PROBLEMAS DE NUMEROS COMPLEJOS

<u>**Conjugado, opuesto, representaciones gráficas. Tipos de complejos.**</u>

1. Clasifica los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Di, para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria. a) (3i); b) 1/3-5/2 i; c) 6/5; -3i; d) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ i]; e) 0; f) i; g) (1/3)-i; h) -15.

2. Escribe tres números complejos imaginarios puros, tres números imaginarios y tres números reales.

3. Representa gráficamente los números complejos: a) (3+4i); b) -4; c) -2i; d) (-2+3i); e) (1+3i); f) (6-i); g) -2; h) 3i; g) (-1+i).

4. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de: a) -3+5i; b) 3-2i; c) 1-2i; d) -2+i; e) 6; f) 5i; g) 3; h) -4i.

5. Indica cuáles de los siguientes números son reales, imaginarios o complejos: a) -9; b) -3i; c) -3i+1; d) $\sqrt{3}$ +(1/2)i; e) (1/3)i; f) $\sqrt{2}$; g) -2i; h) (1+3i). Sol: R, I, C, C, I, R, I, C

6. Representa gráficamente los afijos de todos los números complejos z tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga dos; es decir: z+z' = 2. Sol: recta x = 1

7. Representa gráficamente los números complejos z tales que z-z' = 2. ¿Qué debe verificar z?. Sol: es imposible

8. Representa gráficamente los opuestos y los conjugados de a) -2-i; b) 1+i; c) 3i.

9. Escribe en forma trigonométrica y polar los complejos: a) 4+3i; b) -1+i; c) 5-12i. Sol: a)$5_{71,56°}$; b) $\sqrt{2}_{\,135°}$; c) $13_{292,6°}$

10. Escribe en las formas binómica y trigonométrica los números complejos: a) $3_{\pi/3}$; b) $3_{135°}$; c) $1_{270°}$. Sol: a) 3(cos60+isen60) = 3/2+3$\sqrt{3}$/2 i; b) 3(cos135+isen135) = -3$\sqrt{2}$ /2 +3$\sqrt{2}$ /2 i; c) cos270+isen270 = -i

11. Calcula tres argumentos del número complejo 1-i. Sol: a) 315º, 675º; 1035º

12. ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo cualquiera r_{α}. Sol: $r_{360-\alpha}$.

13. Expresa en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo: $6_{30°}$. Sol: a) $6_{330°}$, (3$\sqrt{3}$-3i); b) $6_{210°}$, (-3$\sqrt{3}$-3i)

14. Escribe en forma módulo-argumental (polar) los números complejos: a) 6-8i; b) $\sqrt{2} + \sqrt{14}\,i$; c) -3 + 4i. Sol: a) $10_{306,9^\circ}$; b) $4_{69,3^\circ}$; c) $5_{126,9^\circ}$

15. Escribe en forma binómica el complejo R = 2(cos45° + isen45°). Represéntalo gráficamente. Sol: a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

16. El módulo de un número complejo es 5 y su argumento 600°. Escribe el número en forma trigonométrica. Sol: 5(cos240 + isen240)

17. ¿Qué argumento tiene el siguiente número complejo?: 4(3-2i) + 5(-2 + i).
Sol: 303,7°

18. Averigua como debe ser un complejo $r_{á}$ para que sea: a) un número real; b) un número imaginario puro. Sol: a) á = 0 + kð; b) á = 90 + kð

19. Escribe en forma polar: a) $1 + \sqrt{3}i$; b) $-1 + \sqrt{3}i$; c) $1-\sqrt{3}i$; d) $-1-\sqrt{3}i$; e) $3\sqrt{3} + 3i$; f) $-3\sqrt{3}-3i$. Sol: a) 2_{60}; b) 2_{120}; c) 2_{300}; d) 2_{240}; e) $\sqrt{6}_{30}$, f) $\sqrt{6}_{210}$

20. Escribe en forma binómica: a) 2_{60} ; b) $1_{(3ð/2)}$; c) 5_{450°; d) 2_{180°; e) 4_{750°; f) $6_{(ð/3)}$. Sol: a) $(1 + \sqrt{3}i)$; b) -i; c) 5i; d) -2; e) $(2\sqrt{3} + 2i)$; f) $(3 + 3\sqrt{3}i)$

21. Escribe todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1,2) y radio 5. Sol: (5 cosá + 1,(5 -senaá + 2)i)

22. Escribir en forma polar y trigonométrica los números complejos: a) $\sqrt{3} + 3i$; b) -1-i; c) 2-2i.
Sol: a) $\sqrt{12}_{60^\circ}$, $\sqrt{12}$ (cos60° + isen60°); b) $\sqrt{2}_{225^\circ}$, $\sqrt{2}$ (cos225° + isen225°); c) $2\sqrt{2}_{315^\circ}$, $2\sqrt{2}$ (cos315 + isen315)

23. Escribe en forma binómica y trigonométrica los números complejos: a) $6_{ð/3}$, b) 2_{45°, c) 2_{300°. Sol: a) $6(\cos 60 + i\text{sen}60) = (3, 3\sqrt{3}i)$; b) $2(\cos 45 + i\text{sen}45) = (\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)$; c) $2(\cos 300 + i\text{sen}300) = 1-\sqrt{3}\,i$

24. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de: a) -3-i; b) 1 + i; c) + 3i.

