^{41}\cdot i^3 = 1^{41}\cdot i^3 = i^3 = \mathbf{-i}$.

d) $i^{64} = i^{4\cdot 16} = (i^4)^{16} = 1^{16} = \mathbf{1}$

e) $i^{-216} = \dfrac{1}{i^{216}} = \dfrac{1}{i^{4\cdot 54}} = \dfrac{1}{(i^4)^{54}} = \dfrac{1}{1^{54}} = \dfrac{1}{1} = \mathbf{1}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺ **Dado el número complejo** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$**, prueba que :**

a) $1 + z + z^2 = 0$

$$1+z+z^2 = 1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2\right) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

b)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{2\left(-1-\sqrt{3}i\right)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{(-1)^2-(\sqrt{3})^2 i^2} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{1+3} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = z^2$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻ **Calcula *m* y *n* para que se verifique la igualdad: (2 + *m*i) + (*n* + 5i) = 7 – *2i***

---oo0oo---

(2 + mi) + (n + 5i) = 7 – 2i, realizamos la suma del primer miembro : (2 + n) + (m + 5)i = 7 – 2i e igualamos parte real 2+n = 7; **n = 7 – 2 = 5**, y parte imaginaria m+5 = - 2, **m = - 7**.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❼ **Determina *k* para que el cociente** $\dfrac{k+i}{1+i}$ **sea igual a 2 – i.**

---oo0oo---

Hagamos primero el cociente :

$\frac{k+i}{1+i}=\frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(k+1)+(1-k)i}{2}=\frac{k+1}{2}+\frac{1-k}{2}i$, e igualamos la parte real e imaginaria de ambos números :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{k+1}{2}=2;k+1=4;k=3\\ \frac{1-k}{2}=-1;1-k=-2;k=3\end{array}\right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❽ **Calcula *a* y *b* de modo que se verifique $(a+bi)^2=3+4i$.**

---oo0oo---

Desarrollamos el cuadrado:

$(a+bi)^2=a^2+(bi)^2+2abi=a^2-b^2+2abi=3+4i$ y ahora igualamos para tener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de segundo grado :

$$\left.\begin{array}{r}a^2-b^2=3\\ 2ab=4\end{array}\right\}\text{despejamos b de la 2ª y sustituimos en la 1ª}\rightarrow b=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a};a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3$$

$$a^2-\frac{4}{a^2}=3;a^4-3a^2-4=0\Rightarrow a^2=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\left\langle\begin{array}{l}4\Rightarrow a=\pm\sqrt{4}=\pm2;b=\pm1\\ -1\Rightarrow a=\pm\sqrt{1}\notin\Re\end{array}\right.$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❾ **Dados los complejos $2-ai$ y $3-bi$, halla *a* y *b* para que su producto sea igual a $8+4i$.**

---oo0oo---

Hacemos el producto del primer miembro:

$6-2bi-3ai+abi^2=8+4i;\ 6-2bi-3ai-ab=8+4i$

Separamos parte real y parte imaginaria :

$(6-ab)+(-2b-3a)i=8+4i$

Igualamos las parte real e imaginaria de ambos miembros para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de 2º grado :

$$\left.\begin{array}{r}6-ab=8\\ -2b-3a=4\end{array}\right\};b=-2-\frac{3}{2}a\Rightarrow 6-a(-2-\frac{3}{2}a)=8;6+2a+\frac{3}{2}a^2=8\Rightarrow 3a^2+4a-4=0$$

ecuación de segundo grado que resolvemos:

$$3a^2+4a-4=0 \Rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-4\pm 8}{6}=\begin{cases}\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow b=-2-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=-3\\ \dfrac{-12}{6}=-2\Rightarrow b=-2-\dfrac{3}{2}(-2)=1\end{cases}$$

❿ **Calcula el valor de *a* y *b* para que se verifique** $a-3i=\dfrac{2+bi}{5-3i}$

---oo0oo---

El denominador del primer miembro lo pasamos multiplicando al primero, hacemos el producto e igualamos las parte real e imaginaria de ambos números para hallar las dos incógnitas :

$$a-3i=\frac{2+bi}{5-3i};(a-3i)(5-3i)=2+bi;5a-3ai-15i+9i^2=(5a-9)+(-3a-15)i=2+bi$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5a-9=2\Rightarrow a=11/5\\ b=-3a-15=-\dfrac{33}{5}-15=-\dfrac{108}{5}\end{cases}$$

❶❶ **Halla el valor de *b* para que el producto (3 – 6i) (4 + *b*i) sea:**

a) Un número imaginario puro.
b) Un número real.

---oo0oo---

(3 – 6i) (4 + bi) = 12 + 3bi – 24i + 6b = (12 + 6b) + (3b – 24)i

a) 12 + 6b = 0 ⇨ **b = –2**

b) 3b – 24 = 0 ⇨ **b = 8**

❶❷ **Determina *a* para que *(a* – 2i) 2 sea un número imaginario puro.**

---oo0oo---

Realizamos el cuadrado :

$(a-2i)^2=a^2+4i^2-4ai=(a^2-4)-4ai$

Para que sea imaginario puro, ha de ser :

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

❶❸ **Calcula *x* para que el resultado del producto *(x* + 2 + *i*x) *(x* – i) sea un número real .**

---oo0oo---

☸ Hacemos el producto:

(x +2+ix) (x - i) = x^2 – xi + 2x – 2i + x^2i –xi^2 = x^2 – xi + 2x – 2i + x^2i + x = (x^2 + 3x) + (x^2- x – 2) i

☸ Para que sea número real la parte imaginaria ha de ser nula, resolvemos la ecuación :

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Números complejos en forma polar

❶❹ **Representa los siguientes números complejos, sus opuestos y sus conjuga-dos, y exprésalos en forma polar:**

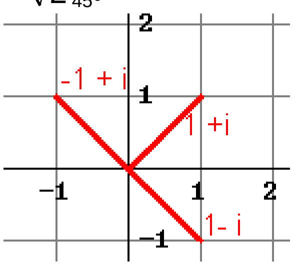
---oo0oo---

Para obtener el conjugado y el opuesto en forma polar se resta el argumento de 360º y se suma al argumento 180º, respectivamente.

a) $1 - i \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arc tg}\frac{-1}{1} = 315^\circ, \text{ ya que } 270^\circ < \alpha < 360^\circ \end{cases} = \sqrt{2}_{315^\circ}$

Opuesto = -1 + i = $\sqrt{2}_{315^\circ+180^\circ} = \sqrt{2}_{495^\circ} = \sqrt{2}_{360^\circ+135^\circ} = \sqrt{2}_{135^\circ}$

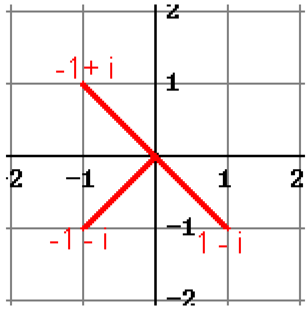
Conjugado = 1 + i = $\sqrt{2}_{360^\circ-315^\circ} = \sqrt{2}_{45^\circ}$



b) $-1 + i \begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arc tg}\frac{1}{-1} = 135^\circ, \text{ ya que } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} = \sqrt{2}_{135^\circ}$

↔*Opuesto* = 1 - i = $\sqrt{2}_{135^\circ+180^\circ} = \sqrt{2}_{315^\circ}$

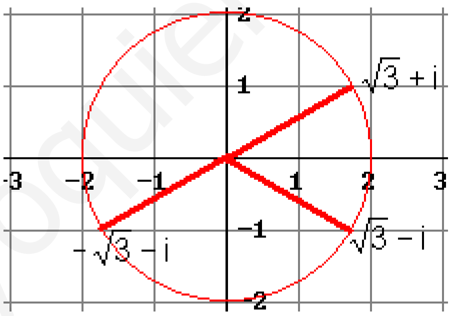
↱*Conjugado* = -1 - i = $\sqrt{2}_{360^\circ-135^\circ} = \sqrt{2}_{225^\circ}$



c) $\sqrt{3}+i \left\{ \begin{array}{c} r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\text{arc tg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=30^\circ,\text{ ya que }0^\circ<\alpha<90^\circ \end{array} \right\} = 2_{30^\circ}$

Opuesto = $-\sqrt{3}-i=2_{30^\circ+180^\circ}=2_{210^\circ}$

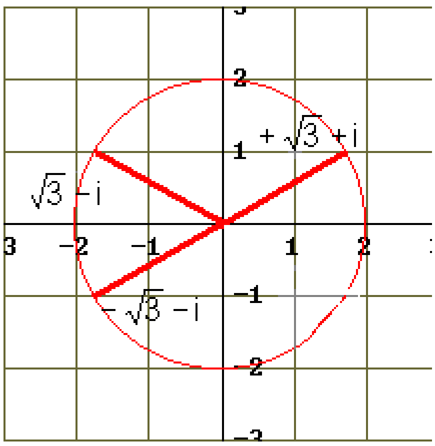
Conjugado = $\sqrt{3}-i=2_{360^\circ-30^\circ}=2_{330^\circ}$



d) $-\sqrt{3}-i \left\{ \begin{array}{c} r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\text{arc tg}\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}=210^\circ,\text{ ya que }180^\circ<\alpha<270^\circ \end{array} \right\} = 2_{210^\circ}$

Opuesto = $\sqrt{3}i=2_{210^\circ+180^\circ}=2_{390^\circ}=2_{360^\circ+30^\circ}=2_{30^\circ}$

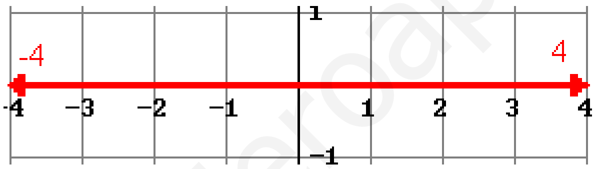
Conjugado = $-\sqrt{3}+i=2_{360^\circ-210^\circ}=2_{150^\circ}$



