Evaluación

NOMBRE ______________ **APELLIDOS** ______________

CURSO Y GRUPO ______________ **FECHA** ______________ **CALIFICACIÓN** ______________

1 El dominio de la función $f(x) = 2^x + 1/2^x$ es:

a) $\mathbb{R}^+$ ***b)*** $\mathbb{R}$ ***c)*** $[0, +\infty)$

2 Una sustancia radiactiva se desintegra de forma exponencial. Inicialmente había una cantidad de 2 000 g de sustancia y, al cabo de 6 años, quedan 1 500 g. ¿Qué función describe el comportamiento de esta desintegración?

a) $N = N_0 \cdot e^{-0{,}048\,t}$ ***b)*** $N = N_0 \cdot e^{-1{,}5\,t}$ ***c)*** $N = N_0 \cdot e^{-2{,}08\,t}$

3 Indica cuáles de las siguientes igualdades son ciertas:

I. $\log(-3) + \log 4 = \log(-8)$

II. $\log(a - b) = \dfrac{\log a}{\log b}$

III. $\left(\dfrac{1}{3}\right)\log 16 = \log\sqrt[3]{16}$

IV. $\log_{1/3} 5 = -\dfrac{\log 5}{\log 3}$

Son ciertas:

a) I y III ***b)*** III y IV ***c)*** I y IV

4 El valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - e^{-x})$ es:

a) $+\infty$ ***b)*** 0 ***c)*** $-\infty$

5 El valor de $\log 100 + \left(\dfrac{1}{2}\right)\log 0{,}01 - \log 10^{-6}$ es:

a) -3 ***b)*** 3 ***c)*** 7

6 La función $f(x) = \log_{1/4} x$ es:

a) Creciente y no acotada.

b) Positiva y no acotada.

c) Decreciente y no acotada.

7 El dominio de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ es:

a) $\mathbb{R} - [-1, 0]$ ***b)*** $\mathbb{R}^+$ ***c)*** $(-\infty, -1)$

8 En cualquier función logarítmica $f(x) = \log_a x$:

a) La gráfica siempre pasa por el punto (0, 1).

b) La gráfica siempre pasa por el punto (1, 0).

c) $f(x) = f(-x)$

9 El período de la función $f(x) = \cos(2x + \pi)$ es:

a) π ***b)*** 2π ***c)*** $\pi/2$

10 La población de un cultivo de bacterias se duplica cada 15 minutos. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que aumente en un 30 %?

a) Aproximadamente, 5 minutos y 40 segundos.

b) Aproximadamente, 39 minutos y 38 segundos.

c) Aproximadamente, 18 minutos y 4 segundos.

11 Halla la tasa de deforestación media anual de un bosque que se ha reducido 2/3 en 100 años.

a) Aproximadamente, $-0{,}3$ % anual.

b) Aproximadamente, $-3{,}5$ % anual.

c) Aproximadamente, $-1{,}1$ % anual.

12 Las funciones periódicas:

a) Son biyectivas.

b) Son inyectivas.

c) No son inyectivas.

13 La solución de la ecuación $9 \cdot 3^{3-x} = \dfrac{1}{243}$ es:

a) $x = 4$ ***b)*** $x = -4$ ***c)*** $x = 10$

14 La solución de la ecuación $2^{x-1} + 2^{x+3} + 2^x = 38$ es:

a) $x = 2$ ***b)*** $x = 4$ ***c)*** $x = 1$

15 La solución de la ecuación $3 \cdot 5^{x-1} = 10$ es:

a) $x = 1{,}40$ ***b)*** $x = 1{,}748$ ***c)*** $x = 0{,}25$

16 La solución de la ecuación $\ln x - \ln 4 = 2\ln 3 - \ln 5$ es:

a) $x = 36/5$ ***b)*** $x = 9/20$ ***c)*** $x = 45/4$

17 Las soluciones de la ecuación $x \cdot \ln x - 5x = 0$ son:

a) $x = 1$ y $x = 5e$

b) $x = 0$ y $x = e^5$

c) $x = e^5$

18 $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{3}{2}\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2\,x$

a) $\begin{cases} x = 120° + k \cdot 360° \\ x = 240° + k \cdot 300° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° \\ x = 120° + k \cdot 360° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

c) No tiene solución.