25. Escribir en forma binómica: 6(cos30° + isen30°). Sol: $3\sqrt{3}$-3i

26. Hallar el módulo y el argumento de: a) (1 + i)/(1-i). b) (1 + i)(2i).
Sol: a) 1_{90}; b) $\sqrt{8}_{135}$

27. ¿Qué figura representan en el plano los puntos que tienen de coordenadas polares $(3,_{á})$, á variable? ¿y los que tienen (r,90°), r variable?.
Sol: a) circunferenciade centro (0,0) y radio 3; b) semieje OY positivo

28. dado z = r_{α}. Expresar en forma polar: a) -z, b) z^{-1}, c) el conjugado de z, d) z^3.
Sol: a) $r_{180+\alpha}$; b) $(1/r)_{-\alpha}$; c) $r_{-\alpha}$; d) $r^3_{3\alpha}$

Sumas, Restas, Productos, Divisiones. Mixtos

1. Efectúa las siguientes operaciones entre números complejos: a) (2+3i)+(4-i); b) (3+3i) - (6+2i); c) (3-2i) + (2+i) - 2(-2+i); d) (2-i)-(5+3i) + (1/2)·(4-4i).
Sol: a) (6+2i); b) (-3+i); c) (9-3i); d) -1-6i

2. Multiplica los siguientes números complejos: a) (1+2i)·(3-2i); b) (2+i) · (5-2i); c) (i+1)·(3-2i)·(2+2i); d) 3·(2-i)(2+3i)·i.
Sol: a) 7+4i; b) 12+i; c) 8+12i; d) -12+21i

3. Efectúa las siguientes divisiones de números complejos: a) (2+i)/(1-2i); b) (7-i)/(3+i); c) (5+5i)/(3-i); d) (3-i)/(2+i); e) (18-i)/(3+4i). Sol: a) i; b) 2-i; c) 1+2i; d) 1-i; e) 2-3i

4. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica: a) 5-3·[3+(2/3)i]; b) [2i · (-i+2)] / (1+i); c) $[(-2i)^2$·(1+3i)]/(4+4i); d) [(1+3i)·(1+2i)]/(1+i). Sol: a) -4-2i; b) 3+i; c) -2-i; d) 5i

5. Dado el número complejo z=2+2i, calcula y representa: a) su conjugado (z'); b) la suma z+z'; c) el producto z·z'. Sol: a) 2-2i; b) 4; c) 8

6. Calcula: a) (3+i)·(2+i)-(1-i)·(2-2i); b) (3-2i)+(1+2i)·(6-2i)-(2-i); c) (3+2i)+(2-4i)·6. Sol: a) (5+9i); b) 11+9i; c) 15-22i

7. Efectúa los siguientes productos y expresa el resultado en forma polar y binómica: a) (cos30° + isen30°)·[2(cos15° + isen15°)]; b) [2(cos23° + isen23°)] · [3(cos37° + isen37°)]; c) [5(cos33° + isen33°)]·$2_{57°}$; d) (2+2i)·(1-i); e) (3+4i)·$1_{180°}$. Sol: a) $2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$; b) $6_{60°} = 3\sqrt{3} + 3i$); c) $10_{90°} = 10i$; d) $4_{0°} = 4$; e) $5_{233°} = -3-4i$

8. Efectúa las siguientes operaciones: a) $1_{150}\cdot 3_{30}$; b) $6_{60}:2_{15}$; c) $2_{20°}\cdot 1_{30}\cdot 2_{70}$; d) $6_{(2\pi/3)}:3_{90°}$; e) $(5_{\pi/9})^9$; f) $(2+2i)^4$. Sol: a) $3_{180°}$; b) $3_{45°}$; c) $4_{120°}$; d) $2_{30°}$; e) $59_{180°}$; f) $64_{180°}$

9. Efectúa las siguientes operaciones: a) $2_{105°}\cdot 3_{85°}$; b) $4_{65°}:2_{15°}$; c) $5_{22°}\cdot 2_{28°}\cdot 1_{30°}$; d) $4_{150°}:2_{(\pi/2)}$; e) $(2_{20°})^3$; f) $(3_{60°})^4$.
Sol: a) 6_{190}; b) 2_{50}; c) 10_{80}; d) 2_{60}; e) 8_{60}; f) 81_{240}

10. Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado: a) $2_{(\pi/2)}$, b) 4i; c) -3+i.
Sol: a) $(1/2)_{(-\pi/2)}$; b) -0,25i; c) (-3/10)-(1/10)i

11. ¿Cómo es gráficamente el inverso de un número complejo?. ¿Cuál es su módulo?. ¿Y su argumento?. Sol: a) perpendicular; b) módulo=(1/r), argumento=-α

12. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{3_{45}\ 2_{15}}{6_{30}}$ b) $\dfrac{2_{30}\ 3_{60}}{3_{120}\ 1_{300}}$ c) $\dfrac{2_{45}\ 2_{15}}{4_{90}}$

Sol: a) 1_{30°; b) 2_{30°; c) 1_{330}

13. Efectúa algebraica y gráficamente las operaciones con números complejos: a) (3 + 2i) + (2-3i); b) (-3 + 2i) + (-2-i); c) (2-i)·i; d) (-2 + i)·i.

Sol: a) (5-i); b) (-5 + i); c) (1 + 2i); (-1-2i)

14. Calcular los siguientes productos: a) 2(cos23° + isen23°)·5(cos12° + isen12°). b) (1 + i)·(2_{30°). c) 2(cos18° + isen18°) ·(3_{22°).

Sol: a) 10(cos35 + isen35); b) (-1 + $\sqrt{3}$) + (1 + $\sqrt{3}$)i; c)6_{40°

15. Resolver las ecuaciónes: a) x^3-27 = 0. b) x^5 + 32 = 0.

Sol: a) x = 3; x = 3_{120}; x = 3_{240}; b) $2_{36 + 72k}$

16. Dados z = (1,3), w = (2,1) Hallar z-w; z·w; z^{-1}.

Sol: a) -1 + 2i; b) -1 + 7i; c) (1/10)-(3/10i)

17. Dados z = -1 + 3i, w = -2 + i. Calcular y representar a) z + w; b) z·w; c) z^2, d) z + w'; e) z/w.

Sol: a) -3 + 4i; b) -1-7i; c) -8-6i; d) -3 + 2i; e) 1-i

18. Efectua las siguientes operaciones: a) $6_{90^\circ}\sqrt{2}_{15^\circ}$. b) $8_{120^\circ}/4_{\pi/2}$.

Sol: a) 3_{75}, b) 2_{30}

19. Halla $\dfrac{i^{32}\cdot i^{17}}{i^2\cdot i^3}$ Sol: 1

20. Halla el módulo de los complejos:

a) z = -2i(1 + i)(-2-2i)(3); y b) $w = \dfrac{(2-i)\ (-1+2i)}{(1-i)\ (1+i)}$ Sol: a) 24; b) 5/2

21. Representa gráficamente las sumas: a) (-i) + (3-i); b) (-2 + i) + (3-2i).

22. Represента gráficamente el número complejo 3-2i. Aplícale un giro de 90° alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número complejo?. Multiplica ahora 3-2i por i. Sol: 2 + 3i; 12 + 5i

23. Halla el módulo de $z = \dfrac{2-4i}{4+2i}$. Sol: |z| = 1

Ecuaciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y di en qué campo numérico tienen solución: a) x^2 + 4 = 0; b) x^2-9 = 0; c) x^2 + 1 = 0.

Sol: a) $\pm 2i$; b) ± 3; c) $\pm i$

2. Resuelve las ecuaciones: a) $x^2-2x+5=0$; b) $x^2-6x+13=0$; c) $x^2-4x+5=0$.
Sol: a) $1\pm 2i$; b) $3\pm 2i$; c) $2\pm i$

3. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=2$ y la recta $y=x$. ¿Son soluciones reales o imaginarias?. Sol: reales: (1,1), (-1,-1)

4. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la recta $y=x-3$. ¿Son soluciones reales o imaginarias?.
Sol: imaginarias $x=3/2\pm(\sqrt{5}/2)i$

5. ¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones de estas ecuaciones?. a) $x^2-3x+2=0$; b) $x^2-2x+2=0$; c) $2x^2-7x+3=0$; d) $(x^2/2)+8=0$.
Sol: a) Real, $x=2$, $x=1$; b) Imaginaria $x=1\pm i$; c) Real, $x=1/2$, $x=3$; d) Imaginaria, $x=\pm 4i$

6. Calcula los puntos de intersección de la elipse $(x^2/4)+(y^2/9)=1$ con la recta $x=5$.
Sol: $\pm 9/4\ i$

7. Resuelve las ecuaciones siguientes indicando el campo numérico al que pertenecen las soluciones: a) $x^2-4=0$; b) $x^2-5=0$; c) $x^2+1=0$.
Sol: a) ± 2; b) $\pm\sqrt{5}$; c) $\pm i$

