

1 Un punto P tiene de coordenadas $(-1, 3)$. Halla las coordenadas del punto P' que resulta de un giro de 30° con centro en el origen de coordenadas. Da el resultado en forma binómica.

2 Indica cuáles de las siguientes igualdades son ciertas:

- a) $(m_\alpha)^4 = m^4_\alpha$
- b) $\sqrt[3]{m_\alpha} = \sqrt[3]{m} \sqrt[3]{\alpha}$
- c) $\frac{m_\alpha}{m'_\alpha} = \left(\frac{m}{m'}\right)_\alpha$
- d) $m_\alpha \cdot m_\alpha \cdot m_\alpha = m^3_{\alpha^3}$

3 Si el cociente de dos números complejos es un número imaginario, entonces:

- a) Los dos complejos son conjugados.
- b) Los dos complejos son opuestos.
- c) Los dos complejos son imaginarios.
- d) Los dos complejos son reales.
- e) Puede ser uno real y el otro imaginario.

4 Calcula:

$$i^{63} + \frac{1}{i^7} + \frac{i^{17}}{1-i}$$

5 Expresa en forma polar los números complejos:

- a) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- c) $\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- d) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

6 Calcula a y b para que:

$$\frac{3a - 9i}{4a + bi} = 2 + 3i$$

7 Expresa en forma binómica:

- a) 7_{135°
- b) 2_{180°
- c) 3_{270°
- d) 1_{225°
- e) 4_{300°

8 Si $z = 2_{45^\circ}$ y $z' = 3_{30^\circ}$, calcula:

- a) $z + z'$
- b) $z \cdot z'$
- c) $\frac{z}{z'}$

9 Calcula:

- a) $(3_{20^\circ})^3$
- b) $(2_{100^\circ})^4$
- c) $(1_{20^\circ})^5$

10 Calcula $(1 + i)^8$.

11 Calcula:

$$\sqrt[3]{8(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}$$

12 Calcula:

$$\sqrt[3]{8(\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ)}$$

13 Calcula:

- a) $\sqrt[4]{16}$
- b) $\sqrt[4]{-16}$
- c) $\sqrt[4]{16i}$
- d) $\sqrt[4]{-16i}$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $z^4 + 81 = 0$
- b) $z^4 - 81 = 0$

15 Sabiendo que el punto $(1, 4)$ es el vértice de un cuadrado centrado en el origen, calcula los demás vértices.

16 Escribe en forma binómica el conjugado y el opuesto de 6_{60° .

17 Resuelve las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

- a) $x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 20x - 56 = 0$
- b) $x^3 - x^2 - x = 15$
- c) $x^8 + 1 = 0$
- d) $x^7 + 128 = 0$

1. Números complejos

1 La unidad imaginaria.

$$i = \sqrt{-1}$$

Escribe las cuatro potencias de i:

$$i^0 = 1$$

$$i^2 = -1$$

$$i^1 = i$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

2 Formas de los números complejos

Dado el complejo de afijo P, se puede expresar:

Forma binómica: $a + bi$

Forma polar: m_α

Forma trigonométrica: $m(m + i \text{ sen } \alpha)$

3 Transformaciones

Dado el número complejo en forma binómica, $a + bi$, sus coordenadas polares son

$$m: \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha: \text{tag } \alpha = b/a$$

¿Es única la determinación del argumento? La determinación del argumento, α , de la expresión anterior no es única, ya que existen infinitos ángulos con una misma tangente. Su expresión trigonométrica es: $m(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$.

Dado un número complejo en forma polar, m_α , su expresión en forma binómica es:

$a + bi$ donde

$$a = m \cos \alpha$$

$$b = m \text{ sen } \alpha$$

4 Conjugado, opuesto e inverso.

$$\text{Si } z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$-z = -a - bi$$

$$1/z = \frac{1}{a + bi}$$

$$\text{Si } z = m_\alpha$$

$$\bar{z} = m_{-\alpha} = m_{360^\circ - \alpha}$$

$$-z = m_{\alpha + 180^\circ}$$

$$1/z = \frac{1}{m_{360^\circ - \alpha}}$$

5 Operaciones.

Dados los números complejos en forma polar m_α y m'_β :

$$m_\alpha \cdot m'_\beta = (m \cdot m')_{\alpha + \beta}$$

$$m_\alpha / m'_\beta = (m/m')_{\alpha - \beta}$$

$$(m_\alpha)^n = m_{n\alpha}$$

$$\sqrt[n]{m_\alpha} = (\sqrt[n]{m})_{\frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}} \text{ con } k = 0, 1, \dots, n - 1$$

