# Binomio de Newton

1. $\left(x+y\right)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$

$\left(x-y\right)^7=x^7-7x^6y+21x^5y^2-35x^4y^3+35x^3y^4-21x^2y^5+7xy^6-y^7$

$\left(3x+2\right)^4=81x^4+216x^3+216x^2+96x+16$

$\left(3x-2\right)^4=81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$

$\left(2x^3+5x\right)^3=8x^9+60x^7+150x^5+125x^3$

$\left(2x^3+5x\right)^3=8x^9-60x^7+150x^5-125x^3$

$\left(x+2\right)^7=x^7+14x^6+84x^5+280x^4+560x^3+672x^2+448x+128$

$\left(x^2+3\right)^6=x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$

$\left(2x^4+5x\right)^5=32x^{20}+400x^{17}+2000x^{14}+5000x^{11}+6250x^8+3125x^5$

$\left(2x^2+3y\right)^5=32x^{10}+240x^8y+720x^6y^2+1080x^4y^3+810x^2y^4+243y^5$

$\left(x-3\right)^5=x^5-15x^4+90x^3-270x^2+405x-243$

$\left(2x-4\right)^6=64x^6-768x^5+3840x^4-10240x^3+15360x^2-12288x+4096$

$\left(x^2-3x\right)^4=x^8-12x^7+54x^6-108x^5+81x^4$

$\left(3x-2y\right)^5=243x^5-810x^4y+1080x^3y^2-720x^2y^3+240xy^4-32y^5$

2. $\left(\sqrt{2}+1\right)^6=99+70\sqrt{2}$ ; $\left(2+\sqrt{3}\right)^5=362+209\sqrt{3}$ ; $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^5=109\sqrt{2}+89\sqrt{3}$ ;

$\left(\sqrt{5}-2\right)^4=161-72\sqrt{5}$ ; $\left(2\sqrt{3}-1\right)^3=-37+30\sqrt{3}$ ; $\left(3\sqrt{2}-2\right)^5=-4712+3372\sqrt{2}$ ;

$\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4=292-112\sqrt{6}$ ; $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^5=7848\sqrt{3}-9612\sqrt{2}$ ; $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^5=9612\sqrt{2}-7848\sqrt{3}$ ;

$\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^6=219032+69264\sqrt{10}$ ; $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^5=11240\sqrt{5}-17772\sqrt{2}$ ;

$\left(3\sqrt{x}-2x\right)^5=243x^2\sqrt{x}-810x^3+1080x^3\sqrt{x}-720x^4+240x^4\sqrt{x}-32x^5$ ;

$\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^5=\dfrac{101\sqrt{2}}{9}+\dfrac{241\sqrt{3}}{27}=\dfrac{303\sqrt{2}+241\sqrt{3}}{27}$ ; $\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^4=324$ ; $\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\dfrac{81}{4}$ ;

$\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^5=\dfrac{149}{2}-\dfrac{401\sqrt{2}}{8}=\dfrac{596-401\sqrt{2}}{8}$ ; $\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{1593}{64}-\dfrac{275\sqrt{2}}{16}$ ; $\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^4=\dfrac{892}{9}-\dfrac{112\sqrt{3}}{3}$ ;

$\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^5=\dfrac{101\sqrt{3}}{4}-\dfrac{241\sqrt{2}}{8}$ ; $\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^4=\dfrac{73-28\sqrt{6}}{9}$

3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5=x^5+5x^3+10x+\dfrac{10}{x}+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}$ ; $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4=x^4-8x^2+24-\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{16}{x^4}$ ;

www.yoquieroaprobar.es

$$\left(2x+\frac{y}{3}\right)^4=16x^4+\frac{32x^3y}{3}+\frac{8x^2y^2}{3}+\frac{8xy^3}{27}+\frac{y^4}{81};$$

