BLOQUE 2 EXAMEN 2: COMPLEJOS

EJERCICIO 1 **Halla dos complejos sabiendo que el primero es imaginario puro, que el módulo del segundo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y que su suma es igual a su producto.**

EJERCICIO 2 Calcula en forma polar dos complejos sabiendo que su producto es – 8 y que uno de ellos es el cuadrado del otro.

EJERCICIO 3 Determina k para que el complejo z = 3_{30^o}.(3 – ki) sea imaginario puro.

EJERCICIO 4 **Calcula :**

a) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$ b) $\left[\frac{i(-4-4i)}{4+4i}\right]^{10}$

EJERCICIO 5 Halla k para que $\frac{k+5i}{k+3i}$ **tenga módulo** $\sqrt{2}$

EJERCICIO 6 ¿Qué condición ha de cumplir un número complejo para que su conjugado sea igual a su inverso?

Ejercicio	1	2	3	4	5	6
Valor	*2*					
Calificación						

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 $z_1 = ai \quad z_2 = b + ci$

$|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$

$z_1 + z_2 = z_1.z_2 \quad b + (a + c)i = -ac + abi$ $\qquad$ $b = -ac$

$a + c = ab$

Resolvemos el sistema : sustituyendo b por –ac en ecuaciones 1ª y 2ª :

$a^2c^2 + c^2 = \frac{1}{2} \rightarrow c^2(1 + a^2) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a^2}{(1+a^2)^2}(1+a^2) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a^2 = 1 + a^2$

$a + c = -a^2c \rightarrow c(1 + a^2) = -a \rightarrow c = \frac{-a}{1+a^2}$ $\qquad$ $a^2 = 1 \quad a = 1, -1$

Si $a = 1 \quad b = -c \quad \rightarrow b = \frac{1}{2} \quad c = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\mathbf{z_1 = i \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

$1 + c = b$

Si $a = -1 \quad b = c \quad \rightarrow b = c = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\mathbf{z_1 = -i \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$

$-1 + c = -b$

EJERCICIO 2 $z_1 = r_\alpha \quad z_2 = s_\mu \quad -8 = 8_{180^o}$

$r_\alpha . s_\mu = 8_{180^o} \rightarrow rs_{\alpha+\mu} = 8_{180^o}$

$r_\alpha = (s_\mu)^2 \quad \rightarrow r_\alpha = s^2_{2\mu}$

SISTEMA 1 $\qquad$ *SISTEMA 2*

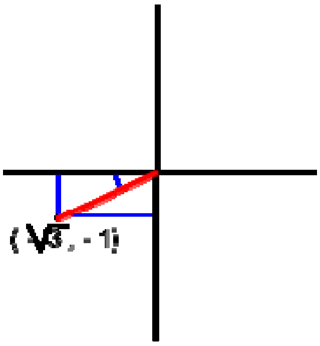
$\alpha + \mu = 180^o$ $\qquad$ $rs = 8$

$\alpha = 2\mu \quad \rightarrow \mu = 60^o \ \alpha = 120^o$ $\qquad$ $r = s^2 \rightarrow s = 2 \ r = 4$ $\quad$ $\mathbf{z_1 = 4_{120^o} \quad z_2 = 2_{60^o}}$

EJERCICIO 3 $3_{30^o} = 3(\cos 30^o + i\,\text{sen}30^o) = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)(3 - ki) = \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{3k}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}k}{2}\right)i$ Para que el complejo sea imaginario puro : $\frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{3k}{2} = 0$ $\mathbf{k = -3\sqrt{3}}$

EJERCICIO 4



a) Escribimos en polares $z = -\sqrt{3} - i$

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$\mathrm{Sen}\alpha = -\frac{1}{2}$ $\alpha = 210^{o}$ $z = 2_{210^{o}}$

Raiz	Módulo	Argumento
Z_1	$\sqrt[5]{2}$	42^{o}
Z_2	$\sqrt[5]{2}$	114^{o}
Z_3	$\sqrt[5]{2}$	186^{o}
Z_4	$\sqrt[5]{2}$	258^{o}
Z_5	$\sqrt[5]{2}$	330^{o}

b) $\frac{\mathbf{i(-4-4i)}}{\mathbf{4+4i}} = \frac{4-4i}{4+4i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}_{315}}{\sqrt{2}_{45}} = 1_{270^{o}}$ $(1_{270^{o}})^{10} = 1_{2700^{o}} = 1_{180^{O}}$

EJERCICIO 5

$\frac{\mathbf{k+5i}}{\mathbf{k+3i}} = \frac{(k+5i)(k-3i)}{(k+3i)(k-3i)} = \frac{k^2+15+2ki}{k^2+9}$ $\left(\frac{k^2+15}{k^2+9}\right)^2 + \left(\frac{2k}{k^2+9}\right)^2 = \mathbf{2}$

Se obtiene la ecuación bicuadrada $k^4 + 2k^2 - 63 = 0$ $\mathbf{k} = \pm\sqrt{\mathbf{7}}$

EJERCICIO 6 $z = a + bi$ $a - bi = \frac{1}{a+bi}$ $(a+bi)(a-bi) = 1$ $a^2 + b^2 = 1$

La condición que ha de verificar es $|z| = 1$