Relación de ejercicios de números complejos

Ejercicio 1.- Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el opuesto del conjugado de $2-5i$?

b) ¿Cuál es el conjugado del opuesto de $-3+4i$?

c) ¿Cuál es el conjugado del conjugado de $-1-5i$?

d) ¿Cuál es el opuesto del opuesto de $3+i$?

Ejercicio 2.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $(1-2i)-(2-6i)$

b) $-i+(3+i)-(-1-4i)$

c) $-(2+i)-3(-1-i)+2(4+3i)$

d) $(2-3i)(-4+i)$

e) $(-4-2i)(-3+5i)$

f) $(-1+i)(2-3i)(3-i)$

g) $\frac{7-3i}{1-i}$

h) $\frac{-2-7i}{-i}$

i) $\frac{5-2i}{1-3i}$

j) $(5-2i)^2$

k) $(3+4i)^3$

l) $(-2+3i)^4$

m) i^{2019}

Ejercicio 3.- Calcula el valor de a para que la multiplicación $(1+2i)(a-6i)$?

a) sea un número real,

b) sea un número imaginario puro

Ejercicio 4.- Expresa el complejo $-\sqrt{3}+i$ en forma polar y en forma trigonométrica

Ejercicio 5.- Expresa el complejo 3_{300^o} en forma trigonométrica y en forma binómica

Ejercicio 6.- Efectúa las siguientes operaciones y escribe el resultado en forma polar y en forma binómica.

a) $3_{45^o}\cdot 2_{15^o}$

b) $1_{33^o}\cdot 2_{16^o}\cdot 3_{41}$

c) $2_{106^o}:1_{61^o}$

d) $9_{37^o}:3_{97}$

Ejercicio 7.- Expresa $\cos(3a)$ y $\operatorname{sen}(3a)$ en función de $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$.

Ejercicio 8.- Calcula:

a) $(1+i)^4$

b) $(-1+i)^{30}$

c) $(1-i)^6$

Ejercicio 9.- Calcula $\sqrt[4]{-1}$

Ejercicio 10.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^2-4z+8=0$

b) $z^3+4z^2+9z+36=0$

c) $z^3+8i=0$

Ejercicio 11.- Sabiendo que $u=3-4i$, $v=-3i$, $w=1-i$, calcula:

a) u^2

b) w^3

c) $(u-v)^2$

d) $\frac{(u+v)^3}{w^2}$

Ejercicio 12.- Calcula:

a) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{20}$

b) $\dfrac{i^{298}}{i^{481}-i^{275}}$

c) $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2000}$

d) $\dfrac{(3+2i)\cdot i^{17}}{i^{243}\cdot(1-i^7)}$

e) $i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}+\ldots+i^{-40}$

f) $\dfrac{(2-i)\cdot(3+2i)^2}{(1+i^{12})\cdot i^{20}}$

Ejercicio 13.- Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla b con la condición de que $(2+bi)^2$ sea un número real.

b) Determine b para que $(3+2i)(-5+bi)$ tenga su afijo en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

c) Halla los valores de a y b para que el producto de los complejos $a+3i$ y $2-bi$ sea igual a $23-14i$.

d) Determina el valor de a para que el cociente $\frac{4+2ai}{3a+i}$ sea un número imaginario puro.

Ejercicio 14.- Completa la siguiente tabla:

Afijo	Forma Binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
$(2,2)$			
	$1-i$		
		4_{30}	
			$2(\cos 225+i\operatorname{sen} 225)$

Ejercicio 15.- Efectúa las siguientes operaciones, expresando los resultados en forma binómica:

a) $2_{25^o} \cdot 3_{20^o}$

b) $16_{76^o} : 4_{46^o}$

c) $12_{93^o} : 3_{33}$

d) $(1_{30^o})^3$

e) $(4_{225^o})^2$

f) $[6(\cos 130^o + i \operatorname{sen} 130^o)] \cdot [3(\cos 80^o + i \operatorname{sen} 80^o)]$

g) $[4(\cos 20^o + i \operatorname{sen} 20^o)]^3$

h) $\dfrac{4(\cos 330^o + i \operatorname{sen} 330^o)}{2(\cos 30^o + i \operatorname{sen} 30^o)}$