6 Fórmula de De Moivre

Escribe la fórmula de De Moivre:

$$(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)^n = [\cos(n\alpha) + i \text{ sen}(n\alpha)]$$

2. Actividades complementarias

1 $P'(-2,37, 2,10)$

2 La igualdad correcta es la a).

3 La solución correcta es la e), puesto que han de diferir sus argumentos en 90° o 270° .

4 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

5 a) 1_{135°

b) 1_{45°

c) 1_{225°

d) 1_{315°

6 a) $a = \frac{-27}{46}, b = \frac{-45}{46}$

7 a) $\frac{-7\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2}i$

b) -2

c) $-3i$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

e) $2 - 2\sqrt{3}i$

8 a) $z + z' = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2} + 3}{2}i$

b) 6_{30°

c) $(\frac{2}{3})_{15^\circ}$

9 a) 27_{60°

b) 16_{45°

c) 1_{10°

10 a) $(1 + i)^6 = 16$

11

$$\sqrt[3]{8(\cos 120^\circ + i \text{ sen } 120^\circ)} = \begin{cases} 2_{40^\circ} \\ 2_{160^\circ} \\ 2_{280^\circ} \end{cases}$$

12

$$\sqrt[3]{8(\cos 120^\circ - i \text{ sen } 120^\circ)} = \begin{cases} 2_{40^\circ} \\ 2_{200^\circ} \\ 2_{320^\circ} \end{cases}$$

13

a) $\sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2_{0^\circ} = 2 \\ 2_{90^\circ} = 2i \\ 2_{180^\circ} = -2 \\ 2_{270^\circ} = -2i \end{cases}$

b) $\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2_{45^\circ} \\ 2_{135^\circ} \\ 2_{225^\circ} \\ 2_{315^\circ} \end{cases}$

c) $\sqrt[4]{16i} = \begin{cases} 2_{22.5^\circ} \\ 2_{112.5^\circ} \\ 2_{202.5^\circ} \\ 2_{292.5^\circ} \end{cases}$

d) $\sqrt[4]{-16i} = \begin{cases} 2_{67.5^\circ} \\ 2_{157.5^\circ} \\ 2_{247.5^\circ} \\ 2_{337.5^\circ} \end{cases}$

14

a) $z = \sqrt[4]{-81} = \begin{cases} 3_{45^\circ} \\ 3_{135^\circ} \\ 3_{225^\circ} \\ 3_{315^\circ} \end{cases}$

b) $z = \sqrt{81} = \begin{cases} 3_{0^\circ} = 3 \\ 3_{90^\circ} = 3i \\ 3_{180^\circ} = -3 \\ 3_{270^\circ} = -3i \end{cases}$

15 A(1, 4); B(-4, 1); C(-1, -4); D(4, -1)

16 Si $z = 6_{60^\circ}, \bar{z} = 6_{300^\circ} = 3 - 3\sqrt{3}i, -z = 6_{240^\circ} = -3 - 3\sqrt{3}i$

17 a) $x_1 = 2i, x_2 = -2i, x_3 = -7, x_4 = 2, x_5 = -1 + 2i, x_6 = -1 - 2i, x_7 = 3, x_8 = 1_{15\pi/8}$

b) $x_1 = 1_{\pi/8}, x_2 = 1_{3\pi/8}, x_3 = 1_{5\pi/8}, x_4 = 1_{7\pi/8}, x_5 = 1_{9\pi/8}, x_6 = 1_{11\pi/8}, x_7 = 1_{13\pi/8}, x_8 = 1_{15\pi/8}$

c) $x_1 = 2_{\pi/7}, x_2 = 2_{3\pi/7}, x_3 = 2_{5\pi/7}, x_4 = 2_{7\pi/7} = 2_\pi = -2, x_5 = 2_{9\pi/7}, x_6 = 2_{11\pi/7}, x_7 = 2_{13\pi/7}, x_8 = 2_{15\pi/7}$