Solución de la evaluación

(Se indican con ▶ las respuestas correctas)

1 El dominio de la función $f(x) = 2^x + 1/2^x$ es:

a) $\mathbb{R}^+$ ▶ **b)** $\mathbb{R}$ **c)** $[0, +\infty)$

2 Una sustancia radiactiva se desintegra de forma exponencial. Inicialmente había una cantidad de 2 000 g de sustancia y, al cabo de 6 años, quedan 1 500 g. ¿Qué función describe el comportamiento de esta desintegración?

▶ **a)** $N = N_0 \cdot e^{-0,048\,t}$

b) $N = N_0 \cdot e^{-1,5\,t}$

c) $N = N_0 \cdot e^{-2,08\,t}$

3 Indica cuáles de las siguientes igualdades son ciertas:

I. $\log(-3) + \log 4 = \log(-8)$

II. $\log(a - b) = \dfrac{\log a}{\log b}$

III. $\left(\dfrac{1}{3}\right)\log 16 = \log\sqrt[3]{16}$

IV. $\log_{1/3} 5 = -\dfrac{\log 5}{\log 3}$

Son ciertas:

a) I y III ▶ **b)** III y IV **c)** I y IV

4 El valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - e^{-x})$ es:

▶ **a)** $+\infty$ **b)** 0 **c)** $-\infty$

5 El valor de $\log 100 + \left(\dfrac{1}{2}\right)\log 0,01 - \log 10^{-6}$ es:

a) -3 **b)** 3 ▶ **c)** 7

6 La función $f(x) = \log_{1/4} x$ es:

a) Creciente y no acotada.

b) Positiva y no acotada.

▶ **c)** Decreciente y no acotada.

7 El dominio de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ es:

▶ **a)** $\mathbb{R} - [-1, 0]$

b) $\mathbb{R}^+$

c) $(-\infty, -1)$

8 En cualquier función logarítmica $f(x) = \log_a x$:

a) La gráfica siempre pasa por el punto (0, 1).

▶ **b)** La gráfica siempre pasa por el punto (1, 0).

c) $f(x) = f(-x)$

9 El período de la función $f(x) = \cos(2x + \pi)$ es:

▶ **a)** π **b)** 2π **c)** $\pi/2$

10 La población de un cultivo de bacterias se duplica cada 15 minutos. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que aumente en un 30 %?

▶ **a)** Aproximadamente, 5 minutos y 40 segundos.

b) Aproximadamente, 39 minutos y 38 segundos.

c) Aproximadamente, 18 minutos y 4 segundos.

11 Halla la tasa de deforestación media anual de un bosque que se ha reducido 2/3 en 100 años.

a) Aproximadamente, $-0,3$ % anual.

b) Aproximadamente, $-3,5$ % anual.

▶ **c)** Aproximadamente, $-1,1$ % anual.

12 Las funciones periódicas:

a) Son biyectivas.

b) Son inyectivas.

▶ **c)** No son inyectivas.

13 La solución de la ecuación $9 \cdot 3^{3-x} = \dfrac{1}{243}$ es:

a) $x = 4$ **b)** $x = -4$ ▶ **c)** $x = 10$

14 La solución de la ecuación $2^{x-1} + 2^{x+3} + 2^x = 38$ es:

▶ **a)** $x = 2$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = 1$

15 La solución de la ecuación $3 \cdot 5^{x-1} = 10$ es:

a) $x = 1,40$

▶ **b)** $x = 1,748$

c) $x = 0,25$

16 La solución de la ecuación $\ln x - \ln 4 = 2\ln 3 - \ln 5$ es:

▶ **a)** $x = 36/5$

b) $x = 9/20$

c) $x = 45/4$

17 Las soluciones de la ecuación $x \cdot \ln x - 5x = 0$, son:

a) $x = 1$ y $x = 5e$

b) $x = 0$ y $x = e^5$

▶ **c)** $x = e^5$

18 $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{3}{2}\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2\,x$

▶ **a)** $\begin{cases} x = 120° + k \cdot 360° \\ x = 240° + k \cdot 300° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° \\ x = 120° + k \cdot 360° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

c) No tiene solución.

1. Funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas

1 Función exponencial

La base de la función exponencial, a, es un número real, de signo ___________________ y diferente de ___________________

El dominio de la función exponencial es ______________ y su recorrido es ____________

Una función exponencial, $f(x) = a^x$, es decreciente si ___________________

Cuando $a > 1$, si $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ___________________

Las gráficas de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto de ___________________

La función exponencial $f(x) = a^x$ es inversa de la función ___________________

2 Función logarítmica

El logaritmo en base a de un número, x, es ___________________

Para que $f(x) = \log_a x$ sea creciente es necesario que ___________________

Completa: $\log_a (x \cdot y) =$ ___________________

______________ $= \log_a x - \log_a y$

$\log_a \sqrt[n]{x^n} =$ ____________ $\cdot \log_a x$

3 Funciones trigonométricas

El dominio de la función seno es ________________ y su recorrido es ______________

El dominio de la función tangente es ________________ y su recorrido es ____________

El dominio de la función cotangente es ___________________

y su recorrido es ___________________

Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente son funciones ______________

La función arcotangente es una función continua en ________________, cuyo recorrido es ________________. Es una función estrictamente ________________

2. Actividades complementarias

1 **Dada la función $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x$, calcula:**

a) $f(0)$, $f(-2)$, $f(-5)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(6)$

b) $f^{-1}\left(\frac{81}{4}\right)$, $f^{-1}\left(\sqrt[5]{\frac{9}{2}}\right)$, $f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)$

2 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$ *b)* $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$

3 **Halla la rentabilidad de un millón de euros en un año a un interés compuesto anual del 3,5 %. ¿Y si la capitalización es continua?**

4 **Construye la gráfica de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{si } x < 0 \\ 3^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¿Es una función continua? ¿Es inyectiva?

5 **El número de habitantes de una ciudad crece exponencialmente de 125 000 a 140 000 habitantes desde 1985 a 1995. ¿Cuántos habitantes se puede calcular que tendrá en el año 2000, suponiendo que el ritmo de crecimiento no varía?**

6 **A partir de las representaciones gráficas de las funciones $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, calcula:**

a) Su punto de intersección.

b) En qué intervalo del dominio se cumple que $f(x) > g(x)$.

c) En qué intervalo del dominio se cumple que $f(x) < g(x)$.

7 **La tasa anual de crecimiento de un bosque es del 3 %. Calcula la cantidad de madera que tendrá al cabo de 5 años, si inicialmente tiene unos 6 000 m^3 y las condiciones de crecimiento se mantienen. Después, expresa la función que rige su crecimiento como una exponencial de base e.**

8 **Dada la función $f(x) = \log_5 x$, calcula:**

a) $f\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right)$, $f(0{,}2)$, $f(0{,}008)$

b) $f^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$, $f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$, $f^{-1}(-1{,}25)$

9 **Un producto se lanza al mercado con una previsión de ventas para las primeras 20 semanas, determinada por la función $N(t) = 1\,500\ e^{0{,}25t}$, donde N es el número de unidades que se prevé vender y t es el tiempo en semanas. Averigua la expresión que refleja el tiempo transcurrido según las unidades vendidas y estima cuántas semanas deben transcurrir para que se hayan vendido 10 000 unidades.**

10 **Imagina que una persona consume el suficiente alcohol para alcanzar el doble del nivel a partir del cual está prohibido conducir, que es de 0,08 mg/cc en sangre. Supón que la disminución de alcohol se rige por la función $m(t) = m_0(1/3)^t$, donde m es la cantidad de alcohol por centímetro cúbico y t, el tiempo medido en horas. Calcula el tiempo que se debe dejar transcurrir para que se alcance el nivel autorizado para poder conducir un vehículo.**

11 **Aplica las propiedades de los logaritmos y simplifica la siguiente expresión:**

$$1 + \log 6 - \log 5 + \frac{1}{2}\log 3 - \log 36 - \frac{\log 27}{2}$$

12 **El número de bacterias de un cultivo viene determinado por la expresión $N(t) = 2{,}75 \cdot 1{,}3^t$, donde t es el tiempo medido en horas y N el número de miles de individuos. Calcula el tiempo que tarda en duplicarse el cultivo. Escribe la función como una exponencial de base e.**

13 **Calcula:** $\log_3 100$, $\log_{1/2} 25$, $\log_{\sqrt{5}} 50$

14 **Determina la función inversa de cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{100}{1 + 55\ e^{-0{,}025x}}$

b) $f(x) = 3 + \log_4 (x - 2)$

15 **¿Es periódica $f(x) = \text{sen}\ |x|$? Ayúdate de una gráfica.**

16 **¿Para qué valores de la derivada x se cumple que $\text{sen}\ x = \cos x$?**