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6=x^6+6x^4\sqrt{x}+15x^3+20x\sqrt{x}+\frac{6}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^3}+15;$$

$$\left(xy-\frac{1}{xy}\right)^4=x^4y^4-4x^2y^2+6-\frac{4}{x^2y^2}+\frac{1}{x^4y^4};\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^5=\frac{1}{x^5}-\frac{5}{x^7}+\frac{10}{x^9}-\frac{10}{x^{11}}+\frac{5}{x^{13}}-\frac{1}{x^{15}};$$

$$\left(2x-\frac{1}{x^3}\right)^6=64x^6-192x^2+\frac{240}{x^2}-\frac{160}{x^6}+\frac{60}{x^{10}}-\frac{12}{x^{14}}+\frac{1}{x^{18}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x\right)^5=\frac{1}{x^2\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+10\sqrt{x}-10x^2+x^3\sqrt{x}-x^5;$$

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5=x^2\sqrt{x}-5x\sqrt{x}+10\sqrt{x}-\frac{10}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2\sqrt{x}};$$

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=x^4-4x^2\sqrt{x}+6x-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$$

4. Cuarto término del desarrollo de $(x+y)^9$: $T_4=\binom{9}{3}x^6y^3=84x^6y^3$

   Quinto término del desarrollo de $(2x-y)^8$: $T_5=\binom{8}{4}(2x)^4(-y)^4=1120x^4y^4$

5. $T_6=\binom{9}{5}(3x)^4(-x^3)^5=-10206x^{19}$. Por tanto el grado del término sexto es 19.

6. $T_3=\binom{7}{2}(x^3)^5\left(-\frac{2}{x}\right)^2=21x^{15}\frac{4}{x^2}=84x^{13}$

7. $T_3=\binom{4}{2}\left(\frac{x^2}{9}\right)^2\left(\frac{1}{x^3}\right)^2=6\cdot\frac{x^4}{81}\cdot\frac{1}{x^6}=\frac{2}{27x^2}$

8. $T_7=\binom{12}{6}(3x^2)^6(-5x^4)^6=924\cdot 729\cdot 15625\cdot x^{36}=10524937500x^{36}$. Por tanto el grado del término central es 36.

9. Tercer término del desarrollo de $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^5$: $T_3=\binom{5}{2}(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right)^2=10x^6\frac{9}{x^2}=90x^4$

   Cuarto término del desarrollo de $\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^5$: $T_4=\binom{5}{3}(x^3)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^3=-10x^6\frac{1}{x^3}=-10x^3$

   Según el enunciado del ejercicio los dos términos coinciden:

$$90x^4=-10x^3\Rightarrow 90x^4+10x^3=0\Rightarrow 10x^3(9x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}10x^3=0\\9x+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-\frac{1}{9}\end{cases}$$

   La solución $x=0$ hay que descartarla pues en este caso no tendrían sentido las expresiones $\frac{3}{x}$ del primer desarrollo y $\frac{1}{x}$ del segundo.

www.yoquieroaprobar.es

10. $T_3=\binom{5}{2}\left(\frac{3}{x}\right)^3(-x)^2=90\Rightarrow 10\frac{27}{x^3}x^2=90\Rightarrow\frac{270}{x}=90\Rightarrow x=\frac{270}{90}\Rightarrow x=3$

11. $T_3=\binom{n}{2}\left(x^2\right)^{n-2}\left(\frac{3}{x}\right)^2=\binom{n}{2}x^{2n-4}\frac{9}{x^2}=9\binom{n}{2}x^{2n-6}$. Por tanto el grado del tercer término es $2n-6$. Como, según el enunciado, el tercer término es de segundo grado, debe ser $2n-6=2\Rightarrow 2n=8\Rightarrow n=4$.