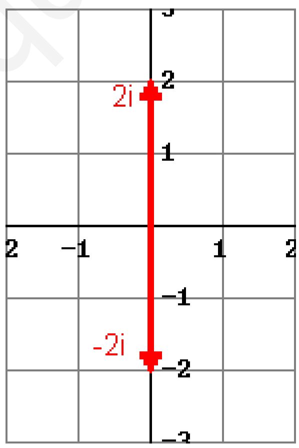
e) $-4\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha=\text{arc tg}\dfrac{0}{-4}=180^{o} \end{array}\right\}=4_{180^{o}}$

Opuesto = $4 = 4_{0^{o}}$

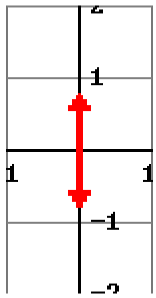
Conjugado = $-4 = 4_{180^{o}}$



f) $2i = 2_{90^{o}}$, Opuesto : $-2i = 2_{270^{o}}$; Conjugado : $-2i = 2_{270^{o}}$



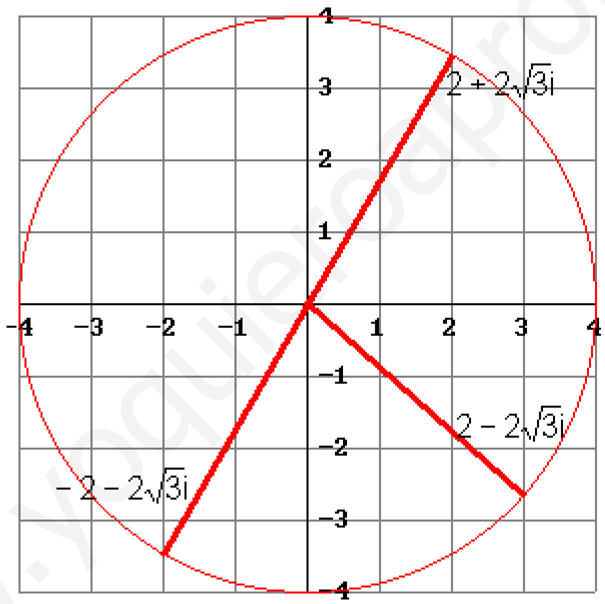
g) $(-3/4)\, i = (3/4)_{270^{o}}$, opuesto : $(3/4)_{90^{o}}$, conjugado: $(3/4)_{90^{o}}$.



h) $2+2\sqrt{3}i \left\{ \begin{array}{l} r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha = \text{arc tg}\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\text{arctg}\sqrt{3}=60^o\text{, ya que } 0^o<\alpha<90^o \end{array} \right\} = 4_{60^o}$

Opuesto = $-2-2\sqrt{3}i = 4_{60^o+180^o} = 4_{240^o}$

Conjugado = $2-2\sqrt{3}i = 4_{360^o-60^o} = 4_{300^o}$



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❺ **Escribe en forma binómica los números :**

a) $2_{45^o} = 2\,(\cos 45^o + i \text{ sen } 45^o) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

b) $3_{\frac{\pi}{6}} = 3(\cos 30^o + i\text{sen}30^o) = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180^o} = \sqrt{2}(\cos 180^o + i\text{sen}180^o) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0^o} = 17\ (\cos 0^o + i \text{ sen } 0^o) = 17$.

e) $1_{\pi/2} = \cos 90^o + i \text{ sen } 90^o = i$.

f) $5_{270^o} = 5\ (\cos 270^o + i\text{sen}270^o) = -5i$.

g) $1_{150^o} = \cos 150^o + i\text{sen}150^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

h) $4_{100^o} = 4(\cos 100^o + i\text{sen}100^o) = 4(-0'1736+0'9848\ i) = -0'6946+3'9392i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❻ Calcula en forma polar :

a) $(-1-i)^5$, pasamos el número $-1-i$ a forma polar :

$$-1-i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg}\frac{-1}{-1} = 225^o, \text{ ya que } 180^o < \alpha < 270^o \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}_{225^o}$$

$$(-1-i)^5 = \left(\sqrt{2}_{225^o}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5_{225^o \cdot 5} = 4\sqrt{2}_{1125^o} = 4\sqrt{2}_{360^o \cdot 3+45} = 4\sqrt{2}_{45^o}$$

b) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$, pasamos el radicando a forma polar :

$$1-\sqrt{3}i = \begin{Bmatrix} r = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha = \text{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = 300^o, \text{ ya que } 270^o < \alpha < 360^o \end{Bmatrix} = 2_{300^o}$$

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{2_{300}} = \left(\sqrt[3]{2}\right)_{\frac{300+360k}{3}} = \sqrt[3]{2}_{100^o+120k^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2}_{100^o} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2}_{220^o} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[3]{2}_{340^o} \end{cases}$$

c) $$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^o}} = \left(\sqrt[6]{64}\right)_{\frac{0+360k}{6}} = 2_{60k^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{0^o} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{60^o} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{120^o} \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 2_{180^o} \\ k=4 \Rightarrow z_5 = 2_{240^o} \\ k=5 \Rightarrow z_6 = 2_{300^o} \end{cases}$$

d) $$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^o}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{90+360k}{3}} = 2_{30^o+120k^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{30^o} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{150^o} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{270^o} \end{cases}$$

e) $\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^6$, pasamos la base a forma polar :

$$\left(-2\sqrt{3}+2i\right)=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{2}{-2\sqrt{3}}=\text{arctg}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=150^o,\text{ ya que } 90^o<\alpha<180^o \end{array}\right\}=4_{150^o}$$

$$\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^6=\left(4_{150^o}\right)^6=4^6_{150\cdot 6}=4096_{900^o}=4096_{2\cdot 360^o+180^o}=4096_{180^o}$$

f) $(3-4i)^3$, pasamos la base a forma polar :

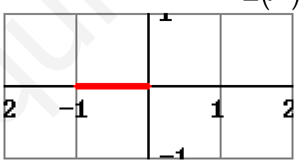
$$3-4i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{-4}{3}=306^o52',\text{ ya que } 270^o<\alpha<360^o \end{array}\right\}=5_{306^o52'}$$

$$(3-4i)^3=\left(5_{306^o\,52'}\right)^3=\left(5^3\right)_{306^o\,52'\cdot 3}=125_{920^o\,36'}=125_{200^o\,36'}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

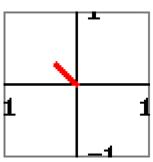
❶❼ **Calcula y representa gráficamente el resultado**:

a) $$\frac{i^7-i^{-7}}{2i}=\frac{i^7-\frac{1}{i^7}}{2i}=\frac{\frac{i^{14}-1}{i^7}}{2i}=\frac{i^{14}-1}{2i^8}=\frac{i^{4\cdot 3+2}-1}{2i^{4\cdot 2}}=\frac{\left(i^4\right)^3\cdot i^2-1}{2\left(i^4\right)^2}=\frac{1^3\cdot(-1)-1}{2\cdot 1^2}=\frac{-2}{2}=-1$$



b) $$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3=\left\{\begin{array}{l} 1-i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{-1}{1}=315^o \end{array}\right]=\sqrt{2}_{315^o} \\ \sqrt{3}+i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=30^o \end{array}\right]=2_{30^o} \end{array}\right\}=\left(\frac{\sqrt{2}_{315^o}}{2_{30^o}}\right)^3=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{315^o-30^o}\right)^3=$$

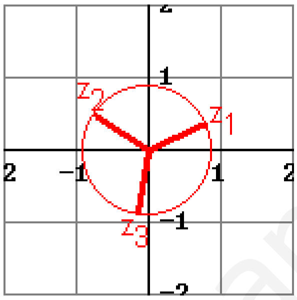
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3_{285\cdot 3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855^o}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{360^o\cdot 2+135^o}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135^o}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos 135^o+i\,\text{sen}135^o)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$



c)

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}=\left\{\begin{array}{l} 1+i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}1=45^o \end{array}\right]=\sqrt{2}_{\,45^o} \\ 2-i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5} \\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{-1}{2}=333^o26'5'' \end{array}\right]=\sqrt{5}_{\,333^o26'5''} \end{array}\right\}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}_{\,45^o}}{\sqrt{5}_{\,333^o26'5''}}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)_{45-333^o26'5''}}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2}{5}}}_{\,71^o33'54''}$$

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{\,\frac{71^o33'54''+360k}{3}}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{\,23^o51'18''+120k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{\,23^o51'18''}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}(\cos 23^o51'18''+i\operatorname{sen}23^o51'18'')=0'7851+0'3468i \\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{\,143^o51'18''}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}(\cos 143^o51'18''+i\operatorname{sen}143^o51'18'')=-0'69+0'51i \\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{\,263^o51'18''}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}(\cos 263^o51'18''+i\operatorname{sen}263^o51'18'')=-0'09-0'85i \end{array}\right.$$

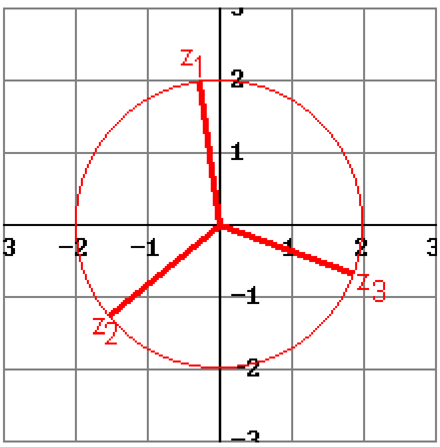


❶❽ **Calcula y representa las soluciones :**

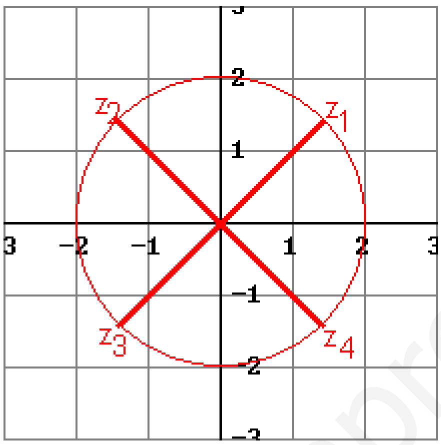
a)

$$\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}=\left\{4-4\sqrt{3}i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{4^2+\left(-4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{64}=8 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{-4\sqrt{3}}{4}=\operatorname{arctg}-\sqrt{3}=300^o \end{array}\right]=8_{300^o}\right\}=\sqrt[3]{8_{300^o}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{300+360k}{3}}=2_{100+120k}$$