17 **Averigua el dominio de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

b) $f(x) = \ln (1 - \text{tg}\ x)$

c) $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\text{tg}\ x}}$

18 **Estudia la simetría de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = |\text{sen}\ x + \text{tg}\ x|$

b) $f(x) = x \cos x + x^2\ \text{sen}\ x$

c) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos x$

19 **Calcula el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \text{sen}\ x + \text{tg}\ x$. Averigua su tipo de simetría y su período, en caso que sea periódica.**

20 **Define la función arco cotangente. ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?**

21 **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $5^{2x-1} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$

b) $8^{3x+2} = \left(\dfrac{1}{32}\right)^{6-x}$

c) $3 \cdot 2^{x+1} - 7 \cdot 2^{x-2} = 34$

d) $2^x = 3 \cdot 4^{1-x}$

e) $2^{x+1} = e^{4-x}$

22 **Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:**

a) $\log_5 (x+3) - \log_5 x = 2$

b) $2^{\ln x} = 3 - 5 \cdot 2^{\ln x}$

c) $\log x^2 - 2 \log (x+1) + \log 4 = 0$

d) $\log_2 x - \log_2 1\,024 = \dfrac{\log_2 x}{2}$

23 **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

a) $\sec x = \operatorname{sen} x + \cos x$

b) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

c) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \cos 2x$

d) $\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x = \dfrac{1}{2}$

24 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \log_{\frac{x^2}{2}} (y+5) = 1 \\ \log x - \log 2 = \log 6 - \log y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 6 \\ \log x^2 - \log y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_x (12 - y) = 3 \\ \log_y \dfrac{1}{2+x} = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log (x+y) + \log (x-y) = \log 13 \\ \ln e^x = \ln e^{y+1} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 4x - \log y \\ x \log 2 + y \log 3 = 288 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x\,y \log 2 = 524\,288 \\ 2^{x+y} = 4^{3x-y} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ \operatorname{sen} x - \cos y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^{-y} = -21 \\ 3^{x-1} + 5^{y+2} = 10 \end{cases}$

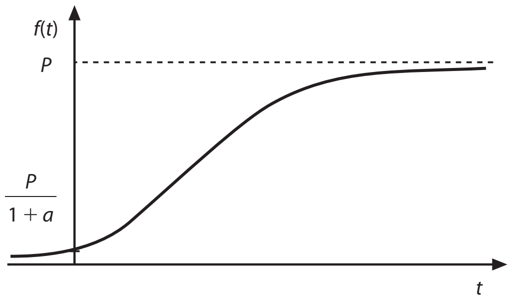
i) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{256} - \sqrt[y]{64} = 0 \\ 3^x - 9 \cdot 3^{2y-1} = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2 \cos 2x = \operatorname{tg} y \\ 4 \operatorname{sen}^2 2x - 2 \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$

3. Curva de crecimiento logístico

Hay fenómenos que se pueden expresar mediante funciones exponenciales, pero cuyo crecimiento se amortigua al cabo del tiempo, sin llegar a alcanzar un valor límite.

Su gráfica es de la forma:



La expresión analítica es del tipo $f(t) = \dfrac{P}{1 + a\,\mathrm{e}^{-kt}}$, donde las constantes P, a y k son positivas.

El valor límite del crecimiento es $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{P}{1 + a\,\mathrm{e}^{-kt}} = \dfrac{P}{1 + a\,\mathrm{e}^{-\infty}} = \dfrac{P}{1 + 0} = P$

El valor inicial para $t = 0$ es $\dfrac{P}{1 + a}$

Para valores de P y a muy grandes, se puede aproximar la curva siempre y cuando se consideren valores de t no muy grandes, a una exponencial del tipo:

$$f(t) = \frac{P\,\mathrm{e}^{kt}}{a + 1}$$

Ejemplo

Una población de microorganismos aumenta de forma exponencial según la ecuación $f(t) = 10\,000 \cdot \mathrm{e}^{0,085t}$, donde t es el número de días. Con el paso del tiempo, su crecimiento se estabiliza, debido a fenómenos ambientales, y no sobrepasa los $5 \cdot 10^7$ individuos.

