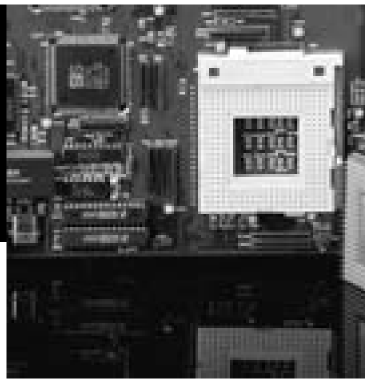
7 Los números complejos



1. Forma binómica del número complejo

Piensa y calcula

Halla mentalmente cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números reales.

a) $x^2 - 25 = 0$ b) $x^2 + 9 = 0$

Solución:

a) Tiene dos soluciones: 5 y – 5 b) No tiene solución real.

Aplica la teoría

1. Completa con equis las casillas a las que pertenecen los siguientes números.

Números	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
3/4			×	×	×
2 + 5i					
–4					
π					
$\sqrt{5}$					
23					

Solución:

Números	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
3/4			×	×	×
2 + 5i					×
–4		×	×	×	×
π				×	×
$\sqrt{5}$				×	×
23	×	×	×	×	×

2. Escribe cinco números complejos que no sean reales.

Solución:

$2 + 3i, 5i, \sqrt{-4}, 3 - 4i, \sqrt[4]{-7}$

3. Escribe cinco números imaginarios puros.

Solución:

i, 3i, – 3i, 5i, – 5i

4. Halla mentalmente las siguientes raíces:

a) $\sqrt{16}$

b) $\sqrt{-25}$

Solución:

a) ± 4

b) $\pm 5i$

5. Calcula mentalmente **x** e **y** para que los siguientes números complejos sean iguales:

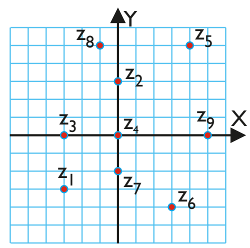
$$z_1 = x - 4i$$

$$z_2 = -3 - yi$$

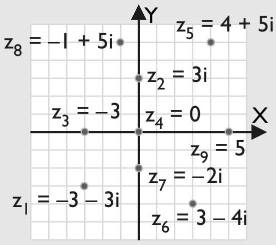
Solución:

$x = -3, y = 4$

6. Halla los números complejos representados en el siguiente plano de Gauss por sus afijos:



Solución:

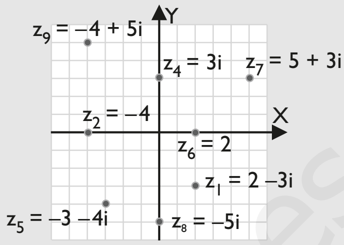


$z_1 = -3 - 3i$	$z_2 = 3i$
$z_3 = -3$	$z_4 = 0$
$z_5 = 4 + 5i$	$z_6 = 3 - 4i$
$z_7 = -2i$	$z_8 = -1 + 5i$
$z_9 = 5$	

7. Representa los afijos de los siguientes números complejos en el plano de Gauss.

a) $z_1 = 2 - 3i$ b) $z_2 = -4$
c) $z_3 = -4 + 5i$ d) $z_4 = 3i$
e) $z_5 = -3 - 4i$ f) $z_6 = 2$
g) $z_7 = 5 + 3i$ h) $z_8 = -5i$

Solución:

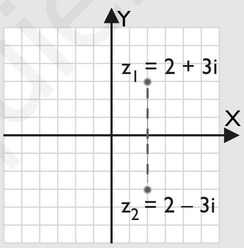


2. Operaciones en forma binómica

Piensa y calcula

Las raíces de la ecuación de 2º grado $x^2 - 4x + 13 = 0$ son $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2 - 3i$. Represéntalas en el plano de Gauss. ¿Respecto de qué recta son simétricas?

