# Ejercicios Números Complejos

**1)** Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+100=0$ b) $x^2-4x+13=0$

c) $x^2-10x+26=0$ d) $\dfrac{z-3}{2z-i}=1-i$

**2)** Escribe los siguientes números en la forma más sencilla:

a) $3i+2i^3$ b) $5i^2+2i^4$ c) $i-5i^3$
d) $2i^5+7i^7$ e) $i+i^3+i^5$ f) $4i+5i^8+6i^3+2i^4$
g) $i^{57}$ h) $i^2+i^{12}+i^8$ i) $i+i^2+i^3+i^4$

**3)** Realiza los siguientes productos en forma binómica:

a) $(1+5i)\cdot(1+2i)$ b) $(2-3i)^2$
c) $(-4-i)\cdot(-4+i)$ d) $(4-5i)\cdot(3-2i)$
e) $(3-i)\cdot\left(\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}i\right)$ f) $\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}i\right)\cdot(4+2i)$

**4)** Escribe en forma binómica el resultado de los siguientes cocientes:

a) $\dfrac{8+4i}{1+1}$ b) $\dfrac{2+2i}{4-2i}$ c) $\dfrac{5-15i}{3-i}$
d) $\dfrac{8+6i}{2i}$ e) $\dfrac{5-2i}{5+2i}$ f) $\dfrac{8+2i}{1+3i}$
g) $\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i}{3-4i}$ h) $\dfrac{\frac{1}{7}+i}{\frac{5}{i}}$ i) $\dfrac{1+i}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$

**5)** Halla los valores de *b* para que $|3+bi|=7$.

**6)** Halla una ecuación de 2º grado con coeficientes reales sabiendo que una de sus raíces es $z=-2+\sqrt{5}i$.

**7)** Determina el valor de *m* para que el número complejo $z=\dfrac{2-mi}{8-6i}$ sea:
a) Un número real.
b) Imaginario puro.
c) Tal que sus afijo esté situado sobre la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes.

**8)** Calcular *x* e *y* de modo que $\dfrac{x+yi}{2-i}=3+2ix$

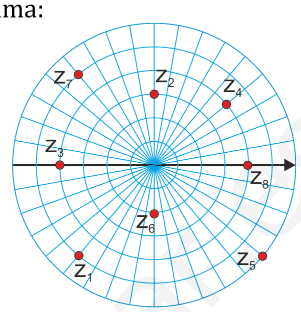
**9)** Dados los complejos $z_1=2-ai$ y $z_2=3-bi$, halla *a* y *b* para que $z_1\cdot z_2=8+4i$.

**10)** Halla una ecuación de 2º grado con coeficientes reales sabiendo que una de las soluciones es $z_1=4+4\sqrt{3}i$. Halla además $z_1^2-z_2^2$ siendo $z_2$ la otra solución.

**11)** Dados los números complejos: $z_1=k+2i$, $z_2=1-ki$ se pide:

a) Si $k$ va tomando todos los valores posibles, ¿qué figura formarán todos los afijos del número complejo $z_2$?
b) Calcular $k$ para que $z_1\cdot z_2$ sea real.
c) Para $k=1$, halla $\dfrac{z_1}{z_2}$.

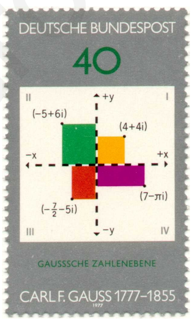
**12)** Escribe en forma polar los números complejos del siguiente diagrama:




**13)** Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

a) $-3i$ b) $-1-i$ c) $4-4\sqrt{3}i$
d) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{3}i$ e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$ $-3-3\sqrt{3}i$

**14)** La figura muestra el sello de la antigua República Federal Alemana, conmemorativo del segundo centenario del nacimiento de **Carl Friedrich Gauss**, matemático, astrónomo y físico alemán, considerado el matemático más grande desde la antigüedad.




Con la ayuda de una calculadora científica, expresa en forma polar los números complejos que aparecen en el sello. (4+4i) ; (-5+6i) ; (-7/2-5i) ; (7-πi)

**15)** Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

$5_{180^\circ}$ $2_{135^\circ}$ $4_{315^\circ}$ $3_{270^\circ}$
$2_{5\pi/6}$ $8_{11\pi/6}$ $\sqrt{3}_{5\pi/3}$ $10_{\pi}$
$-4(\cos 210^\circ+i\,\mathrm{sen}\,210^\circ)$ $\sqrt{3}(\cos 150^\circ+i\,\mathrm{sen}\,150^\circ)$

**16)** Hallar la forma polar del número complejo $z=1+\cos 2x+i\,\mathrm{sen}\,2x$.

**17)** Escribir en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

a) $z=2$ b) $z=-3$ c) $z=-2i$
d) $z=-1-\sqrt{3}i$ e) $2\sqrt{3}-2i$

**18)** Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma polar:

a) $z = \dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}i}$   b) $u = \dfrac{2i-2}{1-i\sqrt{3}}$   c) $v = \dfrac{(2-3i)-(3-2i)}{(3+2i)-(2+i)}$

**19)** Demuestra que $\sqrt{1+\sqrt{-3}} - \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{2}i$.

**20)** Sea $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

a) Comprueba que $|z| = 1$ y que $z^2 = \bar{z}$.

b) Deduce que $z^3 = 1$.

c) Calcula $z^{3002}$.