La función logística que describe su comportamiento es: $f(t) = \dfrac{4,9 \cdot 10^7}{1 + 4\,900\,\mathrm{e}^{-0,085t}}$

Se puede elaborar una tabla que compare los valores de población según una u otra función:

Tiempo (días)	$f(t) = 10\,000\,\mathrm{e}^{0,085t}$	$f(t) = \dfrac{4,9 \cdot 10^7}{1+4\,900\,\mathrm{e}^{-0,085t}}$
10	23 396	23 385
20	54 739	54 678
40	299 641	299 641
60	1 640 219	1 587 093
80	8 978 472	7 588 078
100	49 147 688	24 810 113
200	$2,42 \cdot 10^{11}$	48 990 062

Como se puede observar, la diferencia de crecimiento se produce claramente a partir de $t = 100$.

4. Cambio de base logarítmica

Dado un logaritmo en una base cualquiera, es sencillo expresarlo en otra base. Se procede del siguiente modo:

Si $y = \log_a x$, entonces $x = a^y$. A partir de esta expresión tomamos logaritmos en cualquier base, *b,* y se obtiene:

$$\log_b x = \log_b a^y$$

Aplicando propiedades del cálculo logarítmico:

$$\log_b x = y \cdot \log_b a$$

Dado que $y = \log_a x$, sustituyendo:

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$$

de donde se deduce:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Si $x = b$, entonces:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

En principio, y puesto que las calculadoras científicas trabajan con logaritmos decimales y neperianos, es interesante expresar un logaritmo de base cualquiera en base 10 o en base e.

Si $b = 10$, queda: $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

Si $b = \text{e}$, entonces: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Observa que a partir de las últimas igualdades se puede escribir:

$$\log x \cdot \ln a = \log a \cdot \ln x$$

La relación entre logaritmos decimales y logaritmos neperianos es:

$$\log \text{e} = \frac{1}{\ln 10}$$

Actividades

1 **Calcula $\log_3 45$.**

2 **Calcula $\log_{1/\sqrt{2}} 25$.**

1. Funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas

1 Función exponencial

La base de la función exponencial, a, es un número real, de signo **positivo** y diferente de **uno.**

El dominio de la función exponencial es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\mathbb{R}^+$.

Una función exponencial, $f(x) = a^x$, es decreciente si: $\mathbf{0 < a < 1}$.

Cuando $a > 1$, si $x \to -\infty$, $f(x) \to \mathbf{0}$

Las gráficas de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto **al eje de ordenadas.**

La función exponencial $f(x) = a^x$ es inversa **de la función logarítmica de base *a*.**

2 Función logarítmica

El logaritmo en base a de un número, x, es **el número, *y*, al que hay que elevar *a* para obtener *x*.**

$$\log_a x = y \to \mathbf{x = a^y}$$

Para que $f(x) = \log_a x$ sea creciente es necesario que $\mathbf{a > 1}$

Completa: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

3 Funciones trigonométricas

El dominio de la función seno es **Dom $f(x) = \mathbb{R}$** y su recorrido es **Rec $f(x) = [-1, 1]$.**

El dominio de la función tangente es:

Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{(2k + 1)\,\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$.

El dominio de la función cotangente es:

Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \neq 0\} =$

$= \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$.

La función arco tangente es una continua en $\mathbb{R}$, cuyo recorrido es $\mathbb{R} \to \mathbf{[-\pi/2, \pi/2]}$.

Es una función estrictamente **creciente.**

2. Actividades complementarias

1 ***a)*** $f(0) = 1$, $f(-2) = \frac{9}{2}$, $f(-5) = \frac{243}{4\sqrt{2}}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}$,

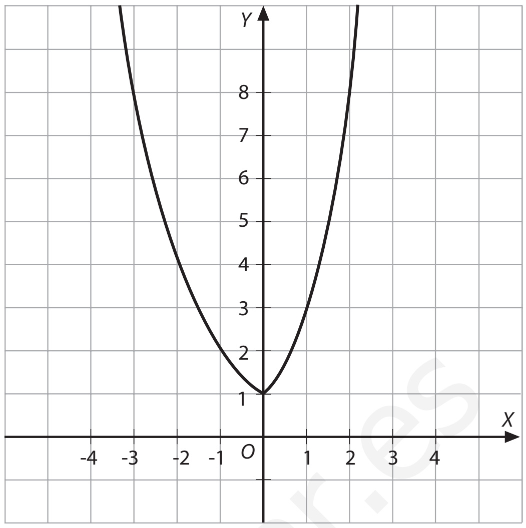
$f(6) = \frac{8}{729}$

b) $f^{-1}\left(\frac{81}{4}\right) = -4$, $f^{-1}\left(\sqrt[5]{\frac{9}{2}}\right) = \frac{-2}{5}$, $f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right) = \frac{2}{3}$

2 ***a)*** e^{-3} ***b)*** e

3 Anual: 1 035 000 €, continuo: 1 035 620 €.

4 Es continua y no es inyectiva.



5 148 162 habitantes.