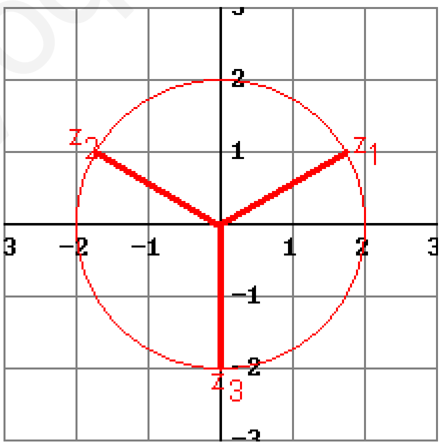
$$2_{100^o+120k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=2_{100^o}=2(\cos 100^o+i\operatorname{sen}100^o)=-0'347+1'97i \\ k=1\Rightarrow z_2=2_{220^o}=2(\cos 220^o+i\operatorname{sen}220^o)=-1'53-1'29i \\ k=2\Rightarrow z_3=2_{340^o}=2(\cos 340^o+i\operatorname{sen}340^o)=1'879-0'68i \end{array}\right.$$



b) $\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16_{180^o}}=\left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{180+360k}{4}}=2_{45^o+90k^o}=\begin{cases} k=0\Rightarrow z_1=2_{45^o}=2(\cos 45^o+i\operatorname{sen}45^o)=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ k=1\Rightarrow z_2=2_{135^o}=2(\cos 135^o+i\operatorname{sen}135^o)=2\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ k=2\Rightarrow z_3=2_{225^o}=2(\cos 225^o+i\operatorname{sen}225^o)=2\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2} \\ k=3\Rightarrow z_4=2_{315^o}=2(\cos 315^o+i\operatorname{sen}315^o)=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2} \end{cases}$



c) $\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{8_{90^o}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{90+360k}{3}}=2_{30^o+120k^o}=\begin{cases} k=0\Rightarrow z_1=2_{30^o}=2(\cos 30^o+i\operatorname{sen}30^o)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i \\ k=1\Rightarrow z_2=2_{150^o}=2(\cos 150^o+i\operatorname{sen}150^o)=2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i \\ k=2\Rightarrow z_3=2_{270^o}=2(\cos 270^o+i\operatorname{sen}270^o)=2(-i)=-2i \end{cases}$



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❶❾ Calcula pasando a forma polar :

a) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5$, pasamos primero la base a forma polar:

$$1+i\sqrt{3}=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\text{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{1}=60^{o} \end{array}\right\}=2_{60^{o}}$$, y ahora hallamos la potencia:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^5=\left(2_{60^o}\right)^5=\left(2^5\right)_{60^o\cdot 5}=32_{300^o}=32(\cos 300^o+i\,\text{sen}300^o)=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}\,i$$

b) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt{3}-i\right)$, pasamos a forma polar ambos números :

$$-1-i\sqrt{3}=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=240^o,\ \text{ya que}\ 180^o<\alpha<270^o \end{array}\right\}=2_{240^o}$$

$$\sqrt{3}-i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=330^o,\ \text{ya que}\ 270^o<\alpha<360^o \end{array}\right\}=2_{330^o}$$

Ahora realizamos las operaciones en polares :

$$\left(-1-i\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt{3}-i\right)=\left(2_{240^o}\right)^6\left(2_{330^o}\right)=\left(2^6{}_{240^o\cdot 6}\right)\left(2_{330^o}\right)=\left(64_{1440^o}\right)\left(2_{330^o}\right)=(64\cdot 2)_{1440^o+330^o}=128_{1770^o}=128_{330^o}$$

Y pasando a forma binómica :

$$128_{330^o}=128(\cos 330^o+i\,\text{sen}330^o)=128\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=64\sqrt{3}-64i$$

c) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$, pasmos el radican do a forma polar :

$$-2+2\sqrt{3}i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha=\text{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}=\text{arctg}-\sqrt{3}=120^o,\ \text{ya que}\ 90^o<\alpha<180^o \end{array}\right\}=4_{120^o}$$

y ahora hallamos las raíces :

$$\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}=\sqrt[4]{4_{120^o}}=\left(\sqrt[4]{4}\right)_{\frac{120+360k}{4}}=\sqrt{2}_{30^o+90k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\sqrt{2}_{30^o}=\sqrt{2}(\cos 30^o+i\,\text{sen}30^o)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt{2}_{120^o}=\sqrt{2}(\cos 120^o+i\,\text{sen}120^o)=\sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i \\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt{2}_{210^o}=\sqrt{2}(\cos 210^o+i\,\text{sen}210^o)=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ k=3\Rightarrow z_4=\sqrt{2}_{300^o}=\sqrt{2}(\cos 300^o+i\,\text{sen}300^o)=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i \end{array}\right.$$

d) $$\frac{8}{(1-i)^5} = \left\{ \begin{array}{c} 8 = 8_{0^o} \\ 1-i = \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{-1}{1} = 315^o, \text{ ya que } 270^o < \alpha < 360^o \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{315^o} \end{array} \right\} = \frac{8_{0^o}}{(\sqrt{2}_{315^o})^5}$$

$$\frac{8_{0^o}}{\left(\sqrt{2}_{315^o}\right)^5} = \frac{8_{0^o}}{\sqrt{2^5}_{315^o \cdot 5}} = \frac{8_{0^o}}{4\sqrt{2}_{1575^o}} = \frac{8_{0^o}}{4\sqrt{2}_{360^o \cdot 4+135^o}} = \frac{8_{0^o}}{4\sqrt{2}_{135^o}} = \left(\frac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135^o} = \sqrt{2}_{225^o} = \sqrt{2}(\cos 225^o + i\,\text{sen}\,225^o) = -1-i$$

e)

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^o}} = \left(\sqrt[6]{64}\right)_{\frac{180+360k}{6}} = 2_{30^o+60k^o} = \left\{ \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{30^o} = 2(\cos 30^o + i\,\text{sen}\,30^o) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right) = \sqrt{3}+i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{90^o} = 2(\cos 90^o + i\,\text{sen}\,90^o) = 2(i) = 2i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{150^o} = 2(\cos 150^o + i\,\text{sen}\,150^o) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}+i \\ k=3 \Rightarrow z_4 = 2_{210^o} = 2(\cos 210^o + i\,\text{sen}\,210^o) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}-i \\ k=4 \Rightarrow z_5 = 2_{270^o} = 2(\cos 270^o + i\,\text{sen}\,270^o) = 2(-i) = -2i \\ k=5 \Rightarrow z_6 = 2_{330^o} = 2(\cos 330^o + i\,\text{sen}\,330^o) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right) = \sqrt{3}-i \end{array} \right.$$

f) $\sqrt{-1-i}$, pasamos el radicando a forma polar :

$$-1-i = \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{-1}{-1} = 225^o, \text{ ya que } 180^o < \alpha < 270^o \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{225^o}$$

$$\sqrt{-1-i} = \sqrt{\sqrt{2}_{225^o}} = \sqrt[4]{2}_{\frac{225+360k}{2}} = \sqrt[4]{2}_{112'5^o+180k^o} = \left\{ \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow \sqrt[4]{2}_{112'5^o} = \sqrt[4]{2}(\cos 112'5^o + i\,\text{sen}\,112'5^o) = -0'46+1'1i \\ k=1 \Rightarrow \sqrt[4]{2}_{292'5^o} = \sqrt[4]{2}(\cos 292'5^o + i\,\text{sen}\,292'5^o) = 0'46-1'1i \end{array} \right\}$$

g) $$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^o}} = \left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{270+360k}{3}} = 1_{90^o+120k^o} = \left\{ \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow z_1 = 1_{90^o} = \cos 90^o + i\,\text{sen}\,90^o = i \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 1_{210^o} = \cos 210^o + i\,\text{sen}\,210^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 1_{330^o} = \cos 330^o + i\,\text{sen}\,330^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \end{array} \right\}$$

h) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}$, antes de realizar la división, pasamos los números a forma polar, después realizamos la división y por último hallamos las dos raíces :

$$\left.\begin{array}{l} 2-2i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{-2}{2}=315^o\text{, ya que } 270^o<\alpha<360^o \end{array}\right\}=2\sqrt{2}_{315^o} \\ -3+3i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{-3}=135^o\text{, ya que } 90^o<\alpha<180^o \end{array}\right\}=3\sqrt{2}_{135^o} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}_{315^o}}{3\sqrt{2}_{135^o}}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)_{315-135}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)_{180^o}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)_{180^o}}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{\frac{180+360k}{2}}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^o+180k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^o}=\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos 90^o+i\operatorname{sen}90^o)=\sqrt{\frac{2}{3}}i \\ k=1\Rightarrow z_1=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{270^o}=\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos 270^o+i\operatorname{sen}270^o)=-\sqrt{\frac{2}{3}}i \end{array}\right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷⓿ Calcula *m* para que el número complejo 3 – *mi* tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$

---oo0oo---

⌖ Hallamos los módulos de ambos números complejos:

$$\left\{\begin{array}{c} 3-mi\rightarrow r=\sqrt{3^2+(-m)^2}=\sqrt{9+m^2} \\ 2\sqrt{5}+\sqrt{5}i\rightarrow r=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{4\cdot 5+5}=\sqrt{25}=5 \end{array}\right\}$$

⌖ Ahora igualamos ambos módulos y resolvemos la ecuación:

$$\sqrt{9+m^2}=5\Rightarrow\left(\sqrt{9+m^2}\right)^2=5^2\Rightarrow 9+m^2=25\Rightarrow m^2=16\Rightarrow m=\pm\sqrt{16}=\pm 4$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❶ Expresa en forma polar z, su opuesto –z, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:

El opuesto se diferencia en 180º del original y para el conjugado hay que restar a 360º el argumento del original. Los módulos son iguales.