8. Resuelve las ecuaciones: a) $x^2-10x+29=0$; b) $x^2-6x+10=0$; c) $x^2-4x+13=0$.
Sol: a) $5\pm 2i$; b) $3\pm i$; c) $2\pm 3i$

9. Representa gráficamente las raíces de las ecuaciones: a) $x^2+4=0$; b) $x^2+1=0$; c) $x^2-9=0$; d) $x^2+9=0$. Sol: a) $\pm 2i$; b) $\pm i$; c) ± 3; d) $\pm 3i$

10. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $2+2i$ y $2-2i$. (Recuerda: $x_1 \cdot x_2=(-b/a)$; $x_1+x_2=(c/a)$. Sol: $x^2-4x+8=0$

11. Resuelve la ecuación $x^3+27=0$. Representa gráficamente todas sus soluciones. Sol: $x=3_{180°}$, $x=3_{300°}$, $x=3_{60°}$

12. Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2-2x+17=0$. Tiene dos raíces complejas. ¿Cómo son entre sí?. ¿Se puede generalizar el resultado?.
Sol: a) $1\pm 4i$; b) conjugadas; c) sí

13. Resuelve las ecuaciones: a) $x^3-8=0$; b) $x^5-32=0$; c) $x^4-81=0$; d) $x^3-1=0$.
Sol: a) $x=2_{120k}$; b) $x=2_{72k}$; c) $x=\pm 3$; $x\pm 3i$; d) $x=1$, $x=1_{120}$, $x=1_{240}$

14. Resuelve la ecuación $x^2-4x+5=0$ y comprueba que, en efecto, las raíces obtenidas verifican dicha ecuación. Sol: a) $2\pm i$

15. Resuelve las ecuaciones $x^6+64=0$ y $x^4+81=0$.
Sol: a) $x=2_{90+60k}$; b) $x=3_{45+90k}$

16. Escribe una ecuación de raíces $1+3i$, $1-3i$. Sol: $x^2-2x+10=0$

17. Probar que $3+i$ y $3-i$ son raíces de la ecuación $x^2-6x+10$.
Sol: $[x-(3+i)]\cdot[x-(3-i)]=x^2-6x+10$

18. Resolver la ecuación: a) $x^4+1=-35$. Sol: $x=\sqrt{3}\pm\sqrt{3}i$; $x=-\sqrt{3}\pm\sqrt{3}i$

Potencias, raíces. Mixtos

1. Calcula las potencias: a) $(2-3i)^3$; b) $(3+i)^2$; c) i^{23}; d) $(2+2i)^4$.
Sol: a) $-46-9i$; b) $8+6i$; c) $-i$; d) -64

2. Calcula: a) i^{27}; b) i^{48}; c) i^7; d) i^{12}; e) i^{33}; f) i^{35}.
Sol: a) $-i$; b) 1; c) $-i$; d) 1; e) i; f) $-i$

3. Sabemos que $z_1=3-2i$, que $z_2=4-3i$ y que $z_3=-3i$. Calcular: a) $z_1+2z_2-z_3$; b) $z_1\cdot(z_2+z_3)$; c) z_2^2; d) $2z_1-z_2+z_3$.
Sol: a) $11-5i$; b) $-26i$; c) $7-24i$; d) $2-4i$

4. Calcula: a) $(1+2i)^3$; b) $(-3-i)^4$; c) $(1-3i)^2$. Sol: a) $-11-2i$; b) $28+96i$; c) $-8-6i$

5. Calcula: a) i^{210}; b) i^{312}; c) i^{326}; d) i^{1121}. Sol: a) -1; b) 1; c) -1; d) i

6. Calcula a) $(1+i)^3$; b) $(1-i)^3$; c) $(-1+i)^3$; d) $(-1-i)^3$. Sol: a) $-2+2i$; b) $-2-2i$; c) $2+2i$; d) $2-2i$

7. Calcula: a) $1/i^3$; b) $1/i^4$; c) i^{-1}; d) i^{-2}. Sol: a) i; b) 1; c) $-i$; d) -1

8. Dados los complejos: $z_1=3_{45^\circ}$; $z_2=2_{30^\circ}$ y $z_3=-2i$. Calcula: a) $z_1\cdot z_3$; b) $z_1\ /\ (z_2)^2$; c) $(z_1)^2/[z_2\cdot(z_3)^3]$. Sol: a) 6_{315°; b) $(3/4)_{-15^\circ}$; c) $(9/16)_{330^\circ}$

9. Calcula, expresando el resultado en forma polar: a) $(1+i)^6$; b) $[(-1/2)+(\sqrt{2}/2)i]^8$; c) $(1-i)^4$. Sol: a) 8_{270°; b) 1_{240°; c) 4_{180°