6 ***a)*** (0, 1)

b) En $(0, +\infty)$

c) En $(-\infty, 0)$

7 6 956 m^3. $M = M_0\, e^{0{,}03\, t}$

8 ***a)*** $f\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right) = \frac{-3}{2}$, $f(0{,}2) = -1$, $f(0{,}008) = -3$

b) $f^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt[4]{5^3}$

$f^{-1}(-1{,}25) = \frac{1}{\sqrt[4]{5^5}}$

9 $t = \frac{\ln 10\,000 - \ln 1\,500}{0{,}25} = 7{,}588 \Rightarrow$ Entre 7 y 8 semanas.

10 Aproximadamente 38 min.

11 $-\log 9$

12 2,64 horas. $N(t) = 2{,}75\, e^{0{,}26\, t}$

13 $\log_3 100 = 4{,}19$

$\log_{1/2} 25 = -4{,}64$

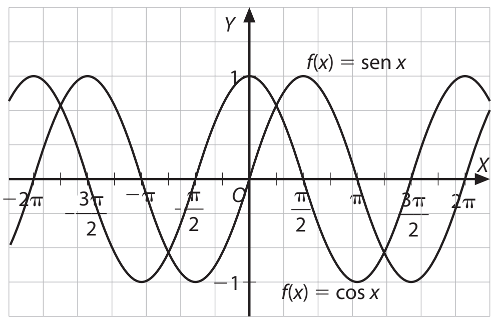
$\log_{\sqrt{5}} 50 = 4{,}86$

14 ***a)*** $f^{-1}(x) = 40\,[\ln 55x - \ln (100 - x)]$

b) $f^{-1}(x) = 4^{x-3} + 2$

15 No es periódica.

16



$\left(\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{5\pi}{4} + k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$

17 ***a)*** Dom $f(x) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

b) Dom $f(x) = \left(\dfrac{-\pi}{2} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

c) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \left\{\pi k,\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

18 ***a)*** Par, simétrica respecto del eje de ordenadas.

b) Impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) No tiene simetría.

19 Dom $f(x) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

Rec $f(x) = \mathbb{R}$

Es una función impar, simétrica respecto del origen de coordenadas. Su período es 2π.

20 Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Rec $f(x) = (0, \pi)$

21 ***a)*** $x = 1$

b) $x = -9$

c) $x = 3$

d) $x = 1{,}195$

e) $x = \dfrac{4 - \ln 2}{\ln 2 + 1}$

21 ***a)*** $x = \dfrac{1}{8}$

b) $x = \dfrac{1}{e}$

c) $x = 1$

d) $x = 2^{20}$

23 ***a)*** $\begin{cases} x = k \cdot 180° \\ x = 45° + k \cdot 180° \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

b) $\begin{cases} x = 90° + k \cdot 360° \\ x = 120° + k \cdot 360° \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

c) $x = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $\begin{cases} x = 15° + k \cdot 90° \\ x = 75° + k \cdot 90° \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

24 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \log_{x^2/2}(y+5) = 1 \\ \log x - \log 2 = \log 6 - \log y \end{cases}$

Se puede construir el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} = y + 5 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Por sustitución: $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{12}{x} + 5$

Haciendo común denominador: $x^3 = 24 + 10x$, esto es: $x^3 - 10x - 24 = 0$.

Solucionando esta ecuación por Ruffini se obtiene un única solución real, $x = 4$, y, por tanto, $y = 3$.

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 6 \\ \log x^2 - \log y = 0 \end{cases}$

El sistema equivalente que se consigue al aplicar las propiedades de los logaritmos es:

$\log x \cdot y = 6 \ \Rightarrow\ 10^6 = x\,y$

$\log \dfrac{x^2}{y} = 0 \ \Rightarrow\ 1 = \dfrac{x^2}{y}$

Por sustitución:

$10^6 = x^3 \Rightarrow x = 100$, y, por tanto: $y = 10\,000$

c) $\begin{cases} \log_x (12 - y) = 3 \\ \log_y \left(\dfrac{1}{2+x}\right) = -1 \end{cases}$

Aplicando la definición de logaritmo se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^3 = 12 - y \\ y = 2 + x \end{cases}$$

Por sustitución:

$x^3 + x - 10 = 0$

Solucionando esta ecuación por Ruffini se obtiene: $x = 2$.