a)

$$z=1-\sqrt{3}i\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha=\operatorname{arctg}-\sqrt{3}=300^o\text{, ya que } 270^o<\alpha<360^o \end{array}\right\}=2_{300^o}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} -z=2_{300^o+180^o}=2_{480^o}=2_{360^o+120^o}=2_{120^o} \\ \bar{z}=2_{360^o-300^o}=2_{60^o} \end{array}\right\}$$

b)

$$z=-2-2i\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}1=225^o\text{, ya que } 180^o<\alpha<270^o \end{array}\right\}=2\sqrt{2}_{225^o}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} -z=2\sqrt{2}_{225^o+180^o}=2\sqrt{2}_{405^o}=2\sqrt{2}_{360^o+45^o}=2\sqrt{2}_{45^o} \\ \bar{z}=2\sqrt{2}_{360^o-225^o}=2\sqrt{2}_{135^o} \end{array}\right\}$$

c)

$$z=-2\sqrt{3}+2i \Rightarrow i \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4 \\ \alpha=\text{arctg}\,\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=150^o\text{, ya que } 90^o<\alpha<180^o \end{array}\right\}=4_{150^o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -z=4_{150^o+180^o}=4_{330^o} \\ \bar{z}=4_{360^o-150^o}=4_{210^o} \end{array}\right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❷ **Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:**

a) $$\sqrt[5]{i}=\sqrt[5]{1_{90^o}}=\left(\sqrt[5]{1}\right)_{\frac{90+360k}{5}}=1_{18^o+72k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0 \Rightarrow z_1=1_{18^o} \\ k=1 \Rightarrow z_2=1_{90^o} \\ k=2 \Rightarrow z_3=1_{162^o} \\ k=3 \Rightarrow z_4=1_{234^o} \\ k=4 \Rightarrow z_5=1_{306^o} \end{array}\right\}$$

b) $$\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{1_{180^o}}=\left(\sqrt[6]{1}\right)_{\frac{180^o+360k^o}{6}}=1_{30^o+60k^o}=\left\{\begin{array}{l} k=0 \Rightarrow z_1=1_{30^o} \\ k=1 \Rightarrow z_2=1_{90^o} \\ k=2 \Rightarrow z_3=1_{150^o} \\ k=3 \Rightarrow z_4=1_{210^o} \\ k=4 \Rightarrow z_5=1_{270^o} \\ k=5 \Rightarrow z_6=1_{330^o} \end{array}\right\}$$

c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$, pasemos el radicando a forma polar :

$$2\sqrt{3}+2i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{16}= \\ \alpha=\text{arctg}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}=30^o \end{array}\right\}=4_{30^o}$$

Y ahora hallamos las raíces :

$$\sqrt[4]{4_{30^o}} = \left(\sqrt[4]{4}\right)_{\frac{30^o+360k^o}{4}} = \sqrt{2}_{7'5^o+90^o} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{7^o30'} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}_{97^o30'} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = \sqrt{2}_{187^o30'} \\ k=3 \Rightarrow z_4 = \sqrt{2}_{277^o30'} \end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

PARA RESOLVER (📖 ❶❹❼)

❷❸ Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos (π/3) , y la suma de sus módulos 8.

---oo0oo---

Sean los dos números complejos a hallar : r_α y s_β, tenemos cuatro incógnitas (los dos módulos y los dos argumentos) necesitamos al menos cuatro ecuaciones :

Cociente = 3, $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} = 3 = 3_{0^o} \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{s} = 3 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$, dos ecuaciones.

Suma de sus argumentos = $\alpha + \beta = \pi/3 = 60^o$.

Suma de sus módulos = $r + s = 8$.

Resolvemos los dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas :

$$\begin{cases} \frac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{cases} \Rightarrow r = 3s;\ 3s + s = 8 \Rightarrow s = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow r = 3\cdot 2 = 6$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 60^o \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow 2\alpha = 60^o \Rightarrow \alpha = \beta = 30^o$$

Los números pedidos son $r_\alpha = 6_{30^o}$ y $s_\beta = 2_{30^o}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❹ El producto de dos números complejos es *2i* y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/2. Hállalos.

---oo0oo---

Sean los dos números complejos a hallar : r_α y s_β:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r\cdot s)_{\alpha+\beta} = 2i = 2_{90^o} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} r\cdot s = 2 \\ \alpha+\beta = 90^o \end{array} \right\}$$

$$\frac{r_\alpha^3}{s_\beta} = \frac{r_{3\alpha}^3}{s_\beta} = \left(\frac{r^3}{s}\right)_{3\alpha-\beta} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0^o} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{r^3}{s} = \frac{1}{2} \\ 3\alpha-\beta = 0^o \end{array} \right\}$$

Resolvemos los dos sistemas :

$$\left\{ \begin{array}{l} r\cdot s = 2 \\ \frac{r^3}{s} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{2}{s} \text{ y sustituyendo en la } 2^a \ \frac{\frac{2^3}{s^3}}{s} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2^4}{s^4} = 1 \Rightarrow s = 2 \text{ y } r = \frac{2}{s} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha+\beta = 90^o \\ 3\alpha-\beta = 0^o \end{array} \right\} \Rightarrow 4\alpha = 90^o \Rightarrow \alpha = 90^o/4 = 22^o30'; \beta = 90^o - 22'5^o = 67^o30'$$

Los números complejos buscados son : $r_\alpha = 1_{22^o\,30'}$, $s_\beta = 2_{67^o\,30'}$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❺El producto de dos números complejos es –8 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Calcúlalos.

---oo0oo---

Sean los dos números complejos a hallar : $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = s_\beta$, se ha de cumplir que $z_1 \cdot z_2 = (r_\alpha) \cdot (s_\beta) = -8 = 8_{180^o}$ y $z_1 = z_2^2$, planteamos los sistemas :

$$(r_\alpha)\cdot(s_\beta) = -8 \Rightarrow r\cdot s_{\alpha+\beta} = 8_{180^o} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} r\cdot s = 8 \\ \alpha+\beta = 180^o \end{array} \right\} \text{ además } (r_\alpha) = (s_\beta)^2 = (s^2)_{2\beta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} r = s^2 \\ \alpha = 2\beta \end{array} \right\}$$

Luego resolviendo los sistemas :

$$\left. \begin{array}{r} r\cdot s = 8 \\ r = s^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s^2 \cdot s = s^3 = 8 \Rightarrow s = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2; r = 2^2 = 4$$

$$\left. \begin{array}{r} \alpha+\beta = 180^o \\ \alpha = 2\beta \end{array} \right\} \Rightarrow 2\beta+\beta = 3\beta = 180^o \Rightarrow \beta = \frac{180^o}{3} = 60^o \text{ y } \alpha = 2\cdot 60^o = 120^o$$

Los números complejos buscados son : $r_\alpha = 4_{120^o}$, $s_\beta = 2_{60^o}$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❻ De dos números complejos sabemos que:
• Tienen el mismo módulo.
• Sus argumentos suman 17 π /6.
• El primero es conjugado del cuadrado del segundo.
¿Cuáles son esos números?

---oo0oo---

Sean los dos números complejos a hallar : $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = s_\beta$, se nos dice :

♦ r = s, mismo módulo

♦ $\alpha + \beta = 17\pi/6$, ya que los argumentos suman esa cantidad.

♦ $r = s^2$ y $\alpha = 360º - 2\beta$ ya que el primero es conjugado del cuadrado del segundo

Los sistemas a resolver son ahora :

$$\left.\begin{array}{l} r = s \\ r = s^2 \end{array}\right\} \Rightarrow s^2 = s \Rightarrow s^2 - s = 0 \Rightarrow s(s-1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s = 0 \text{ No válida} \\ s - 1 = 0 \Rightarrow s = 1 = r \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 510º \\ \alpha = 360º - 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow 360º - 2\beta + \beta = 510º \Rightarrow -\beta = 510º - 360º = 150º \Rightarrow \beta = -150º = 360º - 150º = 210º, \alpha = 300º$$

Los números complejos buscados son : $r_\alpha = 1_{300º}$, $s_\beta = 1_{210º}$.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❼ Calcula cos 75º y sen 75º mediante el producto $1_{30º} \cdot 1_{45º}$.

---oo0oo---

Por un lado $1_{30º} \cdot 1_{45º} = 1_{30º+45º} = 1_{75º} = \cos 75º + i\,\mathrm{sen}\,75º$

Por otro : $1_{30º} \cdot 1_{45º} = (\cos 30º + i\,\mathrm{sen}\,30º)(\cos 45º + i\,\mathrm{sen}\,45º) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{4}i + \dfrac{\sqrt{2}}{4}i + \dfrac{\sqrt{2}}{4}i^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)i$, igualando en ambas expresiones las partes real e imaginaria obtenemos :

$$\cos 75º = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ y } \mathrm{sen}\,75º = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❽ **Halla las razones trigonométricas de 15º conociendo las de 45º y las de 30º mediante el cociente $1_{45^o} : 1_{30^o}$.**

---oo0oo---

Ejercicio análogo al anterior, en el hallamos por un lado el cociente el forma polar:

$$1_{45^o} : 1_{30^o} = 1_{45^o-30^o} = 1_{15^o} = \cos 15^o + i\,\text{sen}15^o$$

y del otro el cociente en forma binómica :

$$\frac{1_{45^o}}{1_{30^o}} = \frac{\cos 45^o + i\,\text{sen}45^o}{\cos 30^o + i\,\text{sen}30^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+i)\big/2}{\sqrt{3}+i\big/2} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

e igualando ambas expresiones:

$$\cos 15^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ y } \text{sen}15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Obsérvese que al ser 15º y 75º ángulos complementarios : cos75º = sen15º y sen75º = cos15º.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❷❾ **¿Para qué valores de *x* es imaginario puro el cociente $\frac{x+2+xi}{x+i}$.?**

---oo0oo---

Hagamos el cociente :

$$\frac{(x+2)+xi}{x+i} = \frac{((x+2)+xi)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{(x+2)x-(x+2)i+x^2i+x}{x^2+1} = \frac{x^2+3x}{x^2+1} + \frac{x^2-x-2}{x^2+1}i$$

Para que el cociente anterior sea imaginario puro, la parte real ha de ser nula :

$$\frac{x^2+3x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2+3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{Bmatrix}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸⓿ **Halla, en función de x, el módulo de *z* = $\frac{1+xi}{1-xi}$. Demuestra que |z| = 1 para cualquier valor de *x*.**

---oo0oo---

$$|z|=\frac{|1+xi|}{|1-xi|}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(-x)^2}}=1$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❶ Calcula x para que el número complejo que obtenemos al dividir $\frac{x+2i}{4-3i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.

