

## Números complejos

1. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a)  $2 + 3i$       b)  $-1 + i$       c)  $-2 - 2i$       d)  $4 - 3i$

[Sol] a)  $-2 - 3i, 2 - 3i$ ; b)  $1 - i, -1 - i$ ; c)  $2 + 2i, -2 + 2i$ ; d)  $-4 + 3i, 4 + 3i$ .

2. Completa la tabla:

| $z$      | $-z$      | $\bar{z}$ | $1/z$ |
|----------|-----------|-----------|-------|
| $2 - 3i$ |           |           |       |
|          | $-1 + 4i$ |           |       |
|          |           | $3 - 3i$  |       |
|          |           |           | $i$   |

[Sol] 1ª fila,  $-2+3i, 2+3i, \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ ; 2ª fila,  $1-4i, 1+4i, \frac{1}{17} + \frac{4}{17}i$ ; 3ª fila,  $3+3i, -3-3i, \frac{1}{6} - \frac{1}{6}i$ ; 4ª fila,  $-i, i, i$ .

3. Realiza las siguientes operaciones:

a)  $\left(-\frac{5}{3} - i\right) + \left(1 + \frac{3}{2}i\right)$       b)  $\left(-\frac{1}{4} - 6i\right) - \left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{2}i\right)$       c)  $(2 - i)\left(\frac{5}{2} + 3i\right)$   
d)  $(3 - i)\left(1 + \frac{3}{2}i\right)$       e)  $(-2i)\left(1 + \frac{3}{2}i\right)$       f)  $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$

[Sol] a)  $-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i$ ; b)  $1 - \frac{15}{2}i$ ; c)  $8 + \frac{7}{2}i$ ; d)  $\frac{9}{2} + \frac{7}{2}i$ ; e)  $3 - 2i$ ; f)  $13$

4. Calcula:      a)  $i^{10} + i^{141} + i^{15}$       b)  $(3 - 2i)^2$       c)  $\left(1 + \frac{3}{2}i\right)^2$       d)  $(-1 + 2i)^6$

[Sol] a)  $-1$ ; b)  $5 - 12i$ ; c)  $-\frac{5}{4} + 3i$ ; d)  $117 - 44i$ .

5. Dados  $z_1 = 3 - 2i, z_2 = -3 + i$  y  $z_3 = 5i$ , calcula:

a)  $z_1 + z_2 + z_3$       b)  $z_1 + 2z_2 - z_3$       c)  $z_1(z_2 + z_3) + z_3$   
d)  $\frac{z_2 - z_1}{z_3}$       e)  $(z_1 + 2z_3)(z_2 - z_1)$

[Sol] a)  $4i$ ; b)  $-3 - 5i$ ; c)  $3 + 29i$ ; d)  $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$ ; e)  $-42 - 39i$ .

6. Efectúa las siguientes operaciones:

a)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$       b)  $(2\sqrt{3} - 2i)^5$       c)  $\frac{2}{3-i}$       d)  $\frac{1+i}{1-i}$

[Sol] a)  $1$ ; b)  $-512\sqrt{3} - 512i$ ; c)  $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ ; d)  $i$ .

7. (PAU) a) ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo,  $z = a + bi$ , y el opuesto del conjugado del mismo número? Razone la respuesta.

b) Calcule los números  $x$  e  $y$  de modo que  $\frac{3 - xi}{1 + 2i} = y + 2i$ .

[Sol] a) son iguales; b)  $x = -16, y = 7$ .

8. Calcula en cada caso el valor que ha de tener  $k$  para que el resultado de la operación correspondiente sea un número imaginario puro:

a)  $(2-3i)(1+ki)$       b)  $(k+\sqrt{2}i)^2$       c)  $\frac{k-2i}{8+2i}$

[Sol] a)  $k = -\frac{2}{3}$ ; b)  $k = \pm\sqrt{2}$ ; c)  $k = \frac{1}{2}$ .

9. Calcula en cada caso el valor que ha de tener  $k$  para que el resultado de la operación correspondiente sea un número real:

a)  $(3+ki)(6-3i)$       b)  $\frac{k-2i}{5-6i}$       c)  $\frac{1+i}{k+2i}$

[Sol] a)  $k = \frac{3}{2}$ ; b)  $k = \frac{5}{3}$ ; c)  $k = 2$ .

10. Expresa en forma binómica:

a)  $2(\cos 135^\circ + i \sen 135^\circ) \cdot 3(\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ)$       b)  $[2(\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ)]^5$   
 c)  $\frac{4(\cos 240^\circ + i \sen 240^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ)}$       d)  $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sen \frac{5\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{4}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sen \frac{\pi}{3}\right)$

[Sol] a)  $-6$ ; b)  $-16\sqrt{3} + 16i$ ; c)  $-4\sqrt{3} - 4i$ ; d)  $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

11. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma binómica:

a)  $2_{210^\circ} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)_{60^\circ}$       b)  $\left(\frac{1}{3}\right)_{150^\circ} : 3_{30^\circ}$       c)  $(\sqrt{2})_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{\frac{4\pi}{3}}$

[Sol] a)  $-\frac{1}{2}i$ ; b)  $-\frac{1}{18} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$ ; c)  $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$

12. Si  $z = 4_{60^\circ}$  y  $z' = 2_{45^\circ}$  calcula:

a)  $z + z'$       b)  $z \cdot z'$       c)  $\frac{z}{z'}$       d)  $z^2 \cdot z'$       e)  $z^2 \cdot \bar{z}'$       f)  $(-z) \cdot z'$

[Sol] a)  $(2 + \sqrt{2}) + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})i$ ; b)  $8_{105^\circ}$ ; c)  $2_{15^\circ}$ ; d)  $32_{165^\circ}$ ; e)  $32_{75^\circ}$ ; f)  $8_{285^\circ}$

13. Encuentra la ecuación que tiene por raíces:

a)  $2 - i$  y  $2 + i$       b)  $2, -3, i$  y  $-i$

[Sol] a)  $z^2 - 4z + 5 = 0$ ; b)  $z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6 = 0$ .

14. Halla las soluciones, reales o complejas, de las ecuaciones:

a)  $z^2 - 2z + 5 = 0$       b)  $z^4 - 256 = 0$       c)  $z^4 + (1 - \sqrt{3}i) = 0$ .

[Sol] a)  $1 + 2i, 1 - 2i$ ; b)  $4, -4, 4i, -4i$ ; c)  $(\sqrt[4]{2})_{30^\circ}, (\sqrt[4]{2})_{120^\circ}, (\sqrt[4]{2})_{210^\circ}, (\sqrt[4]{2})_{300^\circ}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $z^5 - 1 = 0$       b)  $z^3 + 8 = 0$

[Sol] a)  $1_0^\circ; 1_{72^\circ}; 1_{144^\circ}; 1_{216^\circ}$  y  $1_{288^\circ}$ ; b)  $2_{60^\circ}; 2_{180^\circ}$  y  $2_{300^\circ}$ ;