    El desarrollo de la potencia del binomio es: $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4=x^8+12x^5+54x^2+\frac{108}{x}+\frac{81}{x^4}$

12. $T_2=\binom{n}{1}\left(x^2\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{x}\right)^1=-\frac{nx^{2n-2}}{x}=-nx^{2n-3}\Rightarrow 2n-3=11\Rightarrow n=7$;

    $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^7=x^{14}-7x^{11}+21x^8-35x^5+35x^2-\frac{21}{x}+\frac{7}{x^4}-\frac{1}{x^7}$

13. Hagamos el desarrollo: $\left(2x^2+\frac{5}{x}\right)^6=64x^{12}+960x^9+6000x^6+20000x^3+\frac{37500}{x^3}+\frac{15625}{x^6}+37500$

    Por tanto sí que hay un término que es de grado 3: $20000x^3$

14. $T_k=\binom{8}{k-1}(3x)^{8-(k-1)}\left(-x^2\right)^{k-1}=\binom{8}{k-1}(3x)^{9-k}(-1)^{k-1}\left(x^2\right)^{k-1}=$

    $=\binom{8}{k-1}(-1)^{k-1}3^{9-k}x^{9-k}x^{2k-2}=\binom{8}{k-1}(-1)^{k-1}3^{9-k}x^{k+7}$

    El significado de lo que acabamos de hacer es que el término que ocupa el lugar *k* tiene grado $k+7$. Observa que, en este ejercicio, todo el coeficiente se puede dejar indicado sin tener que hacer nada con él, porque lo que nos interesa es el grado del término que ocupa el lugar *k* (o lo que es lo mismo, el número al que está elevada la *x* en este término).
    Por tanto, si este término es de grado es 13, tenemos que $k+7=13\Rightarrow k=6$ y, entonces, el lugar que ocupa el término de grado 13 será el sexto.

15. $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$. El significado es que la suma de los elementos de la fila *n* del triángulo de Tartaglia es $2^n$.

16. $11^5=(10+1)^5=10^5+5\cdot10^4+10\cdot10^3+10\cdot10^2+5\cdot10+1=$

    $=100000+50000+10000+1000+500+1=161501$

17. $(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=$

    $=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

    $\left(2+x+x^2\right)^2=\left((2+x)+x^2\right)^2=(2+x)^2+2(2+x)x^2+\left(x^2\right)^2=4+4x+x^2+4x^2+2x^3+x^4=$

    $=x^4+2x^3+5x^2+4x+4$

    $(a+b+c)^3=((a+b)+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=$

    $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3\left(a^2+2ab+b^2\right)c+3ac^2+3bc^2+c^3=$

    $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3=$

    $=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$

www.yoquieroaprobar.es

18. $T_k=\binom{7}{k-1}\left(3x^2\right)^{7-(k-1)}\left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1}=\binom{7}{k-1}3^{8-k}\left(-1\right)^{k-1}\left(x^2\right)^{8-k}\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}=\binom{7}{k-1}3^{8-k}\left(-1\right)^{k-1}x^{16-2k}\frac{1}{x^{k-1}}=$

$=\binom{7}{k-1}3^{8-k}\left(-1\right)^{k-1}x^{17-3k}$

Si este término ha de tener grado 2, entonces $17-3k=2\Rightarrow -3k=-15\Rightarrow k=5$ y, por tanto, el lugar que ocupa el término de grado 2 es el quinto. Tal término es $T_5=\binom{7}{4}\left(3x^2\right)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^4 35\cdot 27x^6\frac{1}{x^4}=945x^2$

19. $T_k=\binom{6}{k-1}\left(x^3\right)^{6-(k-1)}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^{k-1}=\binom{6}{k-1}\left(-2\right)^{k-1}\left(x^3\right)^{7-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{k-1}=\binom{6}{k-1}\left(-2\right)^{k-1}x^{21-3k}\frac{1}{x^{2k-2}}=$

$=\binom{6}{k-1}\left(-2\right)^{k-1}x^{23-5k}$

Si este término ha de tener grado 8, entonces $23-5k=8\Rightarrow -5k=-15\Rightarrow k=3$ y, por tanto, el lugar que ocupa el término de grado 8 es el tercero. Tal término es $T_3=\binom{6}{2}\left(x^3\right)^4\left(-\frac{2}{x^2}\right)^2=15x^{12}\frac{4}{x^4}=60x^8$

20. $\binom{6}{3}=20$; $\binom{6}{5}=6$; $\binom{6}{4}=15$; $\binom{7}{5}=21$; $\binom{8}{4}=70$; $\binom{18}{14}=3060$; $\binom{100}{2}=4950$; $\binom{25}{20}=53130$;