Ejercicio 16.- Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(1-i)^7 \cdot (-2+2i)^5$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$

c) $(i^8 + i^5) : (\sqrt{2}i)$

d) $\left(\frac{4-4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$

e) $i^{39} \cdot (-4 - 4\sqrt{3}i)^7$

f) $i^{-73} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)$

Ejercicio 17.- Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{i}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[3]{1-i}$

d) $\sqrt[4]{1+i}$

e) $\sqrt[6]{i}$

f) $\sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i}$

g) $\sqrt[5]{\frac{-32}{i}}$

h) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$

i) $\sqrt[4]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$

j) $\sqrt[3]{\frac{i^5 - i^{-5}}{2i}}$

Ejercicio 18.- Obtén y representa gráficamente las soluciones de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{1}$

b) $\sqrt[3]{-1}$

c) $\sqrt[4]{16i}$

d) $\sqrt[5]{-32}$

e) $\sqrt[3]{-27i}$

Ejercicio 19.- Halla todas las soluciones de estas ecuaciones:

a) $z^2 + z + 1 = 0$

b) $z^2 - \sqrt{12}z + 4 = 0$

c) $z^2 + iz + 2 = 0$

d) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0$

e) $z^3 + 1 = 0$

f) $z^2 - 64i = 0$

Ejercicio 1.- Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el opuesto del conjugado de $2-5i$?

b) ¿Cuál es el conjugado del opuesto de $-3+4i$?

c) ¿Cuál es el conjugado del conjugado de $-1-5i$?

d) ¿Cuál es el opuesto del opuesto de $3+i$?

a) opuesto $= -2+5i$

Conjugado del opuesto $\boxed{-2-5i}$

b) $3+4i$

c) $1-5i$

d) $-3+i$

Ejercicio 2.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $(1-2i)-(2-6i)$

b) $-i+(3+i)-(-1-4i)$

c) $-(2+i)-3(-1-i)+2(4+3i)$

d) $(2-3i)(-4+i)$

e) $(-4-2i)(-3+5i)$

f) $(-1+i)(2-3i)(3-i)$

g) $\frac{7-3i}{1-i}$

h) $\frac{-2-7i}{-i}$

i) $\frac{5-2i}{1-3i}$

j) $(5-2i)^2$

k) $(3+4i)^3$

l) $(-2+3i)^4$

m) i^{2019}

a) $(1-2i)-(2-6i)=$
$(1-2i)+(-2+6i)=$
$\underline{\underline{-1+4i}}$

b) $-i+(3+i)+(1+4i)$
$= \underline{\underline{4+4i}}$

c) $(-2-i)+(3+3i)+(8+6i) = \underline{\underline{9+8i}}$

d) $-8+2i+12i-3i^2 = \underline{\underline{11+14i}}$

e) $12-20i+6i-10i^2 = \underline{\underline{22-14i}}$

f) $(2+3i+2i-3i^2)(3-i) = (5+5i)(3-i) = 15-5i+15i-5i^2 = 20+10i$

g) $\frac{7-3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{7+7i-3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{10+4i}{2} = \underline{\underline{5+2i}}$

h) $\frac{-2-7i}{-i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{-2i-7i^2}{-i^2} = \frac{7-2i}{1} = \underline{\underline{7-2i}}$

i) $\frac{5-2i}{1-3i}\cdot\frac{1+3i}{1+3i} = \frac{5+15i-2i-6i^2}{1-(3i)^2} = \frac{11+13i}{1-9i^2} = \underline{\underline{\frac{11}{10}+\frac{13}{10}i}}$

j) $(5-2i)^2 = 5^2+(2i)^2-2.5.2i = 25+4i^2-20i = \underline{21-20i}$

k) Binomio de Newton $\cancelto{1}{\binom{3}{0}}.3^3(4i)^0+\cancelto{3}{\binom{3}{1}}3^2.(4i)^1+\cancelto{3}{\binom{3}{2}}.3^1.(4i)^2+\cancelto{1}{\binom{3}{3}}3^0(4i)^3$

$= 1.27.1+3.9.4i+3.3.16.i^2+1.1.4^3.i^3 = 27+108i-144+64(-i) = \underline{\underline{-117+44i}}$

l) $(3i-2)^4 = \binom{4}{0}.(3i)^4.(2)^0-\binom{4}{1}(3i)^3(2)^1+\binom{4}{2}(3i)^2(2)^2-\binom{4}{3}(3i)^1(2)^3+\binom{4}{4}(3i)^0(2)^4=$

$= 1.81.\cancelto{1}{i^4}-4.27.\cancelto{-i}{i^3}.2+6.9.\cancelto{-1}{i^2}.4-4.3i.8+1.1.16 =$

$= 81+216i-216-96i+16 = \boxed{-119+120i}$

m) $i^{2019} = \begin{array}{r|l} 2019 & 4 \\ 019 & \\ 3 & 504 \end{array} = i^3 = \underline{\underline{-i}}$

$\boxed{\begin{array}{l} i^2=-1 \\ i^3=-i \\ i^4=1 \\ i^5=i \ \ldots \end{array}}$

Ejercicio 3.- Calcula el valor de a para que la multiplicación $(1+2i)(a-6i)$?

