Evaluación

NOMBRE ______________ APELLIDOS ______________

CURSO Y GRUPO ______________ FECHA ______________ CALIFICACIÓN ______________

1 Si una función es estrictamente creciente en un intervalo, ¿qué signo tiene su tasa de variación en ese intervalo?

a) Puede tener cualquier signo.

b) Positivo.

c) Negativo.

2 El hecho de que la recta tangente a una curva $f(x)$ en $x = a$ sea horizontal significa que:

a) En $x = a$, la función tiene un extremo relativo.

b) En $x = a$, $f'(a) = 0$.

c) La función derivada es nula.

3 La derivada de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$ es:

a) $\frac{-1}{2\sqrt{x}}$ *b)* $-\frac{1}{2x\sqrt{x}} + 2$ *c)* $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

4 Para una función de la forma $f(x) = x^4 + bx^2 + c$, se cumple que $f(0) = 1$, y que la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 2 tiene pendiente $m = 2$. Averigua b y c.

a) $b = -3$ y $c = 1$

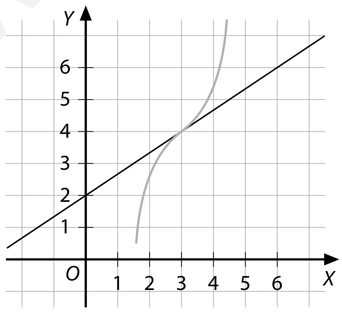
b) $b = -1$ y $c = 1$

c) $b = -\frac{15}{2}$ y $c = 1$

5 La derivada de la función $f(x) = \left(x\sqrt{x} - 1\right)^2$ es:

a) $\frac{9}{4}x$ *b)* $\frac{1}{4x}$ *c)* $3x^2 - 3\sqrt{x}$

6 Calcula cuánto vale $f'(3)$ a partir de la siguiente representación gráfica:



a) No se puede calcular.

b) $\frac{1}{3}$ *c)* $\frac{2}{3}$

7 Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, indica cuál de los siguientes apartados es cierto:

a) En $x = 0$ tiene un máximo relativo, y en $x = 2$ un mínimo relativo. Es creciente en el intervalo $(0, 2)$.

b) En $x = 0$ tiene un mínimo relativo, y en $x = 2$ un máximo relativo. Es decreciente en el intervalo $(0, 2)$.

c) En $x = 0$ tiene un máximo relativo, y en $x = 2$ un mínimo relativo. Es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$.

8 Averigua en qué punto no existe la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = |2x - 1|$$

a) $x = 0$

b) $x = \frac{1}{2}$

c) La derivada existe en todos sus puntos.

9 Averigua en qué punto no existe la recta tangente a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) $x = 1$

b) $f'(a)$ existe para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

c) $x = 0$

10 Las abscisas de los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ es paralela al eje OX, son:

a) $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 2$

b) $x = 0$ y $x = -4$

c) Solo tiene uno, $x = 0$.

11 Calcula la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x^2 + 1}$$

a) $f'(x) = \frac{\cos x}{2x}$

b) $f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot \cos x - 2x \cdot \text{sen } x}{(x^2 + 1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2x \cdot \text{sen } x - (x^2 + 1) \cdot \cos x}{(x^2 + 1)^2}$

Solución de la evaluación

(Se indican con ▶ las respuestas correctas)

1 Si una función es estrictamente creciente en un intervalo, ¿qué signo tiene su tasa de variación en ese intervalo?

a) Puede tener cualquier signo.

▶ *b)* Positivo.

c) Negativo.

2 El hecho de que la recta tangente a una curva $f(x)$ en $x = a$ sea horizontal significa que:

a) En $x = a$, la función tiene un extremo relativo.

▶ *b)* En $x = a$, $f'(a) = 0$.

c) La función derivada es nula.