10. Calcula las potencias: a) $[2(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ)]^4$; b) $(\sqrt{2}_{30^\circ})^6$; c) $[\sqrt[4]{3}(\cos 10^\circ+i\operatorname{sen}10^\circ)]^8$.
Sol: a) 16_{180}; b) $8_{180^\circ}=-8$; c) 9_{80°

11. Calcula las raíces quintas de la unidad. Hazlo expresando 1 como complejo en forma polar.
Sol: 1_{0°; 1_{72°; 1_{144°; 1_{216°; 1_{288°

12. Calcula: a) $\sqrt{-i}$; b) $\sqrt[3]{1+i}$; c) $\sqrt{-16}$
Sol: a) 1_{135°; 1_{315°; b) $\sqrt[6]{2}_{15^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{135^\circ}$. $\sqrt[6]{2}_{255^\circ}$; c) 4_{90}, 4_{270}

13. Calcula $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1-\sqrt{3}\ i}}$. Sol: $1/\sqrt[6]{2}_{\,5+120k}$

14. Calcula las raíces siguientes y representa gráficamente las soluciones: a) $\sqrt{-4}$; b) $\sqrt[3]{-27}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{1-i}}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{i}}$

Sol: a) $2_{90°}$, $2_{270°}$; b) 3_{60}, 3_{180}, 3_{300}; c) 1_{30}, 1_{150}, 1_{270}; d) 3_{30}, 3_{150}, 3_{270}

15. Calcula las raíces: a) $\sqrt{4\ (\cos 60” + i\ sen60”)}$; b) $\sqrt[3]{27\ (\cos 180” + i\ sen180”)}$; c) $\sqrt[4]{81\ (\cos 120” + i\ sen120”)}$; d) $\sqrt[6]{i}$. Sol: a) 2_{30}, 2_{210}; b) 3_{60}, 3_{180}, 3_{300}; c) 3_{40+90k}; d) 1_{15+60k}

16. ¿De qué número es $(2+3i)$ raíz cúbica?. Sol: $-46+9i$

17. a) Opera la expresión $(1+3i)^2 \cdot (3-4i)$ y b) calcula las raíces cúbicas del resultado. Sol: a) 50i; b) $\sqrt[3]{50}_{\,30+120k}$

18. Calcula el valor de $(i^4-i^3)/8i$ y encuentra sus raíces cúbicas. Sol: $(1/2)_{105+120k}$

19. Calcula: a) $(1+i)^8$; b) $(-1+i)^6$; c) $(1+\sqrt{3}i)^2$; d) $(-2-2i)^4$.
Sol: a) 16_0; b) 8_{90}; c) 10_{120}; d) 64_{180}

20. Calcula $(i^4+i^5)/\sqrt{2}\ i$. Escribe el resultado en forma polar. Sol: 1_{315}

21. a) Calcula $(\cos 10° + i sen 10°)^8$; b) Si una raíz cúbica de un número es 2i, calcula las otras dos raíces y ese número. Sol: a) 1_{80}; b) 2_{210}, 2_{330}; $-8i = 8_{270}$

22. Hallar las raíces cúbicas de los complejos: a) $2+2i$; b) $1+\sqrt{3}$; c) $-2+2\sqrt{3}i$.
Sol: a) $\sqrt{2}_{\,15°}$, $\sqrt{2}_{\,135°}$, $\sqrt{2}_{\,255°}$; b) $\sqrt[6]{2}_{\,20+120k}$; c) $\sqrt[3]{2}_{\,40+120k}$

23. Calcula: $z = \sqrt[3]{\dfrac{8}{2-2i}}$ Sol: $\sqrt{2}_{\,15+120k}$

24. Hallar las raíces cúbicas de a) -1 y b) -i.
Sol: a) 1_{60}, 1_{180}, 1_{300}; b) 1_{90}, 1_{210}, 1_{330}

25. Calcular la siguiente operación expresando las tres raíces en foma polar:
$\sqrt[3]{\dfrac{3+3i}{-3+3i}}$
Sol: 1_{90}; 1_{210}; 1_{330}

26. Calcular: a) i^{14}, i^{18}, i^{33}. b) Si $z_1 = 2-2i$; $z_2 = 1+3i$; y $z_3 = 2i$. Hallar: $2z_1 - z_2 + 2z_3$; $z_1 \cdot (z_2 - z_3)$; $(z_1)^2$. c) Hallar: $(1+2i)^3$. d) Hallar x para que se verifique que $(x-i)/(2+i)$

= 1-i.