a) sea un número real, b) sea un número imaginario puro

Hacemos la multiplicación:

$a - 6i + 2ai - 12i^2$

$(a+12) + (2a-6)\,i$

a) Si es real, no puede tener parte imaginaria, es decir:

$2a-6=0 \Rightarrow a=3$

b) Si es imaginario puro, no puede tener parte real, es decir:

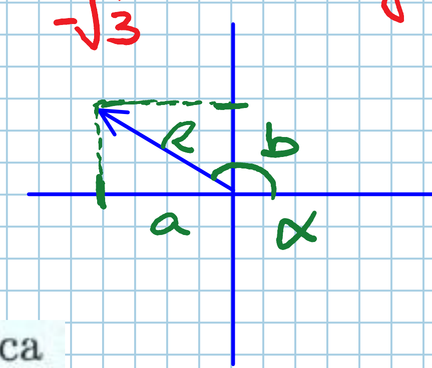
$a+12=0 \Rightarrow a=-12$

Ejercicio 4.- Expresa el complejo $-\sqrt{3}+i$ en forma polar y en forma trigonométrica

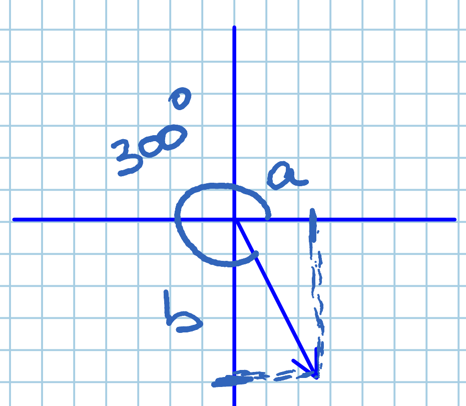
$a=-\sqrt{3}$ $\quad r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ $\quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{1}{-\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$b=1$ $\quad \alpha = 135^\circ$ $\quad$ Forma polar 2_{135°

Trigonométrica $2(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$



Ejercicio 5.- Expresa el complejo 3_{300° en forma trigonométrica y en forma binómica



$a = r\cos\alpha = 3\cos 300^\circ = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$b = i\, r \operatorname{sen}\alpha = 3 \operatorname{sen} 300\, i = 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\, i$

Binómica $= \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\, i$ $\quad$ trigonométrica $3(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$

Ejercicio 6.- Efectúa las siguientes operaciones y escribe el resultado en forma polar y en forma binómica.

a) $3_{45^\circ}\cdot 2_{15^\circ}$ b) $1_{33^\circ}\cdot 2_{16^\circ}\cdot 3_{41}$ c) $2_{106^\circ} : 1_{61^\circ}$ d) $9_{37^\circ} : 3_{97}$

a) $3_{45^\circ}\cdot 2_{15^\circ} = (3\cdot 2)_{45+15} = \boxed{6_{60^\circ}} \to$ $\begin{cases} r=6 \to a = r\cos\alpha = 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \\ \alpha=60^\circ \to b = r\operatorname{sen}\alpha = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Binómica $a+bi = \boxed{3+3\sqrt{3}\, i}$

b) $(1\cdot 2\cdot 3)_{33+16+41} = 6_{90^\circ} \Rightarrow$ $\begin{cases} a = r\cos\alpha = 6\cos 90 = 0 \\ b = r\operatorname{sen}\alpha = 6\operatorname{sen} 90 = 6 \end{cases}$ $\quad z = 6i$

c) $(2/1)_{106-61} = 2_{45^\circ}$ $\quad \begin{cases} a = r\cos\alpha = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2} \\ b = r\operatorname{sen}\alpha = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$ $\quad z = \sqrt{2}+\sqrt{2}\, i$

d) $\left(\frac{9}{3}\right)_{37-97} = 3_{-60^\circ} = 3_{300^\circ}$ $\quad \begin{cases} a = 3\cos 300^\circ = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ b = 3\operatorname{sen} 300^\circ = 3\cdot(-\sqrt{3}/2) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\quad z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\, i$

Ejercicio 7.- Expresa $\cos(3a)$ y $\mathrm{sen}(3a)$ en función de $\mathrm{sen}\, a$ y $\cos a$.