---oo0oo---

Hagamos la división e igualemos la parte real a la imaginaria :

$$\frac{x+2i}{4-3i}=\frac{(x+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{4x+6i^2+3xi+8i}{4^2-3^2i^2}=\frac{4x-6+(3x+8)i}{16+9}=\frac{4x-6}{25}+\frac{3x+8}{25}i$$

$$\frac{4x-6}{25}=\frac{3x+8}{25}\Rightarrow 4x-6=3x+8\Rightarrow 4x-3x=8+6\Rightarrow x=14$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❷ La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?

---oo0oo---

Sean los números z = a + bi y su conjugado $\bar{z}$ = a – bi, según el enunciado :

a + bi + a – bi = 2a = 8 ⇨ a = 8/2 = 4

Además :

$$|z|+|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{a^2+b^2}=10\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=5;\sqrt{4^2+b^2}=5\Rightarrow 16+b^2=25$$

$$b^2=25-16=9\Rightarrow b=\pm\sqrt{9}=\pm 3,\text{ por tanto } z=a+bi=4+3i \text{ y } \bar{z}=4-3i$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❸ La suma de dos números complejos es 3 + i. La parte real del primero es 2, y el cociente de este entre el segundo es un número real. Hállalos.

---oo0oo---

Sean z = a + bi y s = c + di, según el enunciado :

z + s = a + bi + c + di = (a+c) + (b+d)i = 3 + i , a = 2, como a + c = 3, 2 + c = 3, c = 1

$$\frac{z}{s}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+bci-adi}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\in\Re\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b+d=1\\ b-2d=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}d=\frac{1}{3}\\ b=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Luego **z = 2 + (2/3)i** y **s = 1 + (1/3) i**

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❹ Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo formado al unir esos tres puntos.

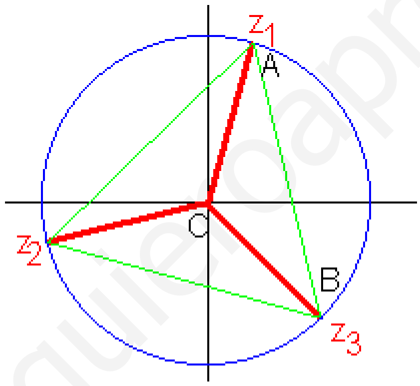
---oo0oo---

Para hallar las raíces primero pasamos el número a forma polar :

$$-2-2i=\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-2}{-2}=225^{o}\ \text{pues}\ 180^{o}<\alpha<270^{o} \end{array}\right\}=2\sqrt{2}_{\,225^{o}}$$

Y ahora hallamos la raíz :

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}_{\,225^{o}}}=\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right)_{\frac{225^{o}+360k^{o}}{3}}=\left(\sqrt[6]{2^3}\right)_{75^{o}+120k^{o}}=\left\{\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=\sqrt{2}_{\,75^{o}} \\ k=1\Rightarrow z_2=\sqrt{2}_{\,195^{o}} \\ k=2\Rightarrow z_3=\sqrt{2}_{\,315^{o}} \end{array}\right.$$



Para hallar la longitud de los lados aplicamos el teorema del coseno al triángulo AOB, de Características :

$$\text{Lados}\ \overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{2}\ \text{y el ángulo comprendido}\ \alpha=120^{o}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\alpha}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos 120^{o}}=\sqrt{2+2-4\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{6}$$

❸❺ Los afijos de las raíces cúbicas de 8i son los vértices de un triángulo equilátero. Compruébalo. ¿Determinan el mismo triángulo los afijos de $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt[3]{8}$ o $\sqrt[3]{-8}$?

Representa gráficamente esos cuatro triángulos que has obtenido.

---oo0oo---

Hallemos las cuatro raíces cúbicas :

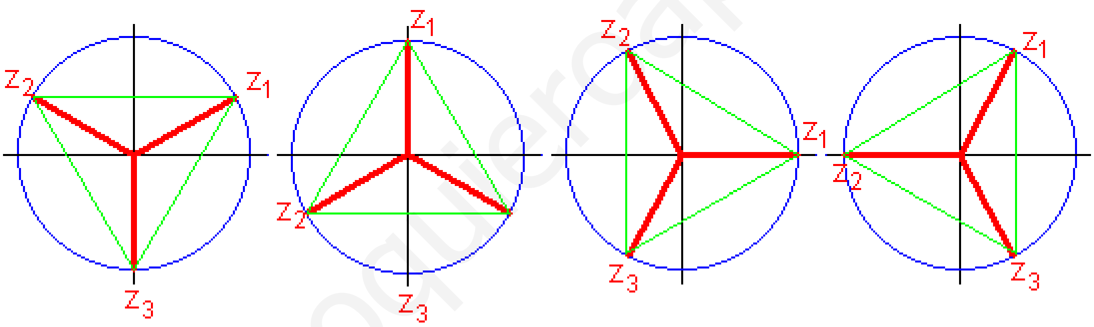
$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{90+360k}{3}} = 2_{30^\circ+120k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{30^\circ} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{150^\circ} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{270^\circ} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270^\circ}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{270+360k}{3}} = 2_{90^\circ+120k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{90^\circ} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{210^\circ} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{330^\circ} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0^\circ}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{0+360k}{3}} = 2_{120k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{0^\circ} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{120^\circ} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{240^\circ} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{180+360k}{3}} = 2_{60^\circ+120k^\circ} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{60^\circ} \\ k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{180^\circ} \\ k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{300^\circ} \end{cases}$$

Observamos que en los cuatro casos, las tres raíces tienen el mismo módulo y están separadas ángulos de 120º luego formarán triángulos equiláteros :



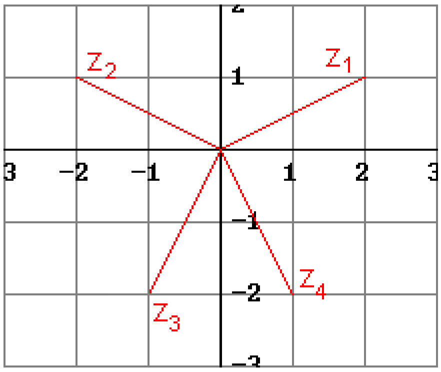
$\sqrt[3]{8i}$ $\sqrt[3]{-8i}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[3]{-8}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❻ ¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.

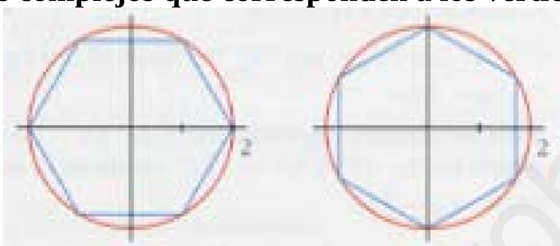
---oo0oo---

Como son cuatro serían raíces cuartas y para que sean raíces cuartas de un número han de estar separadas ángulos de 360º/4 = 90º , la forma más rápida de comprobarlo es representándolos y vemos que no forman ángulos de 90º (si cupiera alguna duda, lo adecuado sería hallar los módulos, que sí son iguales y los argumentos de los cuatro números y comprobar que los ángulos no se diferencian en 90º, lo que, en este caso no es necesario pues es evidente en el dibujo) :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❸❼ Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos hexágonos:



---oo0oo---

① Tomamos un número que sea evidente y vamos sumando 360º/6 = 60º que es el ángulo que forman :

$$\begin{cases} z_1 = 2_{0^o} = 2(\cos 0^o + i\operatorname{sen} 0^o) = 2 \\ z_2 = 2_{0^o+60^o} = 2_{60^o} = 2(\cos 60^o + i\operatorname{sen} 60^o) = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i \\ z_3 = 2_{60^o+60^o} = 2_{120^o} = 2(\cos 120^o + i\operatorname{sen} 120^o) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3} \\ z_4 = 2_{120^o+60^o} = 2_{180^o} = 2(\cos 180^o + i\operatorname{sen} 180^o) = 2(-1 + 0i) = -2 \\ z_5 = 2_{180^o+60^o} = 2_{240^o} = 2(\cos 240^o + i\operatorname{sen} 240^o) = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3} \\ z_6 = 2_{240^o+60^o} = 2_{300^o} = 2(\cos 300^o + i\operatorname{sen} 300^o) = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

② Tomamos el número que coincide con la parte positiva del eje vertical, que es el 2º número y vale 2_{90^o} :

$$\begin{cases} z_2 = 2_{90^o} = 2(\cos 90^o + i\operatorname{sen} 90^o) = 2(0 + i) = 2i \\ z_1 = 2_{90^o-60^o} = 2_{30^o} = 2(\cos 30^o + i\operatorname{sen} 30^o) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i \\ z_3 = 2_{90^o+60^o} = 2_{150^o} = 2(\cos 150^o + i\operatorname{sen} 150^o) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \\ z_4 = 2_{150^o+60^o} = 2_{210^o} = 2(\cos 210^o + i\operatorname{sen} 210^o) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} - i \\ z_5 = 2_{210^o+60^o} = 2_{270^o} = 2(\cos 270^o + i\operatorname{sen} 270^o) = 2(0 - i) = -2i \\ z_6 = 2_{270^o+60^o} = 2_{330^o} = 2(\cos 330^o + i\operatorname{sen} 330^o) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

38 ¿Pueden ser las raíces de un número complejo z, los números $2_{28^{\circ}}$, $2_{100^{\circ}}$, $2_{172^{\circ}}$, $2_{244^{\circ}}$ y $2_{316^{\circ}}$?