3 La derivada de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$ es:

▶ *a)* $\frac{-1}{2\sqrt{x}}$ *b)* $-\frac{1}{2x\sqrt{x}} + 2$ *c)* $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

4 Para una función de la forma $f(x) = x^4 + bx^2 + c$, se cumple que $f(0) = 1$, y que la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 2 tiene pendiente $m = 2$. Averigua b y c.

a) $b = -3$ y $c = 1$

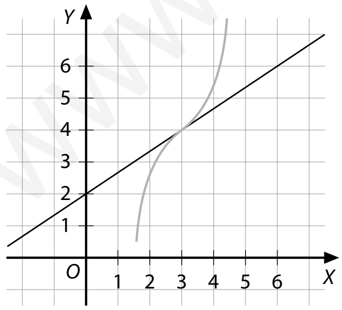
b) $b = -1$ y $c = 1$

▶ *c)* $b = -\frac{15}{2}$ y $c = 1$

5 La derivada de la función $f(x) = \left(x\sqrt{x} - 1\right)^2$ es:

a) $\frac{9}{4}x$ *b)* $\frac{1}{4x}$ ▶ *c)* $3x^2 - 3\sqrt{x}$

6 Calcula cuánto vale $f'(3)$ a partir de la siguiente representación gráfica:



a) No se puede calcular.

b) $\frac{1}{3}$

▶ *c)* $\frac{2}{3}$

7 Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, indica cuál de los siguientes apartados es cierto:

a) En $x = 0$ tiene un máximo relativo, y en $x = 2$ un mínimo relativo. Es creciente en el intervalo $(0, 2)$.

b) En $x = 0$ tiene un mínimo relativo, y en $x = 2$ un máximo relativo. Es decreciente en el intervalo $(0, 2)$.

▶ *c)* En $x = 0$ tiene un máximo relativo, y en $x = 2$ un mínimo relativo. Es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$.

8 Averigua en qué punto no existe la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = |2x - 1|$$

a) $x = 0$

▶ *b)* $x = \frac{1}{2}$

c) La derivada existe en todos sus puntos.

9 Averigua en qué punto no existe la recta tangente a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) $x = 1$

b) $f'(a)$ existe para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

▶ *c)* $x = 0$

10 Las abscisas de los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ es paralela al eje *OX*, son:

▶ *a)* $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 2$

b) $x = 0$ y $x = -4$

c) Solo tiene uno, $x = 0$.

11 Calcula la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x^2 + 1}$$

a) $f'(x) = \frac{\cos x}{2x}$

▶ *b)* $f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot \cos x - 2x \cdot \text{sen } x}{(x^2 + 1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2x \cdot \text{sen } x - (x^2 + 1) \cdot \cos x}{(x^2 + 1)^2}$

1. Derivadas

1 Derivadas

- La tasa de variación media de una función continua, $f(x)$, en un intervalo $[a, a + h]$ corresponde geométricamente con ________________________________

- El valor del límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$:

  a) Se denomina ____

  b) Coincide con el valor de la tasa de variación ______________ en el punto $(a, f(a))$.

  c) Geométricamente representa ________________________________

  ____

- Si $f'(a) > 0$, la función es ________________ en $x = a$.

- Para que una función tenga derivada en un punto de abscisa, *a,* debe cumplirse que:

  a) $f(x)$ sea ________________ en $x = a$.

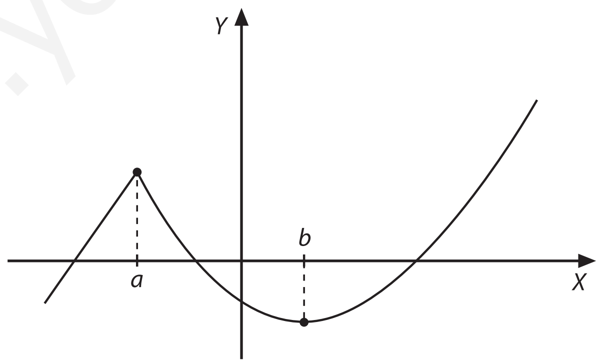
  b) Las derivadas ______________ en $x = a$ sean ____________________

- La función derivada, $f'(x)$, asigna a cada valor $a \in \text{Dom } f$, el valor __________ si este existe.