Fórmula de Moivre
$$(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\, n\alpha$$

$$(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\, 3\alpha$$

Desarrollamos el cubo (Binomio de Newton)

$$\cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha \cdot i\,\mathrm{sen}\,\alpha + 3\cos\alpha\cdot(i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 + (i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha$$

$$\cos^3\alpha + 3\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha\, i + 3\cos\alpha \cdot i^2\cdot \mathrm{sen}^2\alpha + i^3\,\mathrm{sen}^3\alpha = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha$$

$$\cos^3\alpha + 3\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha\, i - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha\cdot i = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha$$

$$(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha) + (3\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha)\, i = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha$$

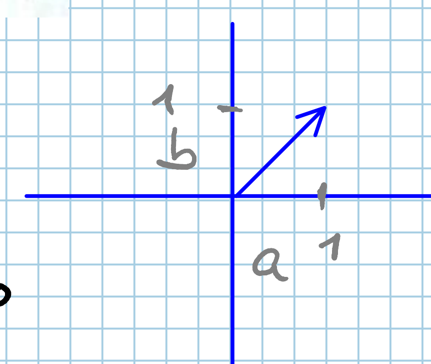
Comparamos términos semejantes

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{sen}\,3\alpha &= 3\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha\\ \cos 3\alpha &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha\end{aligned}}$$

Ejercicio 8.- Calcula:

a) $(1+i)^4$ b) $(-1+i)^{30}$ c) $(1-i)^6$

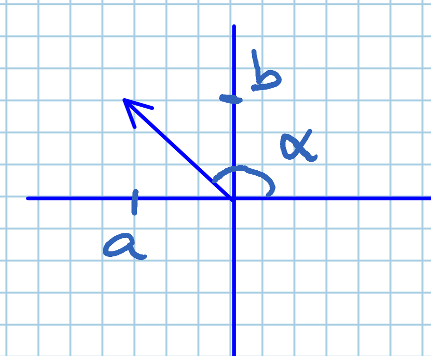
Transformamos a polar:



a) $(1+i)^4 \to \begin{matrix} a=1 \\ b=1\end{matrix} \to r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$

$\alpha = \mathrm{arctg}\, b/a = \mathrm{arctg}\, 1 = 45^\circ$

$$\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^4 = (\sqrt{2})^4_{45\cdot 4} = \sqrt{16}_{180} = \underline{4_{180}}$$

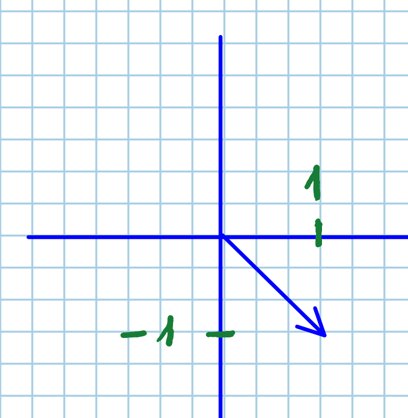


b) $a=-1$ $\quad r = \sqrt{2}$
$b=1$ $\quad \alpha = \mathrm{arctg}(-1) = 135^\circ$

$$\left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^{30} = \sqrt{2^{30}}_{135\cdot 30} = \boxed{2^{15}_{90^\circ}}$$

$135\cdot 30 = 4050 \;\underline{|360}$
$\quad 90 \quad 11$

c) $(1-i)^6 \Rightarrow a = 1 \quad b=-1 \quad r = \sqrt{2}$



$\alpha = \mathrm{arctg}(-1) = 315^\circ$

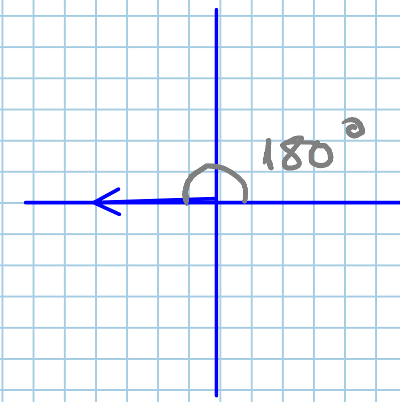
$1890 \;\underline{|360}$
$\quad 90 \quad 5$

$$\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6_{315\cdot 6} = 2^3_{1890^\circ} = \underline{\underline{8_{90^\circ}}}$$