---oo0oo---

Tienen igual módulo, luego sólo hay que comprobar que difieren en 72º :
28° + 72° = 100°; 100° + 72° = 172° ;172° + 72° = 244°; 244° + 72° = 316°
Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28^{\circ}})^5 = 32_{140^{\circ}}$$

39 El complejo $3_{40^{\circ}}$ es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

---oo0oo---

Al formar un pentágono regular, el resto de los vértices se obtienen multiplicando el anterior por $1_{72^{\circ}}$ o lo que es lo mismo, sumando 72º al argumento del anterior :

$$z_1 = 3_{40^{\circ}},\ z_2 = 3_{40^{\circ}+72} = 3_{112^{\circ}},\ z_3 = 3_{112^{\circ}+72} = 3_{184^{\circ}},\ z_4 = 3_{184^{\circ}+72} = 3_{256^{\circ}},\ z_5 = 3_{256^{\circ}+72} = 3_{328^{\circ}}$$

Como son raíces quintas de un cierto número complejo, para hallarlo elevamos uno de ellos a la quinta potencia :

$$z = (z_1)^5 = (3_{40^{\circ}})^5 = (3^5)_{40^{\circ}\cdot 5} = 243_{200^{\circ}}$$

40 Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es 1 + i. Halla z y las otras raíces cúbicas.

---oo0oo---

Hallemos z :

$$\sqrt[3]{z} = 1+i \Rightarrow z = (1+i)^3 = 1^3 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$$

Para hallar las otras dos raíces, podemos hallar las raíces o pasar la conocida a forma polar y sumar 360º/3 =120º :

$$1+i = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \mathrm{rctg}1 = 45^{\circ} \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{45^{\circ}} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}_{45^{\circ}+120^{\circ}} = \sqrt{2}_{165^{\circ}};\ z_3 = \sqrt{2}_{165^{\circ}+120^{\circ}} = \sqrt{2}_{285^{\circ}}$$

Ecuaciones en C

41 Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $x^2 + 4 = 0$
b) $x^2 + x + 4 = 0$
b) $x^2 + 3x + 7 = 0$
d) $x^2 - x + 1 = 0$

---oo0oo---

a) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$

b) $x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4{\cdot}4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2} = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{2} i$

c) $x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4{\cdot}7}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{19}}{2} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{19}}{2} i$

d) $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

❹❷ Resuelve las ecuaciones:

a) $x^5 + 32 = 0$
b) $ix^3 - 27 = 0$

---oo0oo---

a) $x^5 + 32 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^o}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)_{\frac{180+360k}{5}} = 2_{36^o+72k^o} = \begin{cases} k = 0, x_1 = 2_{36^o} \\ k = 1, x_2 = 2_{108^o} \\ k = 2, x_3 = 2_{180^o} \\ k = 3, x_4 = 2_{252^o} \\ k = 4, x_5 = 2_{324^o} \end{cases}$

c) $ix^3 - 27 = 0$, multiplicando por i : $i^2x^3 - 27i = 0$, $-x^3 - 27i = 0$, $x^3 + 27i = 0$, $x^3 = -27i = 27_{270^o}$, luego hemos de hallar las raíces cúbicas de 27_{270^o} :

$$x = \sqrt[3]{27_{270^o}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{270+360k}{3}} = 3_{90^o+120k^o} = \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x_1 = 3_{90^o} = 3(\cos 90^o + i\,\mathrm{sen}\,90^o) = 3i \\ k = 1 \Rightarrow x_2 = 3_{210^o} = 3(\cos 210^o + i\,\mathrm{sen}\,210^o) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3i}{2} \\ k = 2 \Rightarrow x_3 = 3_{330^o} = 3(\cos 330^o + i\,\mathrm{sen}\,330^o) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2} i \end{cases}$$

❹❸ **Resuelve las siguientes ecuaciones en C :**

a) $z^2 + 4 = 0$
b) $z^2 - 2z + 5 = 0$
c) $2z^2 + 10 = 0$.

---oo0oo---

a) $z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm i\sqrt{4} = \pm 2i$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

c) $2z^2 + 10 = 0 \Rightarrow z^2 = -5 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\,i$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹❹ **Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:**

a) $z^4 - 1 = 0$
b) $z^4 + 16 = 0$
c) $z^4 - 8z = 0$

---oo0oo---

a) $z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0^o}} = 1_{\frac{0^o + 360k^o}{4}} = 1_{90k} = \begin{cases} k = 0 \Rightarrow z_1 = 1_{0^o} = \cos 0^o + i\,\text{sen}\,0^o = 1 \\ k = 1 \Rightarrow z_2 = 1_{90^o} = \cos 90^o + i\,\text{sen}\,90^o = i \\ k = 2 \Rightarrow z_3 = 1_{180^o} = \cos 180^o + i\,\text{sen}\,180^o = -1 \\ k = 3 \Rightarrow z_4 = 1_{270^o} = \cos 270^o + i\,\text{sen}\,270^o = -i \end{cases}$

b)

$$z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^o}} = 2_{\frac{180+360k}{4}} = 2_{45^o+90k} = \begin{cases} k = 0 \Rightarrow z_1 = 2_{45^o} = 2(\cos 45^o + i\,\text{sen}\,45^o) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ k = 1 \Rightarrow z_2 = 2_{135^o} = 2(\cos 135^o + i\,\text{sen}\,135^o) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ k = 2 \Rightarrow z_3 = 2_{225^o} = 2(\cos 225^o + i\,\text{sen}\,225^o) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ k = 3 \Rightarrow z_3 = 2_{315^o} = 2(\cos 315^o + i\,\text{sen}\,315^o) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

c) $z^4 - 8z = 0 \Rightarrow z(z^3 - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z^3 - 8 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0^o}} = 2_{120k^o} = \begin{Bmatrix} k = 0, z_2 = 2_{0^o} = 2 \\ k = 1, z_3 = 2_{120^o} = -1 + \sqrt{3}i \\ k = 2, z_4 = 2_{240^o} = -1 - \sqrt{3}i \end{Bmatrix} \end{cases}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❹❺ **Resuelve estas ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:**

a) $z^3 + 8i = 0$
b) $iz^4 + 4 = 0$

---oo0oo---

a) $z^3+8i=0 \Rightarrow z=\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8_{270^o}}=2_{\frac{270+360k}{3}}=2_{90^o+120k^o}=\begin{cases} k=0 \rightarrow z_1=2_{90^o}=2(\cos 90^o + i\,\mathrm{sen}90^o)=2i \\ k=1 \rightarrow z_2=2_{210^o}=2(\cos 210^o + i\,\mathrm{sen}210^o)=-\sqrt{3}-i \\ k=2 \rightarrow z_3=2_{330^o}=2(\cos 330^o + i\,\mathrm{sen}330^o)=\sqrt{3}-i \end{cases}$

b) $iz^4+4=0$, multiplicando por i: $-z^4+4i=0$ y cambiando de signo $z^4-4i=0$, es decir :

$$z^4=4i \Rightarrow z=\sqrt[4]{4i}=\sqrt[4]{4_{90^o}}=\left(\sqrt[4]{4}\right)_{\frac{90+360k}{4}}=\sqrt{2}_{22'5^o+90k^o}=\begin{cases} k=0 \rightarrow \sqrt{2}_{22'5^o}=\sqrt{2}(\cos 22'5^o + i\,\mathrm{sen}22'5^o)=1'3+0'54i \\ k=1 \rightarrow \sqrt{2}_{112'5^o}=\sqrt{2}(\cos 112'5^o + i\,\mathrm{sen}112'5^o)=-0'54+1'3i \\ k=2 \rightarrow \sqrt{2}_{202'5^o}=\sqrt{2}(\cos 202'5^o + i\,\mathrm{sen}202'5^o)=-1'3-0'54i \\ k=3 \rightarrow \sqrt{2}_{292'5^o}=\sqrt{2}(\cos 292'5^o + i\,\mathrm{sen}292'5^o)=0'54-1'3i \end{cases}$$

46 Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones: $z_1 = 1+i$ y $z_2 = 2-3i$

---oo0oo---

En vez de cómo propone el libro vamos a usar la forma canónica de la ecuación de 2º grado : $x^2 - \mathbf{s}x + \mathbf{p} = 0$, en donde s = suma de solucione**s** = $z_1 + z_2$ y **p** = producto de soluciones = $z_1 \cdot z_2$:

s = $z_1 + z_2$ = 1+i + 2 - 3i = 3 –2i y **p** = $z_1 \cdot z_2$ = (1 + i)(2 - 3i) = **5 – i** , luego la ecuación es :

$$x^2 - sx + p = x^2 - (3-2i)x + (5-i) = 0$$

47 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 – 3i y 2 + 3i.

---oo0oo---

Ecuación canónica : $x^2 - \mathbf{s}x + \mathbf{p} = 0$, hallemos **s** y **p** :

s = 2 – 3i + 2 + 3i = **4** y **p** = (2 – 3i) (2 + 3i) = $2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 + 9 =$ **13**

$$x^2 - sx + p = x^2 - 4x + 13 = 0$$

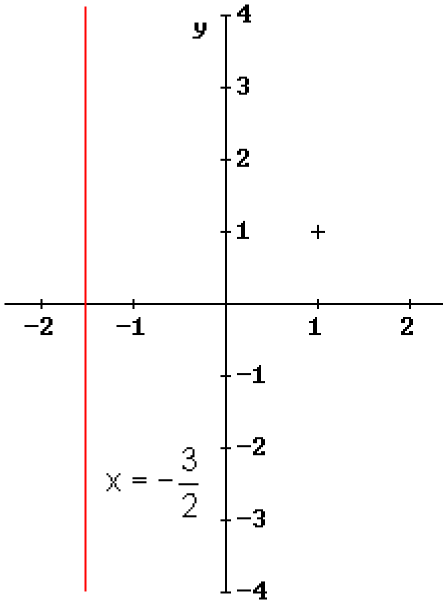
Interpretación gráfica de igualdades entre complejos

48 Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.