**21)** Si en una ecuación de segundo grado de coeficientes reales, una de sus raíces es $x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ :

a) Determinar la otra raíz.

b) Escribir dicha ecuación y hallar el módulo y el argumento de cada una de las raíces.

**22)** Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $2_{\pi/4}$ y $2_{5\pi/3}$.

**23)** Determinar $r_\alpha$ en los siguientes casos:

a) $2_{\pi/4} \cdot r_\alpha = 6_{\pi/2}$   b) $\dfrac{r_\alpha}{4_\pi} = 3_{\pi/4}$   c) $(r_\alpha)^4 = 16_\pi$

**24)** El número complejo de argumento $80^\circ$ y módulo 12 es el producto de dos complejos ; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento $50^\circ$. Escribir en forma binómica el otro complejo.

**25)** Dado el número complejo $z = 2_{60^\circ}$ , expresa su opuesto y su conjugado en forma binómica.

**26)** Hallar las raíces de la ecuación $x^2 - 2x + 4 = 0$ y expresarlas en forma polar.

**27)** Impedancia es la resistencia al flujo de corriente en un circuito eléctrico medida en ohmios. La impedancia, *Z*, en un circuito se obtiene usando la fórmula $Z = V/I$ donde *V* es el voltaje (medido en voltios) e I es la intensidad de corriente (medida en amperios).

a) Hallar la impedancia cuando $V = 1,8 - 0,4i$ voltios e $I = -0,3i$ amperios.

b) Hallar la intensidad de corriente que fluye cuando $V = 1,6 - 0,3i$ voltios y $Z = 1,5 + 8i$ ohmios.

**28)** Hallar el producto $z_1 \cdot z_2$ y el cociente $z_1/z_2$ expresando el resultado en forma polar:

a) $z_1 = 1_\pi$
  $z_2 = 1_{\pi/3}$

b) $z_1 = \cos 45^\circ + i sen 45^\circ$
  $z_2 = \cos 135^\circ + i sen 135^\circ$

c) $z_1 = 3_{\pi/6}$
  $z_2 = 5_{4\pi/3}$

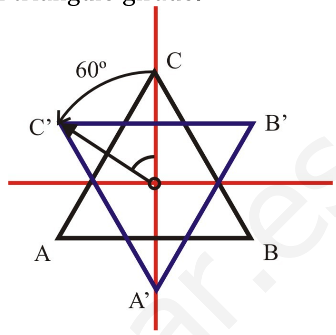
d) $z_1 = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + i sen 75^\circ)$
  $z_2 = 3\sqrt{2}(\cos 60^\circ + i sen 60^\circ)$

e) $z_1 = \left(\dfrac{4}{5}\right)_{25^\circ}$
  $z_2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)_{155^\circ}$

f) $z_1 = 7\left(\cos\dfrac{9\pi}{8} + i sen\dfrac{9\pi}{8}\right)$
  $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i sen\dfrac{\pi}{8}\right)$

**29)** El triángulo ABC de baricentro en el origen de coordenadas gira 60º alrededor del mismo hasta la posición A'B'C' tal como se muestra en la figura.

Si las coordenadas de los vértices son $A(-2\sqrt{3},-2)$, $B(2\sqrt{3},-2)$ y $C(0,4)$, determina las coordenadas de los vértices del triángulo girado.




**30)** Efectuar las siguientes potencias:

a) $(1+i)^{20}$   b) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$

c) $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^5$   d) $(1-i)^8$

e) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{-10}$   f) $(2+2i)^8$

g) $(-1-i)^7$   h) $\left(3+\sqrt{3}i\right)^4$

i) $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^{-5}$   j) $(1-i)^{-8}$

k) $\left(\sqrt{3}(\cos 10^\circ + i sen 10^\circ)\right)^6$   l) $\left(1+\sqrt{5}i\right)^8$

**31)** Calcula $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{14}}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}}$

**32)** Siendo *n* y *m* dos números enteros positivo, calcula:

a) $(1-i)^n \cdot (1+i)^m$   b) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^m}$

**33)** Demostrar que:

a) $\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)$ es una raíz novena de $-1$.

b) $2^{-1/4}(1-i)$ es una raíz cuarta de $-2$.