$\binom{15}{10}=3003$; $\binom{9}{3}=84$; $\binom{12}{8}=495$; $\binom{10}{3}=120$

21. $\binom{x}{2}=21\Rightarrow\frac{x!}{2!(x-2)}=21\Rightarrow\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{2(x-2)(x-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}=21\Rightarrow\frac{x(x-1)}{2}=21\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-x=42\Rightarrow x^2-x-42=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=7\\x_2=-6\end{cases}$

$\binom{x}{2}-x=9\Rightarrow\frac{x!}{2!(x-2)}-x=9\Rightarrow\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{2(x-2)(x-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}-x=9\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{x(x-1)}{2}-x=9\Rightarrow x^2-x-2x=18\Rightarrow x^2-3x-18=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=6\\x_2=-3\end{cases}$

O bien $\binom{8}{x-2}=\binom{8}{6}\Rightarrow x-2=6\Rightarrow x=8$. O bien, por la propiedad $\binom{n}{m}=\binom{n}{m-n}$ tenemos que

$\binom{8}{x-2}=\binom{8}{6}=\binom{8}{2}\Rightarrow x-2=2\Rightarrow x=4$

22. Por un lado: $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}=\frac{9!}{3!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}=\frac{3^2\cdot 2^3\cdot 7}{3\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 5}{2}=\frac{2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7}{2^2\cdot 3}=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=1260$

Y por otro: $\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 4!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{3^2\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2}=\frac{2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}{2^5\cdot 3^2}=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=1260$

Por tanto $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}=\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 4!}$, tal y como se quería justificar.

23. a) $(x+2)^3-(x-2)^3=98\Rightarrow\left(x^3+6x^2+12x+8\right)-\left(x^3-6x^2+12x-8\right)=98\Rightarrow$

$\Rightarrow 12x^2+16=98\Rightarrow 12x^2=82\Rightarrow x^2=\frac{82}{12}=\frac{41}{6}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{41}{6}}$

www.yoquieroaprobar.es

b) $\sqrt[3]{x}+6=x \Rightarrow \sqrt[3]{x}=x-6 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3=(x-6)^3 \Rightarrow x=x^3-18x^2+108x-216 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3-18x^2+107x-216=0 \Rightarrow (x-8)\left(x^2-10x+27\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-8=0 \\ x^2-10x+27=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=8$ (solución única, pues la ecuación $x^2-10x+27=0$ no tiene soluciones reales)

24. $\begin{cases} (x+y)^2-(x-y)^2=8 \\ (x+y)^3=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2=8 \\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4xy=8 \\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=27 \end{cases}$

Despejando *y* de la primera ecuación se obtiene $y=\dfrac{2}{x}$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación tenemos:

$$x^3+3x^2\frac{2}{x}+3x\left(\frac{2}{x}\right)^2+\left(\frac{2}{x}\right)^3=27 \Rightarrow x^3+6x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^3}=27 \Rightarrow x^6+6x^4+12x^2+8=27x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^6+6x^4-27x^3+12x^2+8=0$$

Utilizando la regla de Ruffini podemos hallar fácilmente dos raíces: 1 y 2. Factorizando por tanto el polinomio $x^6+6x^4-27x^3+12x^2+8$, la última ecuación anterior se transforma en:

$$(x-1)(x-2)\left(x^4+3x^3+13x^2+6x+4\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x^4+3x^3+13x^2+6x+4=0 \end{cases}$$

Así pues las soluciones son $x=1$ y $x=2$. La ecuación $x^4+3x^3+13x^2+6x+4=0$ no tiene soluciones enteras, y si tiene otras que no sean enteras, no disponemos de los medios para calcularlas (¿alguien sabe resolver ecuaciones de cuarto grado?). Por último, hallemos las soluciones para *y*:

Si $x=1 \Rightarrow y=\dfrac{2}{1} \Rightarrow y=2$. Si $x=2 \Rightarrow y=\dfrac{2}{2} \Rightarrow y=1$

www.yoquieroaprobar.es