---oo0oo---

$$z = x + yi \ ; \ \bar{z} = x - yi \ , \text{ luego } \ z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Recta que representada es:

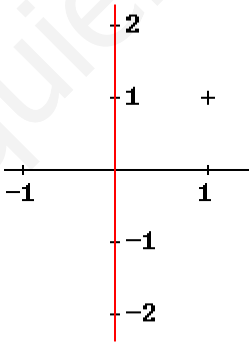


❹❾ Representa los números complejos que verifican: a) $\bar{z} = -z$ **, b)** $|z+\bar{z}| = 3$ **, c)** $|z-\bar{z}| = 4$

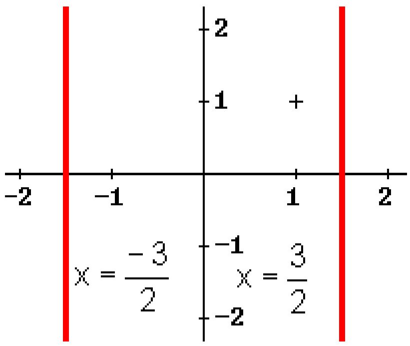
---oo0oo---

Sean z = x + yi , $\bar{z}$ = x-yi

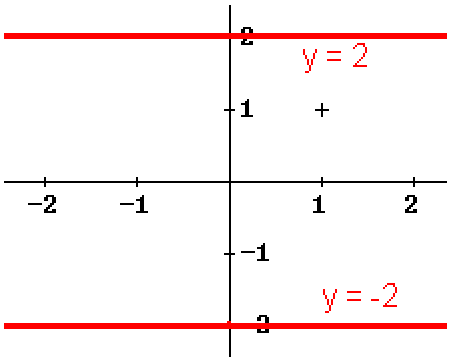
a) $\bar{z} = -z \Rightarrow x - yi = -x - yi \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, el eje vertical o de ordenadas



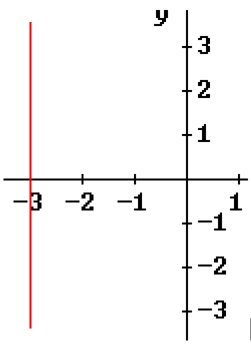
b) $|z+\bar{z}| = |x+yi+x-yi| = |2x| = 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{array} \right\}$, dos rectas verticales

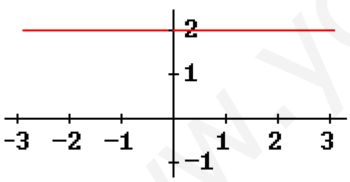


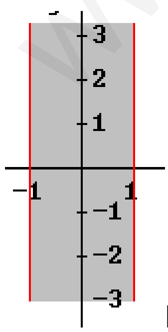
c) $|z-\bar{z}|=|x+yi-x+yi|=|2yi|=4 \Rightarrow |2y|=4 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y=2 \\ y=-2 \end{matrix}\right\}$, dos rectas horizontales.

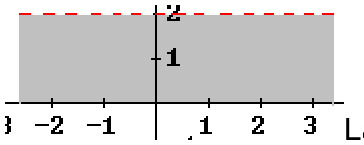


❺⓿ Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:

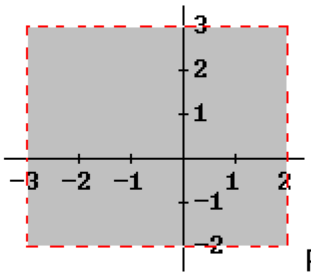
a)  La parte real del número ha de ser igual a –3 , Re(z) = - 3

b)  La parte imaginaria ha de ser igual a 2, Im(z) = 2

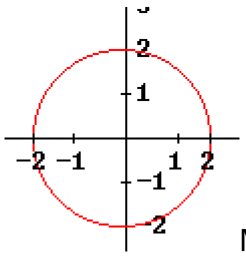
c)  La parte real comprendida entre -1 y 1, $-1 \leq Re(z) \leq 1$



d) La parte imaginaria comprendida entre 0 y 2 , $0 \le \text{Im}(z) < 2$



d) Parte imaginaria comprendida entre .2 y 3 y la parte real entre –3 y 2 : $\left\{ \begin{array}{l} -3 < \text{Re}(z) < 2 \\ -2 < \text{Im}(z) < 3 \end{array} \right\}$.



f) Módulo del número = 2, $|z| = 2$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

CUESTIONES TEÓRICAS (📖 ❶❹❾)

❺❶ ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0?

---oo0oo---

No, también son reales los números negativos cuyo argumento es 180º.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❷ Prueba que $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

---oo0oo---

Sea z = a + bi.

$$\left\{ \begin{array}{c} |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2-b^2i^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z| \end{array} \right\}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❸ **Si z = r_α , ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^o}$ y $r_{360^o-\alpha}$?**

---oo0oo---

❁ $z = r_{\alpha+180^o}$ = r [cos(α+ 180º) + i sen (α + 180º)] = r (-cosα –isenα) = -[r(cosα +isenα)] = -(r_α) = -z, luego son opuestos.

❁ $z = r_{360^o-\alpha}$ = r [cos(360º- α) + i sen (360º- α)] = r (cosα –isenα) = $\bar{z}$ luego son conjugados.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❹ **Comprueba que siendo,** z = a + bi, w = c + di , **:**

a) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w};\left\{\begin{array}{l} z+w=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i\Rightarrow\overline{z+w}=(a+c)-(b+d)i \\ \bar{z}+\bar{w}=a-bi+c-di=(a+c)-(b+d)i, \text{q.e.d.}\end{array}\right\}$

b)
$$\left\{\begin{array}{l} z\cdot w=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i\Rightarrow\overline{zw}=(ac-bd)-(ad+bc)i \\ \bar{z}\cdot\bar{w}=(a-bi)(c-di)=ac-adi-bci+bdi^2=(ac-bd)-(ad+bc)i=\overline{z\cdot w}\ \text{q.e.d.}\end{array}\right\}$$

c) $kz=k(a+bi)=ka+kbi\Rightarrow\overline{kz}=ka-kbi=k(a-bi)=k\cdot\bar{z}\ \forall k\in\Re$ q.e.d.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❺ **Demuestra que** $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$

---oo0oo---

Sea z = r_α, entonces :

$$\frac{1}{z}=\frac{1_{0^o}}{r_\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{0^o-\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}\Rightarrow\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{r}=\frac{1}{|z|}\ \text{q.e.d.}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❺❻ **El producto de dos números complejos imaginarios, ¿ puede ser real ? Acláralo con un ejemplo.**

---oo0oo---

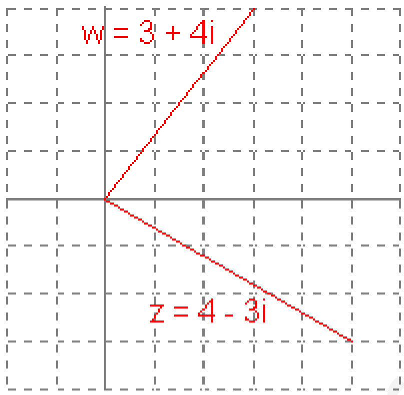
Sí, si son ambos imaginarios puros, por ejemplo z = -2i y w = 3i, su producto es z·w = (-2i)(3i)= $-6i^2$ = 6 que es real.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

57 Representa el número complejo z = 4 – 3i. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90º.

---oo0oo---

$z = 4 - 3i$, $w = iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$ ya que si $z = r_\alpha \Rightarrow w = i \cdot z = 1_{90^o} \cdot r_\alpha = r_{\alpha+90^o}$, lo que se puede visualizar gráficamente representando z y w :



58 Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo 2 + 3i mediante un giro de 30º con centro en el origen.

---oo0oo---

Un giro de 30º centrado en el origen consiste en multiplicarle por el número $w = 1_{30^o}$:

$$2+3i = \begin{cases} r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} = 56018'35'' \end{cases} = \sqrt{13}_{56^o18'35''} \text{ y } 1_{30^o} = \cos 30^o + i\,\text{sen}30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Podemos hacer el producto :

◎ En forma binómica : $(2+3i)(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2} \approx 0'23 + 3'60i$

◎ O en forma polar : $\sqrt{13}_{56^o18'35''} \cdot 1_{30^o} = \sqrt{13}_{86^o18'35''} = \sqrt{13}(\cos 86^o18'35'' + i\,\text{sen}86^o18'35'')$

59 ¿ Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto ?

---oo0oo---

Según hemos comprobado en el ejercicio nº 53 un número complejo y su opuesto difieren en 180º, $z = r_\alpha \Rightarrow -z = r_{\alpha+180^o}$

❻⓿ **¿ Qué condición debe cumplir un número complejo z = a + bi para que** $\bar{z} = \frac{1}{z}$

---oo0oo---

$$\left.\begin{cases} \bar{z} = a - bi \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \end{cases}\right\} \text{igualando } \bar{z} = \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{a}{a^2+b^2} \\ b = \frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Resolviendo cualesquiera de las dos ecuaciones anteriores :

$$a = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{a}{a} = 1 = a^2 + b^2 = |z| \text{ ó } b = \frac{b}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{b}{b} = 1 = a^2 + b^2 = |z|, \text{ es decir el módulo es unitario}$$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

PARA PROFUNDIZAR (📖 ❶❹❾)

❻❶ **La suma de dos números complejos, z = a + bi, w = c + di, dividida por su diferencia, es un número imaginario puro. Prueba que los dos números z y w han de tener el mismo módulo**

---oo0oo---

$$\frac{z+w}{z-w} = \frac{a+bi+c+di}{a+bi-c-di} = \frac{(a+c)+(b+d)i}{(a-c)+(b-d)i} = \frac{[(a+c)+(b+d)i]\cdot[(a-c)-(b-d)i]}{[(a-c)+(b-d)i]\cdot[(a-c)-(b-d)i]} =$$

$$= \frac{(a+c)(a-c)-(a+c)(b-d)i+(a-c)(b+d)i-(b+d)(b-d)i^2}{(a-c)^2-(b-d)^2 i^2} =$$

$$\frac{(a^2-c^2+b^2-d^2)}{(a-c)^2+(b-d)^2} + \frac{2ad-2cd}{(a-c)^2+(b-d)^2} i \Rightarrow \text{parte real} = 0; \frac{(a^2-c^2+b^2-d^2)}{(a-c)^2+(b-d)^2} = 0$$

Luego $a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$ y trasponiendo términos $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ es decir sus módulos serán iguales |z| = |w| q.e.d.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻❷ **Sea z ≠ 0 un complejo y** $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. **Prueba que los afijos de z, zw y** zw^2 **son los vértices de un triángulo equilátero.**

---oo0oo---

Expresemos todo en forma polar :

$z = r_\alpha$

$$w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \\ \alpha=\text{arctg}\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}=\text{arctg}-\sqrt{3}=120^{o} \end{array}\right\}=1_{120^{o}}$$

Luego $z = = r_{\alpha}$, $z \cdot w = = r_{\alpha} \cdot 1_{120^o} = = r_{\alpha+120^o}$ y $z \cdot w^2 == r_{\alpha} \cdot (1_{120^o})^2 == r_{\alpha} \cdot 1_{240^o} = = r_{\alpha+240^o}$, como los tres números tiene el mismo módulo (r) y sus argumentos se diferencian en 120º, (α, α + 120º, α + 240º) formarán sus afijos un triángulo equilátero.