- La derivada de una suma de funciones es igual a la ____________________

2 Interpretación gráfica

- Observa la siguiente función:



En $x = a$ la función presenta un máximo relativo, y en $x = b$, un mínimo relativo. Pero:

a) $f'(a)$ ____________ porque ________________________________

____

b) $f'(b) =$ ____________ porque ________________________________

____

3 Función derivada

- $f(x) = k$ $\quad k \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) =$
- $f(x) = x$ $\quad f'(x) =$
- $f(x) = x^n$ $\quad n \neq 1$ $\quad f'(x) =$
- $f(x) = \text{sen } x$ $\quad f'(x) =$
- $f(x) = \cos x$ $\quad f'(x) =$
- $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) =$
- $f(x) = a^x$ $\quad a \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) =$
- $f(x) = \ln x$ $\quad f'(x) =$
- $f(x) = \log_a x$ $\quad f'(x) =$
- $(kf(x))' =$
- $(f(x) + g(x))' =$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$
- $(f(x) \cdot g(x))' =$

2. Actividades complementarias

1 **Si una función tiene una tasa de variación positiva en un determinado intervalo, ¿se puede asegurar que es creciente en ese intervalo?**

2 **Dada la función $f(x) = -x^2 + x - 2$, averigua la tasa de variación en los intervalos [0, 2], [2, 4] y [4, 6].**

3 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 3x^5 + 2x^4\sqrt{x}$

b) $f(x) = -3x^3\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2}$

d) $f(x) = \frac{3}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

e) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$

f) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

g) $f(x) = 4x \cdot \ln x$

h) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

i) $f(x) = \log_2 x \cdot \ln x$

j) $f(x) = \frac{3x \cdot \cos x}{\ln x}$

k) $f(x) = \operatorname{tg} x$

l) $f(x) = \sqrt{3x} \cdot 3^x$

m) $f(x) = 7^x \cdot \log x$

n) $f(x) = \sec x$

ñ) $f(x) = \frac{4^x}{\cos x}$

o) $f(x) = 7x \cdot (x + \cos x)$

p) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$

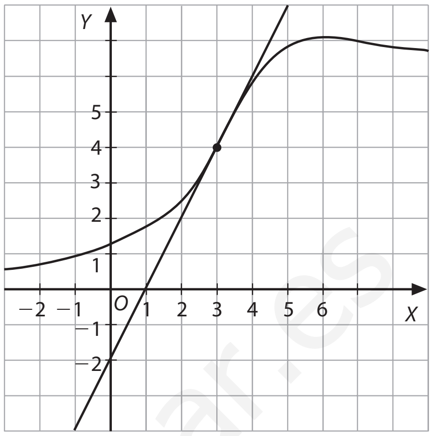
q) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{tg} x$

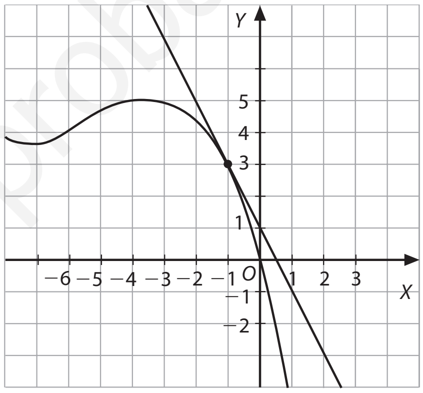
4 **Dadas las funciones representadas en las gráficas, calcula:**

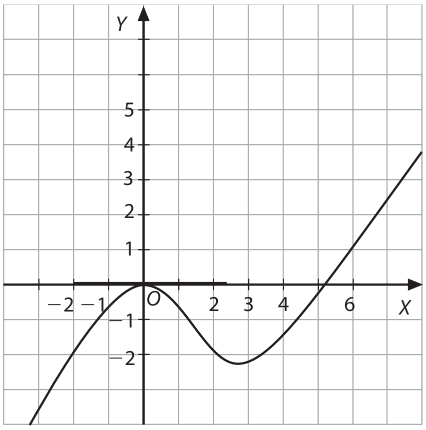
a) $f'(3)$

b) $g'(-1)$

c) $h'(0)$







5 **Aplicando la definición, calcula la derivada en el punto de abscisa $x = -1$ de la función siguiente $f(x) = \frac{1}{x-1}$.**

6 **Calcula los valores de *a* y *b* en esta función:**
$f(x) = 3ax^3 - bx + 1$, sabiendo que $f'(0) = 3$ y $f'(1) = 12$.