Ejercicio 9.- Calcula $\sqrt[4]{-1}$

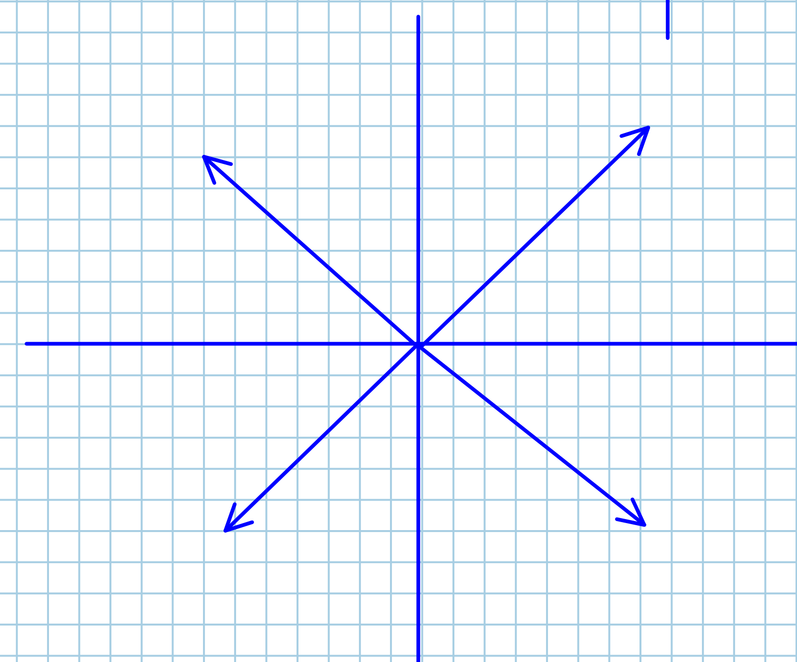
$a=-1 \quad b=0 \qquad \alpha = \operatorname{arctg} 0 =$

$r=\sqrt{1}=1 \qquad \alpha = 180^\circ$



$\sqrt[4]{1}_{180^\circ}$

$$\sqrt[4]{1_{180^\circ}} = \begin{cases} \sqrt[4]{1}_{\frac{180+0.360}{4}} = 1_{45^\circ} \\ \sqrt[4]{1}_{\frac{180+1.360}{4}} = 1_{135^\circ} \\ \sqrt[4]{1}_{\frac{180+2.360}{4}} = 1_{225^\circ} \\ \sqrt[4]{1}_{\frac{180+3.360}{4}} = 1_{315^\circ} \end{cases}$$



Ejercicio 10.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^2-4z+8=0$ b) $z^3+4z^2+9z+36=0$ c) $z^3+8i=0$

a) $z=\dfrac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{4\pm 4i}{2}=\boxed{2\pm 2i}$

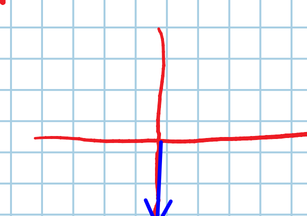
b)

	1	4	9	36
-4		-4	0	-36
	1	0	9	0

$= (x+4)(x^2+9) = \begin{cases} \boxed{x=-4} \\ x^2+9=0 \quad x=\sqrt{-9}=\boxed{\pm 3i} \end{cases}$

c) $z^3+8i=0 \qquad z^3=-8i \qquad z=\sqrt[3]{-8i}$ lo paso a polar

$a=0 \quad b=-8 \qquad r=8 \quad \alpha=270^\circ$



$$\sqrt[3]{8_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt[3]{8}_{\frac{270+0.360}{3}} = 2_{90^\circ} \rightarrow \begin{cases} a=r\cos\alpha = 0 \\ b=r\operatorname{sen}\alpha = 2 \end{cases} \quad \boxed{z_1=2i} \\ \sqrt[3]{8}_{\frac{270+1.360}{3}} = 2_{210^\circ} \rightarrow \begin{cases} a=r\cos\alpha = 2\cos 210^\circ = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \\ b=r\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen} 210^\circ = 2\cdot(-1/2) = -1 \end{cases} \quad \boxed{z_2=-\sqrt{3}-i} \\ \sqrt[3]{8}_{\frac{270+2.360}{3}} = 2_{330^\circ} \rightarrow \begin{cases} a=r\cos\alpha = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ b=r\operatorname{sen}\alpha = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases} \quad \boxed{z_3=\sqrt{3}-i} \end{cases}$$

Ejercicio 11.- Sabiendo que $u=3-4i$, $v=-3i$, $w=1-i$, calcula:

a) u^2 b) w^3 c) $(u-v)^2$ d) $\frac{(u+v)^3}{w^2}$

a) $u^2=(3-4i)^2=9+16i^2-24i=9-16-24i=-7-24i$

b) $w^3=(1-i)^3=1^3-3.1^2i+3.1.i^2-i^3=1-3i-3+i=-2-2i$

c) $(u-v)^2=[(3-4i)+(3i)]^2=(3-i)^2=9+i^2-6i=8-6i$

d) $\dfrac{(u+v)^3}{w^2} = \dfrac{[(3-4i)+(-3i)]^3}{(1-i)^2} = \dfrac{(3-7i)^3}{(1-i)^2} = \dfrac{9-189i+441\cdot i^2-343i^3}{1+i^2-2i} =$

$= \dfrac{9-189i-441+343i}{-2i} = \dfrac{-432-154i}{-2i}\cdot\dfrac{2i}{2i} = \dfrac{-864i-308i^2}{-4i^2} = \dfrac{308-864i}{4} = \underline{\underline{77-216i}}$