Sol: a) -1, -1, i; b) 3-3i, 4, -8i; c) -11-2i; d) x = 3

27. Calcular $\sqrt[3]{-27i}$. Sol: 3_{90}, 3_{210}, 3_{330}

28. Calcula las siguientes potencias: a) $[2(\cos 25 + i\,\text{sen}25)]^4$. b) $(\sqrt{3}_{30°})^8$.
Sol: a) $16_{100°}$; b) $81_{240°}$

29. Hallar el módulo de: $5.(i^2 + i^{-3})/(i^2-3i)$. Sol: $z = -1-2i$; $|z| = \sqrt{5}$

30. Calcular $(-2 + 2i)^{64}$ Sol: $8^{32}{}_{8640} = 8^{32}$

31. Calcula el valor de $(i^3-i^{-3})/(2i)$ y halla sus raíces cúbicas.
Sol: a) -1; b) 1_{60}, 1_{180}, 1_{300}

32. a) Calcula el valor de la fracción $(z^3 + z)/(z^2 + 2)$ para $z = 1 + i$; b) Dar el valor de la misma fracción para $z' = 1-i$.
Sol: a) $1/2 + i$; b) $1/2-i$

33. Calcula sin desarrollar los binomios y expresa el resultado en forma binómica: a) $(1 + i)^4$, b) $(1 + \sqrt{3}i)^6$.
Sol: a) $4_{180} = -4$; b) $64_0 = 64$

34. Hallar el conjugado del opuesto de a) $(1-2i)^3$; b) $25/(3 + 4i)$; c) $((2 + i)/(1-2i))^2$.
Sol: a) $11 + 2i$; b) $-3-4i$; c) 1

35. Calcular el valor de $(z^2 + z-1)/(z^2-2z)$ para $z = 1 + i$.
Sol: $-3/2\ i$

36. Hallar: a) $(1 + i)^{20}$, b) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$, c) $(-\sqrt{3}-i)^{12}$ y expresar el resultado en forma polar y binómica. Sol: a) $2^{10}{}_{180} = -2^{10}$; b) $4^{30}{}_{180°} = -4^{30}$; c) $2^{12}{}_{0°} = 4096$

37. Hallar $z = (\cos 20 + i\,\text{sen}20)^{10}$, $w = (\cos 50 - i\,\text{sen}50)^{30}$ y expresar el resultado en forma binómica. Hallar z^{-1} y el conjugado de w. Sol: $z = (\cos 200 + i\,\text{sen}200)$; $w = (\cos 300 + i\ \text{sen}300) = 1/2-\sqrt{3}/2\ i$; $z^{-1} = 1_{160}$; $w' = 1/2 + \sqrt{3}/2\ i$

38. Hallar el módulo y el argumento de $\left(\dfrac{2+2i}{2-2i}\right)^4$ Sol: $1_{360} = 1$

39. Hallar las raíces quintas de: a) 1, b) -1, c) 1/32, d) 243i, e) -32i, f) $\sqrt{3} + i$.
Sol: a) $1_{0 + 72k}$; b) $1_{36 + 72k}$; c) $(1/2)_{0 + 72k}$; d) $3_{18 + 72k}$; e) $2_{36 + 72k}$; f) $\sqrt[5]{2}_{\,6 + 72k}$

40. Hallar la raíz cuadrada de los complejos: a) $5 + 12i$ y b) $1/(3 + 4i.)$ Sol: a) $3 + 2i$; $-3-2i$; b) $2/5-1/5i$; $-2/5 + 1/5i$

41. Calcular y representar los afijos de las raíces cúbicas de $\frac{2\,i^{9} + i^{-7}}{3\,i}$. Expresar el resultado en forma binómica. Sol: 1, -1/2 + $\sqrt{3}$/2 i, -1/2- $\sqrt{3}$/2 i

Incógnitas reales o complejas

1. ¿Cuánto debe valer x para que el número $(1 + xi)^2$ sea imaginario puro?.
Sol: x = "1

2. Calcula los números x e y para que se verifique la igualdad: (3 + xi) + (y + 3i) = 5 + 2i. Sol: x = -1; y = 2

3. Determina el valor de x para que se verifique la igualdad: (x-i)/(1-i) = (2 + i). Sol: x = 3

4. Calcula los números reales x e y para que se verifique (-4 + xi)/(2-3i) = (y-2i). Sol: x = -7; y = 1

5. Determina x para que el producto (3 + 2i)A(6 + xi) sea: a) un número real; b) un número imaginario puro. Sol: a) x = -4; b) x = 9

6. Determinar los números reales x e y para que se cumpla: $\frac{x + 2i}{1 - i} + y\,i = 1$. Sol: x = 4; y = 3

7. Calcular a para que el complejo z = (4 + ai)/(1-i) sea: a) Imaginario puro. b) Real. Sol: a) a = 4; b) a = -4

8. Hallar el módulo y el argumento del número complejo: z = (x + i)/(x-i), x perteneciente a R. Sol: |z| = 1; È = 2á

9. Determinar x para que el módulo del complejo z = (x + i)/(1 + i) sea $\sqrt{5}$.
Sol: x = "3

10. Resolver: (4 + xi)/(2 + i) = y + 2i. Sol: x = 7, y = 3

11. Hallar el valor de x para que la operación (2-xi)/(1-3i) tenga sólo parte real, sólo parte imaginaria y para que su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, la parte real e imaginaria sean iguales.
Sol: x = 6, x = -2/3, x = 1