7 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes funciones en los puntos que se indican:**

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = 3$

b) $f(x) = 3x^2 - 2$, en $x = 0$

c) $f(x) = (x + 3)^2$, en $x = 0$

d) $f(x) = ax^3$, en $x = -1$

8 **Utilizando derivadas laterales, averigua si la siguiente función, que es continua en su dominio, tiene tangente en $x = 0$. Si es así, calcula su ecuación.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

9 **Dada la siguiente función continua en su dominio, averigua, si existe, $f'(4)$.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x < 4 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

10 **Calcula en qué puntos la tangente a la curva de la función $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 5$ es una recta horizontal.**

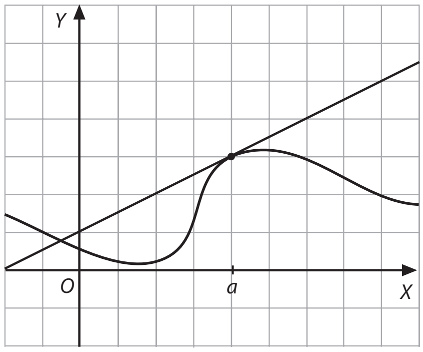
11 **Calcula en qué punto la recta tangente a la curva de la función $f(x) = (2x - 1)^2 + 5$ es paralela a la recta de ecuación $y = 2x + 5$.**

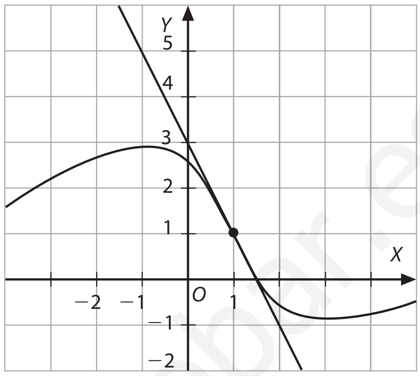
12 **Dadas las gráficas, responde las siguientes cuestiones:**

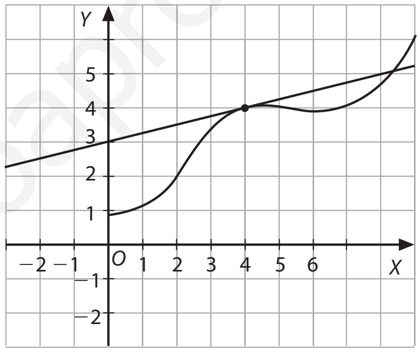
a) $f'(a)$

b) $g'(1)$

c) La ecuación de la recta tangente a $h(x)$ en $x = 4$.







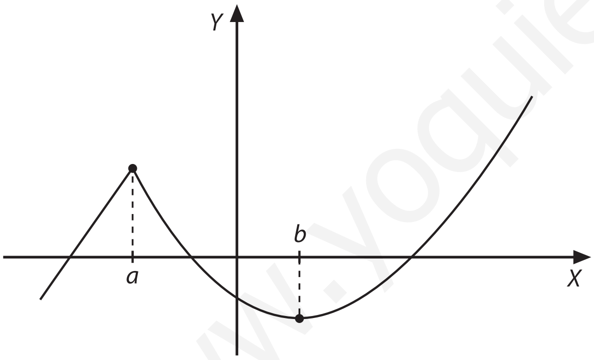
1. Derivadas

1 Derivadas

- La tasa de variación media de una función continua, $f(x)$, en un intervalo $[a, a + h]$ corresponde geométricamente con **la pendiente del segmento que une los puntos A(a, $f(a)$) y B(b, $f(b)$).**
- El valor del límite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
  - ***a)*** Se denomina **derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$**
  - ***b)*** Coincide con el valor de la tasa de variación **cuando los extremos del intervalo de variación $[a, a + h]$ se aproximan infinitamente, es decir, $h \to 0$.**
  - ***c)*** Geométricamente representa **la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (a, $f(a)$).**
- Si $f'(a) > 0$, la función es **creciente en** $x = a$
- Para que una función tenga derivada en un punto de abscisa, a, debe cumplirse que:
  - ***a)*** $f(x)$ sea **continua** en $x = a$
  - ***b)*** Las derivadas **laterales** en $x = a$ sean **iguales.**
- La función derivada, $f'(x)$, asigna a cada valor a Dom f, el valor **de la derivada de $f(x)$ en $x = a$** si este existe.
- La derivada de una suma de funciones es igual a **la suma de las derivadas de cada una de ellas.**

2 Interpretación gráfica

Observa la siguiente función:



En $x = a$, la función presenta un máximo relativo, y en $x = b$, un mínimo relativo.