Ejercicio 12.- Calcula:

a) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{20}$

b) $\dfrac{i^{298}}{i^{481}-i^{275}}$

c) $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2000}$

d) $\dfrac{(3+2i)\cdot i^{17}}{i^{243}\cdot(1-i^7)}$

e) $i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}+\ldots+i^{-40}$

f) $\dfrac{(2-i)\cdot(3+2i)^2}{(1+i^{12})\cdot i^{20}}$

a) $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{20}$

$\underbrace{i-1-i+1}_{\text{cero}}$ Cada 4 potencias de $i=0$, por lo tanto la solución es $\underline{\underline{\text{cero}}}$

b) $\dfrac{i^{298}}{i^{481}-i^{275}} =$ $298 \,|\, 4$: 18, 2, 74 $\quad 481 \,|\, 4$: 08, 01, 1, 120 $\quad 275 \,|\, 4$: 35, 3, 68 $\quad = \dfrac{i^2}{i-i^3} = \dfrac{i^2}{i+i} = \dfrac{-1}{2i}\cdot\dfrac{i}{i} = \dfrac{-i}{2i^2} = \dfrac{-i}{-2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}i}}$

c) vale $\underline{\underline{1}}$ (ver apartado a)

d) $\dfrac{(3+2i)\,i^{17}}{i^{243}(1-i^7)}$ $\quad 17 \,|\, 4$: 1, 4 $\quad 7 \,|\, 4$: 3, 1 $\quad 243 \,|\, 4$: 03, 3, 60 $\quad = \dfrac{(3+2i)\cdot i}{i^3(1-i^3)} = \dfrac{3i+2i^2}{-i(1+i)} = \dfrac{-2+3i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} =$

$= \dfrac{-2-2i+3i+3i^2}{1-i^2} = \dfrac{-5+i}{2} = -\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}i$

e) $i^{-1}+i^{-2}+\ldots+i^{-40} = \dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}+\cdots = \underbrace{\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1}_{\text{cero}}+\cdots = \underline{\underline{\text{cero}}}$

f) $\dfrac{(2-i)(9+4i^2+12i)}{(1+1)\cdot 1} = \dfrac{(2-i)(5+12i)}{2} = \dfrac{10+24i-5i-12i^2}{2} = \dfrac{22+19i}{2} = \underline{\underline{11+\dfrac{19}{2}i}}$

Ejercicio 13.- Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla b con la condición de que $(2+bi)^2$ sea un número real.

b) Determine b para que $(3+2i)(-5+bi)$ tenga su afijo en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

c) Halla los valores de a y b para que el producto de los complejos $a+3i$ y $2-bi$ sea igual a $23-14i$.

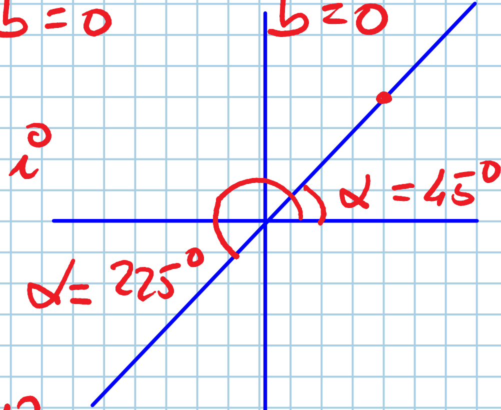
d) Determina el valor de a para que el cociente $\frac{4+2ai}{3a+i}$ sea un número imaginario puro.

a) $(2+bi)^2 = 4+b^2i^2+4bi = (4-b^2)+(4b)i \longrightarrow$ real $\rightarrow$ $4b=0$ $\quad b=0$

b) $(3+2i)(-5+bi) = -15+3bi-10i+2bi^2 = (-15-2b)+(3b-10)i$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \dfrac{3b-10}{-15-2b} = \cancel{\operatorname{tg} 45^\circ}\ 1$ $\qquad 3b-10=-15-2b \Rightarrow 5b=-5$

$\boxed{b=-1}$ Si lo hacemos con 225°, da lo mismo.