12. Hallar x para que el número (3-xi)A(2 + i) esté representado en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Sol: x = -1

13. Hallar x e y para que se cumpla: a) (x-i).(y + 2i) = 4x + i; b) (-4 + xi)/(2 + 2i) = y + 3i.
Sol: a) x = 2, y = 3; b) x = 8, y = 1

14. Hallar x, para que la expresión: z = (4+xi)/(2+i) sea: a) real, b) imaginario puro. Sol: a) x=2; b) x=-8

15. Hallar k, para que |z-2| = 3, siendo z=k+3i. Sol: k=2

16. Determina el valor real de x de modo que el afijo del producto de los números complejos 3+xi y 4+2i sea un punto de la bisectriz del primer cuadrante. Sol: x=1

17. Resolver el siguiente sistema: $\left\{ \begin{array}{r} (2+i)\,x + 2\,y \;=\; 1+7i \\ (1-i)\,x + i\;y \;=\; 0 \end{array} \right.$

Sol: x=1+i; y=2i

18. Resuelve las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos z es un número complejo; despéjalo y calcula su valor:

a) (2-2i)·z=10-2i; b) $\dfrac{z}{3+i} = 2-i$; c) $\dfrac{z}{3+4\,i} + \dfrac{2z+5\,i}{1-2\,i} = 2+2\,i$;

d) $\dfrac{z}{-z} + \dfrac{2z-2\,i}{1-i} = 3-2\,i$

Sol: a) 3+2i; b) 7-i; c) 4-3i; d) 1-2i

19. Despeja z y calcula su valor en las ecuaciones siguientes: a) [z/(1+i)]+(2-3i)=(4-4i); b) (3+i)/z=(1+2i); c) (2+2i)·z=(10+2i).

Sol: a) 3+i; b) 1-i; c) 3-2i

20. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes, en los que á y â son números complejos:

a) $\left\{ \begin{array}{r} \boldsymbol{a}i + (2+i)\,\boldsymbol{b} \;=\; -3+7i \\ (2-i)\,\boldsymbol{a} + (2+i)\,\boldsymbol{b} \;=\; 5+3i \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{r} \boldsymbol{a}(1+2i) + (1+i)\,\boldsymbol{b} \;=\; 5+5i \\ (2+i)\,\boldsymbol{a} + i\;\boldsymbol{b} \;=\; 2+2i \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{r} (1+i)\,\boldsymbol{a} + (2+i)\,\boldsymbol{b} \;=\; 9+2i \\ 2\,\boldsymbol{a} - i\;\boldsymbol{b} \;=\; 5-4i \end{array} \right.$

Sol: a) á=3+i; â=2i; b) á=1-i; â=3+i; c) á=3-i; â=2-i

21. Resuelve gráficamente el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} \left|\; z-(2+i) \;\right| \;=\; 2 \\ \left|\; z-(3+i) \;\right| \;=\; 3 \end{array} \right.$

22. Sea a=3-2i un número complejo dado y z un número complejo cuyo afijo permanece sobre la recta r: x+y-2=0. Hallar el lugar geométrico de los afijos del complejo a+z. Sol: x+y-3=0

23. Hallar el lugar geométrico de la imagen del complejo z, sabiendo que 2|z| = |z-i|. Sol: $a^2+b^2+(2/3)b-(1/3)=0$ (circunferencia)

24. Calcular z en las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{z}{1-2i} + 1-i = 2+i$ b) $\dfrac{z}{2+i} + \dfrac{z-i}{2-i} = 3-2i$

Sol: a) 5; b) 7/2-2i

25. Resolver el sistema (x e y son números complejos):

$$\begin{cases} (2+i)\,x + (1+i)\,y = 2+3i \\ (2-i)\,x - i\,y = 0 \end{cases}$$

Sol: x = i; y = 2-i

26. Hallar el número complejo z que cumpla: [z/(2-i)] + [(2z-5)/(2-i)] = 1 + 2i.
Sol: z = 3 + i

27. Hallar z tal que z^3 sea igual al conjugado de z. Sol: z = i, z = 1, z = -1, z = 0

28. Resolver la ecuación $(1-i)z^2-7 = i$. Sol: z = 2 + i y z = -2-i

Problemas y método de Moivre

Problemas

1. Si el producto de dos números complejos es -18 y dividiendo uno de ellos entre el otro, obtenemos de resultado 2i. ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?. Sol: 3_{45° y 6_{135°