❻❸ Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ Halla los otros vértices y la longitud de su lado.

---oo0oo---

El número en forma cartesiana le pasamos a binómica y forma polar :

$$z=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i=\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=2 \\ \alpha=\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\text{arctg}1=45^{o} \end{array}\right\}=2_{45^{o}}$$

Para hallar los otros cuatro vértices giramos este 360º/5 =72º que equivale a multiplicar por 1_{72^o} , es decir sumamos 72º al argumento :

$$\left\{\begin{array}{l} z_2=2_{45^o+72^o}=2_{117^o}=2(\cos 117^o+i\,\text{sen}117^o)=-0'91-3'93i=(-0'91,3'93) \\ z_3=2_{117^o+72^o}=2_{189^o}=2(\cos 189^o+i\,\text{sen}189^o)=-1'98-0'31i=(-1'98,-0'31) \\ z_4=2_{189^o+72^o}=2_{261^o}=2(\cos 261^o+i\,\text{sen}261^o)=-0'31-0'99i=(-0'31,-0'99) \\ z_5=2_{261^o+72^o}=2_{333^o}=2(\cos 333^o+i\,\text{sen}333^o)=1'78-0'91i=(1'78,-0'91) \end{array}\right\}$$

Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno a uno de los 5 triángulos formados sabiendo que dos lados miden 2 (el módulo) y el ángulo comprendido es de 72º :

$$l=\sqrt{2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cos 72^o}=\sqrt{4+4-8\cos 72^o}=\sqrt{5'527864}=2'35$$

❻❹ Si el producto de dos números complejos es –8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿ cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

---oo0oo---

Sean $z = r_{\alpha}$ y $w = s_{\beta}$, se ha de cumplir :

$$\left\{\begin{array}{l} z\cdot w=-8\Rightarrow (r_\alpha)(s_\beta)=(rs)_{\alpha+\beta}=8_{180^o}\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r\cdot s=8\\ \alpha+\beta=180^o\end{array}\right\} \\ \dfrac{z^3}{w}=2\Rightarrow \dfrac{(r_\alpha)^3}{s_\beta}=\dfrac{(r^3)_{3\alpha}}{s_\beta}=\left(\dfrac{r^3}{s}\right)_{3\alpha-\beta}=2_{0^o}\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\dfrac{r^3}{s}=2\\ 3\alpha-\beta=0^o\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

Resolvemos los sistemas formados por las ecuaciones de los módulos y los argumentos:

$$\left\{\begin{array}{l} r\cdot s=8\\ \dfrac{r^3}{s}=2\end{array}\right.\Rightarrow s=\frac{8}{r}\Rightarrow \text{sustituyendo en la } 2^a\ \frac{r^3}{8/r}=2\Rightarrow r^4=16\Rightarrow r=\sqrt[4]{16}=2\Rightarrow s=\frac{8}{2}=4$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^o\\ 3\alpha-\beta=0^o\end{array}\right\}\Rightarrow 3\alpha=\beta\Rightarrow 4\alpha=180^o\Rightarrow \alpha=\frac{180^o}{4}=45^o\Rightarrow \beta=3\cdot 45^o=135^o$$

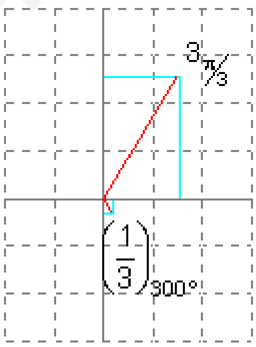
65 Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado:

a) $3_{\pi/3}$, b) 2i , c) – 1 + i

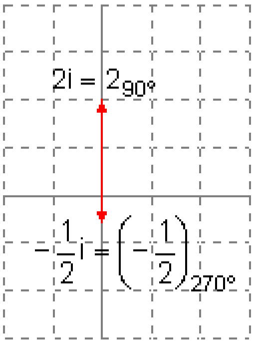
¿ Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

---oo0oo---

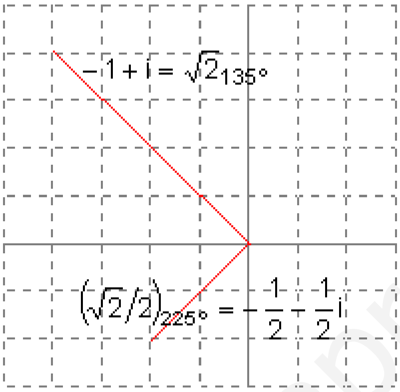
$$\text{a) } 3_{\pi/3}\Rightarrow \frac{1}{3_{60^o}}=\frac{1_{0^o}}{3_{60^o}}=\left(\frac{1}{3}\right)_{-60^o}=\left(\frac{1}{3}\right)_{300^o}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3_{60^o}=3(\cos 60^o+i\operatorname{sen}60^o)=1'5+2'60i\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)_{300^o}=\left(\dfrac{1}{3}\right)(\cos 300^o+i\operatorname{sen}300^o)=0'17-0'29i\end{array}\right\}$$



$$\text{b) } 2i=2_{90^o}\Rightarrow \frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i=\left(-\frac{1}{2}\right)_{270^o}$$



c) $-1+i=\sqrt{2}_{135^\circ} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}_{135^\circ}} = \frac{1_{0^\circ}}{\sqrt{2}_{135^\circ}} = \left(\sqrt{2}/2\right)_{-135^\circ} = \left(\sqrt{2}/2\right)_{225^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$



Vemos que en todos los casos los módulos son inversos y los argumentos suman 360º es decir :

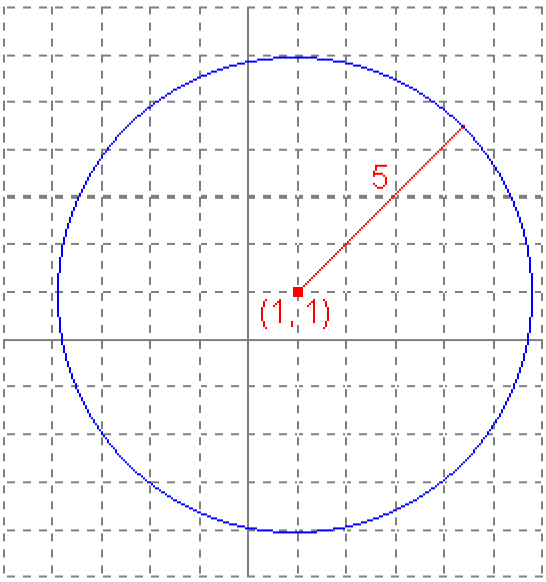
$$z = r_\alpha \Rightarrow \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360^\circ-\alpha}$$

❻❻ Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?

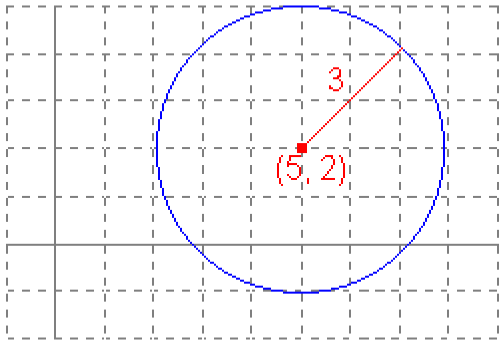
a) $|z-(1+i)|=5$ b) $|z-(5+2i)|=3$

---oo0oo---

a) Todos los números z tal que el módulo de la diferencia respecto del (1 + i) es igual a 5, es decir los que se encuentran en una circunferencia de centro en el punto (1, 1) y radio 5 :



b) Todos los números z tal que el módulo de la diferencia respecto del (5 +2i) es igual a 3, es decir los que se encuentran en una circunferencia de centro en el punto (5, 2) y radio 3 :



◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

❻❼ **Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.**

---oo0oo---

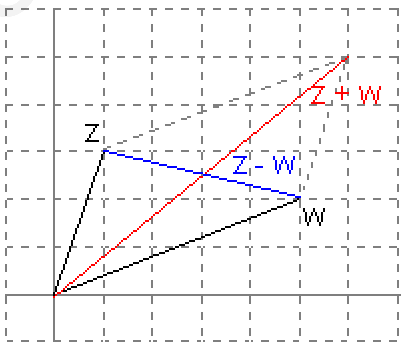
Distan 3 unidades de un punto de coordenadas (1, 1), en el plano complejo equivalen a los números z tal que | z –(1+ i) | =3

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

PARA PENSAR UN POCO MÁS (📖 ❶❹❾)

❻❽ **Demuestra, utilizando números complejos, que en un paralelogramo cualquiera la suma de los cuadrados de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados.**

---oo0oo---



Las diagonales miden | z + w | la mayor y | z – w| la menor, luego :

$|z+w|^2+|z-w|^2= (z+w)\cdot\overline{(z+w)}+(z-w)\cdot\overline{(z-w)}=(z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w})+(z-w)\cdot(\bar{z}-\bar{w})=z\cdot\bar{z}+z\cdot\bar{w}+w\cdot\bar{z}+$

$+w\cdot\bar{w}+z\cdot\bar{z}-z\cdot\bar{w}-w\cdot\bar{z}+w\cdot\bar{w}=2z\cdot\bar{z}+2w\cdot\bar{w}=2\left(z\cdot\bar{z}+w\cdot\bar{w}\right)=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$ q.e.d.

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