Ejercicio 13.- Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla b con la condición de que $(2+bi)^2$ sea un número real.

b) Determine b para que $(3+2i)(-5+bi)$ tenga su afijo en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

c) Halla los valores de a y b para que el producto de los complejos $a+3i$ y $2-bi$ sea igual a $23-14i$.

d) Determina el valor de a para que el cociente $\frac{4+2ai}{3a+i}$ sea un número imaginario puro.

c) $(a+3i)(2-bi) = (23-14i) \Rightarrow (2a - abi + 6i - 3bi^2) = (\quad -14i)$

$(2a+3b) + (6-ab)i = 24-14i$

$\left.\begin{array}{l} 2a+3b=23 \\ 6-ab=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow 20 = ab \Rightarrow a = \frac{20}{b}$

$2\left(\frac{20}{b}\right) + 3b = 23 \Rightarrow \frac{40}{b} + 3b = 23 \Rightarrow 40 + 3b^2 = 23b \Rightarrow 3b^2 - 23b + 40 = 0$

$b = \frac{23 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{23 \pm 7}{6} = \begin{cases} 5 \\ \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} b_1 = 5 \\ b_2 = \frac{8}{3} \end{array}}$

$a_1 = \frac{20}{5} = \boxed{4}$

$a_2 = 20 : \frac{8}{3}$ $\quad a_2 = \frac{60}{8} = \boxed{\frac{15}{2}}$

d) $\frac{4+2ai}{3a+i} \cdot \frac{3a-i}{3a-i} = \frac{12a - 4i + 6a^2 i - 2ai^2}{9a^2 - i^2} = \frac{(14a) + (6a^2-4)i}{9a^2-1} =$

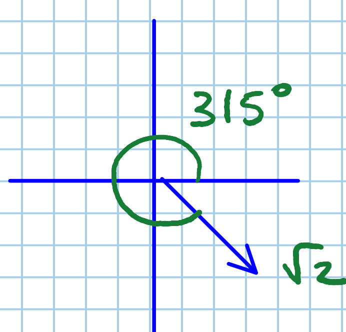
$= \frac{14a}{9a^2-1} + \frac{6a^2-4}{9a^2-1} i$

para que sea imaginario puro, la parte real ha de ser cero.

$\frac{14a}{9a^2-1} = 0 \qquad 14a = 0 \qquad \underline{\underline{a=0}}$

Ejercicio 14.- Completa la siguiente tabla:

Afijo	Forma Binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
$(2,2)$	$2+2i$	$2\sqrt{2}\ 45^\circ$	$2\sqrt{2}(\cos 45 + i \operatorname{sen} 45)$
$(1,-1)$	$1-i$	$\sqrt{2}\ 315^\circ$	$\sqrt{2}(\cos 315 + i \operatorname{sen} 315)$
$(2\sqrt{3}, 2)$	$2\sqrt{3} + 2i$	4_{30}	$4(\cos 30 + i \operatorname{sen} 30)$
$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$	$2\ 225^\circ$	$2(\cos 225 + i \operatorname{sen} 225)$



$r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

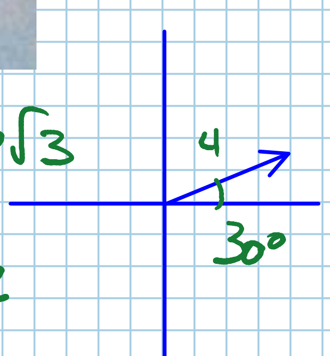
$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{2} = 45^\circ$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{-1}{1} \Rightarrow \alpha = 315^\circ$

$a = 4 \cos 30^\circ = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$b = 4 \operatorname{sen} 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$



$a = 2 \cos 225^\circ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

$b = 2 \operatorname{sen} 225^\circ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

Ejercicio 15.- Efectúa las siguientes operaciones, expresando los resultados en forma binómica:

a) $2_{25^o} \cdot 3_{20^o}$

b) $16_{76^o} : 4_{46^o}$

c) $12_{93^o} : 3_{33}$

d) $(1_{30^o})^3$

e) $(4_{225^o})^2$

f) $[6(\cos 130^o + i \operatorname{sen} 130^o)] \cdot [3(\cos 80^o + i \operatorname{sen} 80^o)]$

g) $[4(\cos 20^o + i \operatorname{sen} 20^o)]^3$

h) $\dfrac{4(\cos 330^o + i \operatorname{sen} 330^o)}{2(\cos 30^o + i \operatorname{sen} 30^o)}$

a) $2_{25^\circ} \cdot 3_{20^\circ} = 6_{(20+25^\circ)} = 6_{45^\circ}$ $\quad a = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ $\quad b = 3\sqrt{2}$ $\quad \underline{\underline{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i}}$

b) $16_{76^\circ} : 4_{46^\circ} = \left(\frac{16}{4}\right)_{76-46} = 4_{30^\circ}$ $\quad a = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ $\quad b = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ $\quad \underline{\underline{2\sqrt{3} + 2i}}$