Pero:

a) $f'(a)$ **no existe porque la gráfica presenta en ese punto un pico, no existe recta tangente.**

b) $f'(b) = 0$ **coinciden las derivadas laterales, presenta un mínimo relativo en ese punto.**

la recta tangente en dicho punto es horizontal.

3 Función derivada

- **$f(x) = k$** $\quad k \in \mathbb{R} \quad$ $f'(x) = 0$
- **$f(x) = x$** $\quad$ $f'(x) = 1$
- **$f(x) = x^n$** $\quad n \neq 1 \quad$ $f'(x) = nx^{n-1}$
- **$f(x) =$** $\text{sen}\, x$ $\quad$ $f'(x) = \cos x$
- **$f(x) =$** $\cos x$ $\quad$ $f'(x) = -\text{sen}\, x$
- **$f(x) =$** e^x $\quad$ $f'(x) = e^x$
- **$f(x) =$** a^x $\quad$ $f'(x) = a^x \cdot \ln a$
- **$f(x) =$** $\ln x$ $\quad$ $f'(x) = 1/x$
- **$f(x) =$** $\log_a x$ $\quad$ $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$
- $(k \cdot f(x))' = k ?f ?(x)$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

2. Actividades complementarias

1 No se puede asegurar; puede presentar subintervalos en los que sea decreciente, aunque la variación global en el intervalo considerado sea positiva.

2 T.V.M.[0, 2] = −1

T.V.M.[2, 4] = −5

T.V.M.[4, 6] = −9

3 ***a)*** $15x^4 + 9x^3\sqrt{x}$

b) $-11x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{4\sqrt{x}}$

c) $-\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

d) $\left(\dfrac{-9}{2x^2\sqrt{x}}\right) + \left(\dfrac{5}{2x^3\sqrt{x}}\right) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{5}{x^3} - \dfrac{9}{x^2}\right)$

e) $3^x \cdot x^2\,(x \ln 3 + 3)$

f) $\dfrac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2 - 1)^2}$

g) $4\,(1 + \ln x)$

h) $\cos^2 x - \text{sen}^2\, x$

i) $\dfrac{2 \ln x}{x \ln 2}$

j) $\dfrac{\ln x\,(3 \cos x - 3x\, \text{sen}\, x) - 3 \cos x}{\ln^2 x}$

k) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

l) $\sqrt{3x} \cdot 3^x \ln 3 + \dfrac{\sqrt{3} \cdot 3^x}{2\sqrt{x}}$

m) $7^x\left(\dfrac{\log e}{x} + \log x \cdot \log 7\right)$

n) $\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x}$

ñ) $\dfrac{4^x\,(\ln 4 \cdot \cos x + \text{sen}\, x)}{\cos^2 x}$

o) $7^x\,(1 - \text{sen}\, x + \ln 7 \cdot x + \ln 7 \cdot \cos x)$

p) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

q) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\cos^2 x} + \dfrac{\text{tg}\, x}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4 ***a)*** $f'(3) = 2$

b) $g'(-1) = -2$

c) $h'(0) = 0$

5 $f'(-1) = \frac{-1}{4}$

6 $a = 1, b = -3$

7 ***a)*** $y = \frac{-x}{9} + \frac{2}{3}$

b) $y = -2$

c) $y = 6x + 9$

d) $y = 3ax + 2a$

8 Tiene tangente en $x = 0$, y su ecuación es $y = 2$.

9 Sus derivadas laterales no son iguales: $f'_{-}(4) = -\frac{1}{8}$ y $f'_{+}(4) = \frac{-1}{16}$, por lo que no existe $f'(4)$.

10 $x = 0,\ x = 2$

11 $\left(\frac{3}{4}, \frac{21}{4}\right)$

12 ***a)*** $f'(a) = \frac{1}{2}$

b) $g'(1) = -2$

c) $y = \frac{x}{4} + 3$