2. El cociente de dos números complejos es 1/2 y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos. Sol: $(1/2)_{0^\circ}$; $(1/4)_{0^\circ}$

3. Aplica un giro de 90 sobre el punto A(3,1). Determina, utilizando el cálculo de números complejos, las coordenadas del punto que obtienes.
Sol: a) (-1,3)

4. La suma de dos números complejos conjugados es 6 y la suma de sus módulos 10. ¿De qué números complejos se trata?. Sol: (3 + 4i), (3-4i)

5. La resta de dos números complejos es 2 + 6i, y el cuadrado del segundo dividido por el primero es 2. Hallarlos. Sol: 4 + 2i, 6 + 8i; 4i, -2-2i

6. Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene de parte real 8 y su producto vale 11-16i. Sol: (3-2i); 2i

7. El producto de dos números complejos es -27. Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro. Sol: 3_{60°, 9_{120°.

8. La suma de dos números complejos es -5 + 5i; la parte real de uno de ellos es 1.

Determinar dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro. Sol: (1 + 3i) y (-6 + 2i) ó (1 + 2i) y (-6 + 3i)

9. La suma de dos complejos es 5-i y su producto es 8 + i. Hallar los números. Sol: 3-2i, 2 + i

10. La suma de dos complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos 10 ¿Cuáles son los números complejos?. Sol: (4 + 3i), (4-3i)

11. El producto de dos números complejos es -2 y el cubo de unos de ellos dividido por el otro es 1/2. Calcula módulos y argumentos. Sol: 1_{45°, 2_{135°; 1_{135°, 2_{45°; 1_{225°, 2_{315°; 1_{315°, 2_{225°

12. Halla z tal que: a) el conjugado de z (z') sea igual a -z. b) el conjugado de z sea igual a z^{-1}. c) la suma del conjugado de z mas z sea igual a 2. d) z menos el conjugado de z sea igual a 2i. Sol: a) z = ki; b) $a + bi/a^2 + b^2 = 1$; c) 1 + ki; d) k + i

13. El complejo de argumento 70° y módulo 8 es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento 40° y módulo 2. Escribir en forma binómica el otro complejo. Sol: $8_{30^\circ} = 4\sqrt{3} + 4i$

14. Determina el número complejo sabiendo que si después de multiplicarlo por (1-i) se le suma al resultado (-3 + 5i) y se divide lo obtenido por 2 + 3i se vuelve al complejo de partida. Sol: 1 + i

<u>Figuras geométricas</u>

15. Sabiendo que los puntos P, Q y R son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, siendo las coordenadas polares de P 3_{30°. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de Q y R y el número complejo. Sol: $Q = 3_{150^\circ} = -3\sqrt{3}/2 + 3/2\ i$; $R = 3_{270^\circ}$: -3i; 27i

16. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo $2_{\text{ð}/2}$. Sol: 2_{150}, 2_{210}, 2_{270}, 2_{330}, 2_{30}

17. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen de coordenadas) sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo 1_{120}. Sol: 1_{30°, 1_{210°, 1_{300°

18. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio 3 u, sabiendo que un vértice está situado en el eje OX. Sol: 3_{0°, 3_{60°, 3_{120°, 3_{180°, 3_{240°, 3_{300}

19. Los afijos de las raíces de un complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 2 u; el argumento de una de las raíces es 45°. Hallar el número complejo y las restantes raíces. Sol: 256; 2_{45}, 2_{90}, 2_{135}, 2_{180}, 2_{225}, 2_{270}, 2_{315}, 2_{0}

20. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo 1 + 2i. Sol: 2 + i, -2 + i, -1-2i

<u>Método de Moivre</u>

21. Expresa en función de cos á y sen á y utilizando la fórmula de Moivre: a) cos 2á y sen 2á; b) cos 3á y sen 3á. Sol: a) sen2á = 2senácosá; cos2á = cos^{2}á-sen^{2}á; b) sen3á = 3cos^{2}ásená-sen^{3}á; cos3á = cos^{3}á-3cosásen^{2}á

22. Encuentra las fórmulas para calcular sen 4á y cos 4á en función de sená y cosá. Sol: sen4á = 4senácos^{3}á-4cosásen^{3}á; cos4á = cos^{4}á + sen^{4}á-6cos^{2}ásen^{2}á

23. Hallar sen^3 5a y cos^2 5a sabiendo que sen a = 1/2 y a pertenece al primer cuadrante. Sol: sen^3 5a = 1/8; cos^{2}5a = 3/4

24. Si sen x = 1/3 y 0 < x < ð/2. Hallar sen 6x y cos 6x. Sol: sen6á = 460$\sqrt{2}$ /729; cos6á = -329/729