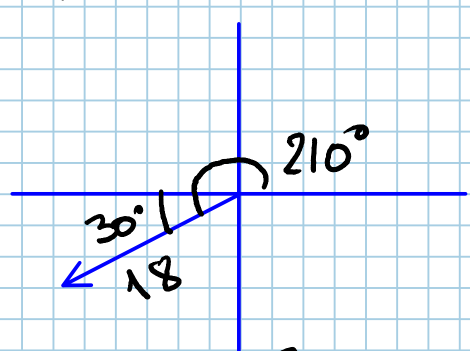
c) $12_{93^\circ} : 3_{33^\circ} = 4_{60^\circ}$ $\quad a = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ $\quad b = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ $\quad \underline{\underline{2 + 2\sqrt{3}\,i}}$

d) $(1_{30^\circ})^3 = 1^3_{(30 \cdot 3)} = 1_{90^\circ}$ $\quad a = 0 \quad b = 1$ $\quad \underline{\underline{i}}$

e) $(4_{225^\circ})^2 = 4^2_{225 \cdot 2} = 16_{450^\circ} = 16_{90^\circ}$ $\quad a = 0$, $b = 16$ $\quad \underline{\underline{16\,i}}$

f) $6_{130^\circ} \cdot 3_{80^\circ} = 18_{210^\circ}$ $\quad a = 18 \cos 210^\circ = 18 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -9\sqrt{3}$ $\quad \underline{\underline{-9\sqrt{3} - 9i}}$

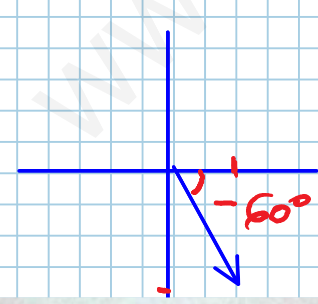
$b = 18 \operatorname{sen} 210^\circ = 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -9$



g) $(4_{20^\circ})^3 = 4^3_{20 \cdot 3} = 64_{60^\circ}$ $\quad a = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32$ $\quad \underline{\underline{33 + 32\sqrt{3}\,i}}$

$b = 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$

h) $\dfrac{4_{330^\circ}}{2_{30^\circ}} = 2_{300^\circ}$



$a = 2 \cos 300^\circ = 1$ $\quad \underline{\underline{1 - \sqrt{3}\,i}}$

$b = 2 \operatorname{sen} 300^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

Ejercicio 16.- Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(1-i)^7 \cdot (-2+2i)^5$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$

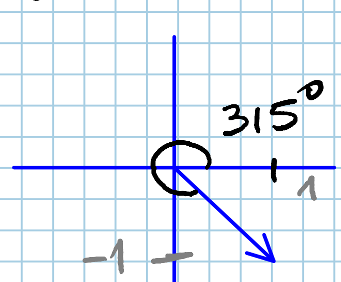
c) $(i^8 + i^5) : (\sqrt{2}i)$

d) $\left(\frac{4-4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$

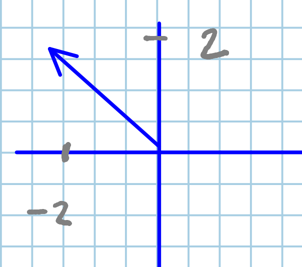
e) $i^{39} \cdot (-4 - 4\sqrt{3}i)^7$

f) $i^{-73} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)$

a) $1 - i$ $\quad r = \sqrt{2}$



$-2 + 2i$



$r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\alpha = 135^\circ$

$(\sqrt{2}_{315})^7 \cdot (2\sqrt{2}_{135})^5 =$

$= \sqrt{2^7}_{315 \cdot 7} \cdot 2^5\sqrt{2^5}_{135 \cdot 5} = 2^3\sqrt{2}_{2205^\circ} \cdot 2^7\sqrt{2}_{675^\circ}$

$= 2^{11}_{2880^\circ} = \underline{\underline{2^{11}_{0^\circ}}}$

$2880 \,|\, 360$
$0 \quad 8$

Ejercicio 16.- Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(1-i)^7\cdot(-2+2i)^5$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{20}$

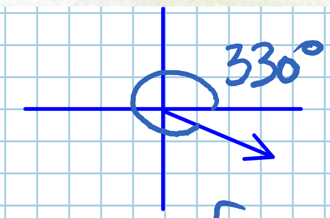
c) $\left(i^8+i^5\right):\left(\sqrt{2}i\right)$

d) $\left(\frac{4-4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$

e) $i^{39}\cdot\left(-4-4\sqrt{3}i\right)^7$

f) $i^{-73}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)$

b) $r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{1}=1$



$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\operatorname{arctg}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\left(1_{330}\right)^{20}=1^{20}_{330\cdot20}=1_{6600°}$

$6600 \,\underline{|\, 360}$
$120 \quad 18$

$=\underline{\underline{1_{120°}}}$

c)