**34)** Los afijos de los números complejos $z_1, z_2$ y $z_3$ están situados en los vértices de un triángulo equilátero cuyo centro es el origen de coordenadas. Sabiendo que $z_1 = 2i$ , calcular $z_2$ y $z_3$ expresando el resultado en forma polar y binómica.

**35)** Se considera el número complejo $z = 1 + 3i$ , se efectúa un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud $30^{o}$. Hallar el complejo z' transformado por z en el citado giro.

**36)** Dados los números complejos $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $w = 2_{45^{o}}$, calcular :

a) $z \cdot w$ b) $z^3 \cdot \overline{w}$ c) $z \cdot w^4$

**37)** Hallar las raíces que se indican y representarlas en el plano complejo:

a) Raíces cuadradas de $4\sqrt{3} + 4i$

b) Raíces cúbicas de $4\sqrt{3} + 4i$

c) Raíces cuartas de $-81i$

d) Raíces quintas de 32.

e) Raíces sextas de 1.

f) Raíces cúbicas de $1 + i$

g) Raíces cúbicas de $i$.

h) Raíces quintas de $-i$

i) Raíces cuartas de $-1$.

j) Raíces quintas de $-16 - 16\sqrt{3}i$

**38)** Sean $z_1$, $z_2$ y $z_3$ las tres raíces cúbicas de la unidad, demuestra que se verifica la siguiente igualdad:

$$(z_1 - z_2 + z_3) \cdot (z_1 + z_2 - z_3) = 4$$

**39)** Dados los números complejos $z_1 = \sqrt{3} + i$ y $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

a) Efectuar de dos formas distintas la división $z_1 : z_2$

b) Calcular y representar los afijos de $\sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2}}$

**40)** Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 + 1 = -15$ b) $(1+i)z^3 - 2i = 0$

c) $z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$ d) $z^5 + 81z = 0$

e) $z^2 - 2z + 2 = 0$ f) $z^5 - z = 0$

g) $z^3 + zi = 0$ h) $z^2 - 1 - \sqrt{3}i = 0$

i) $x^5 + \sqrt{3} + i = 0$ j) $x^7 - \pi^{14} i = 0$

k) $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$ l) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

**41)** Comprueba que $\sqrt{2}i$ y $2 - i$ son soluciones de la ecuación $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 10 = 0$ y encuentra las otras soluciones.

**42)** Hallar y representar los afijos de :

a) $z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} + i}{1 + \sqrt{3}i}}$ b) $z = \sqrt{\frac{i^5 - i^8}{\sqrt{2}i}}$

c) $z = \sqrt[6]{(-1-i) \cdot (1+i)^3}$

**43)** Demuestra que para cualquier número natural n se verifica:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{3n} + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{3n}$$

**44**) Demuestra que el número complejo $z = \cos a - i \operatorname{sen} a$ verifica:

a) $\frac{1}{z} = \cos a + i \operatorname{sen} a$

b) $\frac{1}{\overline{z}} = \cos a + \operatorname{sen} a$

c) Halla las raíces quintas de *z*.

**45)** Con ayuda del cociente de los números complejos $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 1 + i$ , calcula los valores exactos de $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$ y $\cos\frac{5\pi}{12}$.

**46)** Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determinar b para que el módulo del cociente $\frac{b + 4i}{1 + i}$ sea $\sqrt{26}$.

b) La suma de dos números complejos conjugados es 24 y la suma de sus módulos es 26. ¿De qué números complejos se trata?

c) La suma de dos números complejos es $5 - 3i$. El cociente de ambos es imaginario puro y la parte real del numerador es 4. Halla dichos números.

**47)** Utilizando la fórmula de Moivre

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Obtener $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$ en función de las razones del ángulo $\alpha$. De igual forma hallar las expresiones de $\operatorname{sen} 3\alpha$ y $\cos 3\alpha$.

**48)** Calcula y representa las ocho primeras potencias del complejo $z = 1 + i$. Representa sus afijos en el plano complejo y comprueba que se encuentran sobre una superficie curva espiral.

**49)** Un cuadrado tiene sus vértices por encima del eje real. Si dos vértices consecutivos del cuadrado son $2 + i$ y $5 + 3i$, hallar los otros dos vértices-

**50)** Hallar las coordenadas de los vértices, el perímetro y el área de un triángulo cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[3]{-64}$.

**51)** Halla dos complejos conjugados tales que el triángulo que forman sus afijos con el origen sea equilátero y su área valga $2\sqrt{3}$.