Por tanto, $y = 4$.

d) $\begin{cases} \log (x+y) + \log (x-y) = \log 13 \\ \ln e^x = \ln e^{y+1} \end{cases}$

Por las propiedades de los logaritmos se tiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 13 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Operando y sustituyendo:

$x^2 - y^2 = 13 \Rightarrow (y+1)^2 - y^2 = 13 \Rightarrow 2y + 1 = 13 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 6$, por lo que $x = 7$

e) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 4x - \log y \\ x \log 2 + y \log 3 = \log 288 \end{cases}$

Por las propiedades de los logaritmos se puede construir el sistema equivalente:

$$\begin{cases} xy = \dfrac{4x}{y} \Rightarrow y = 2\ (-2 \text{ no puede ser}) \\ 2^x \cdot 3^y = 2^5 \cdot 3^2 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

f) $\begin{cases} xy \log 2 = \log 262\,144 \\ 2^{x+y} = 4^{3x-y} \end{cases}$

$262\,144 = 2^{18}$, por lo que se puede escribir:

$$\begin{cases} \log 2^{xy} = \log 2^{18} \\ 2^{x+y} = 2^{6x-2y} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} xy = 18 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo:

$5\left(\dfrac{18}{y}\right) - 3y = 0 \ \Rightarrow\ 90 - 3y^2 = 0 \ \Rightarrow\ y = \pm\sqrt{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\dfrac{18}{\sqrt{30}}$

g) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ \operatorname{sen} x - \cos y = 0 \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$2 \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30° + k \cdot 360°$

$x = 150° + k \cdot 360°$

Restando, se obtiene:

$2 \cos y = 1 \Rightarrow \cos y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 60° + k \cdot 360°$

$y = 300° + k \cdot 360°$

h) $\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^{-y} = -21 \\ 3^{x-1} + 5^{y+2} = 10 \end{cases}$

Hacemos $3^x = z$ y $5^y = w$:

$$\begin{cases} 2z - \dfrac{3}{w} = -21 \\ \dfrac{z}{3} + 25w = 10 \end{cases}$$

Por sustitución se obtiene una ecuación de segundo grado, cuya solución positiva para z es 27, es decir, $3^x = 27 \Rightarrow x = 3$, y para el valor de w se obtiene $\dfrac{1}{25}$, es decir, $5^y = \dfrac{1}{25} \Rightarrow y = -2$.

i) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{256} - \sqrt[y]{64} = 0 \\ 3^x - 9 \cdot 3^{2y-1} = 0 \end{cases}$

Se pueden reescribir ambas ecuaciones del siguiente modo:

$$\begin{cases} 2^{8/(x-y)} = 2^{6/y} \\ 3^x - 3^{1+2y} = 0 \end{cases}$$

Igualando exponentes:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{x-y} = \dfrac{6}{y} \\ x = 1 + 2y \end{cases}$$

Por sustitución se obtiene:

$$x = 7, \; y = 3$$

j) $\begin{cases} 2\cos 2x = \text{tg } y \\ 4 \text{ sen}^2 2x - 2 \text{ tg } y = 1 \end{cases}$

Sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$4 \text{ sen}^2 2x - 4 \cos 2x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(1 - \cos^2 2x) - 4 \cos 2x = 1$

Se obtiene una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$\cos 2x = -\dfrac{12}{8} \Rightarrow$ No existe solución.

$\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Las soluciones que se obtienen son:

$$\begin{cases} x = 30° + k \cdot 180° \\ x = 150° + k \cdot 180° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Y para el valor de y se obtiene $\text{tg } y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 45° + k \cdot 180°$

3. Cambio de base logarítmica

1 $\log_3 45 = \dfrac{\log 45}{\log 3} = 3{,}465$

2 $\log_{1/\sqrt{2}} 25 = \dfrac{\log 25}{\log 1/\sqrt{2}} = \dfrac{\log 25}{-(1/2) \log 2} = -9{,}288$