Solución:



Son simétricas respecto del eje de abscisas, X

Aplica la teoría

8. Sean $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + 5i$

Calcula:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$
c) $2z_1 - 5z_2$ d) $-3z_1 + 4z_2$

Solución:

a) $1 + i$ b) $5 - 9i$
c) $16 - 33i$ d) $-17 + 32i$

9. Sean $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 4 - 2i$, $z_3 = -1 + 6i$

Calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:

a) $22 + 14i$
b) $-33 + 13i$
c) $8 + 26i$

10. Calcula:

a) $(3 + 2i)^2$ b) $(-4 + 7i)^2$
c) $(2 - i)^2$ d) $(1 + i)^2$

Solución:
a) $5 + 12i$ b) $-33 - 56i$
c) $3 - 4i$ d) $2i$

11. Sea $z = 4 - 3i$. Calcula:

a) el opuesto de z b) el conjugado de z
c) el inverso de z d) el producto $z \cdot \bar{z}$

Solución:
a) $-z = -4 + 3i$ b) $\bar{z} = 4 + 3i$
c) $z^{-1} = \dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}i$ d) $z \cdot \bar{z} = 25$

12. Sea $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = -4 + 5i$

Calcula:

a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:
a) $2i$ b) $\dfrac{22}{41} - \dfrac{34}{41}i$ c) $-\dfrac{17}{41} - \dfrac{11}{41}i$

13. Calcula las siguientes potencias:

a) i^{259} b) i^{342} c) i^{372} d) i^{109}

Solución:
a) $-i$ b) -1 c) 1 d) i

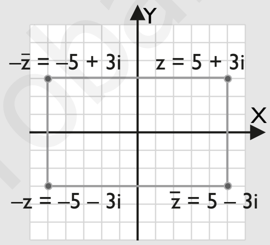
14. Dado el número complejo $z = 3 + 5i$, calcula:

$$z \cdot \bar{z} \cdot z^{-1}$$

Solución:
$3 - 5i$

15. Dibuja un rectángulo de centro el origen de coordenadas y lados paralelos a los ejes, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo $z = 5 + 3i$. Halla las coordenadas de los otros tres vértices en función del opuesto y/o del conjugado de z

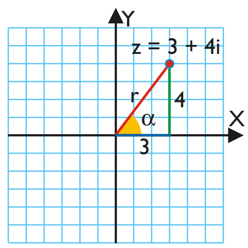
Solución:



3. Forma polar del número complejo

Piensa y calcula

Dado el número complejo $z = 3 + 4i$, halla mentalmente la longitud de la hipotenusa, **r,** del triángulo rectángulo siguiente, la tangente del ángulo α y, utilizando la calculadora, el ángulo α



Solución:
$r = 5$ $\operatorname{tg} \alpha = 4/3 \Rightarrow \alpha = 53° 7' 48''$

Aplica la teoría

16. Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes números complejos y pásalos a forma polar.

a) $z_1 = 5i$

b) $z_2 = -6$

c) $z_3 = -3i$

d) $z_4 = 4$

Solución:

a) $5_{90°}$ b) $6_{180°}$ c) $3_{270°}$ d) $4_{0°}$

17. Represente en el plano de Gauss los siguientes números complejos y pásalos a forma polar y trigonométrica.

a) $z_1 = 3 + 5i$

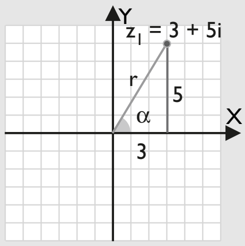
b) $z_2 = -4 - 6i$

c) $z_3 = -3 + 2i$

d) $z_4 = 2 - 5i$

Solución:

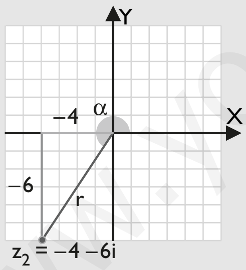
a)



$z_1 = (\sqrt{34})_{59°\ 2'\ 10''} =$

$= \sqrt{34}(\cos 59°\ 2'\ 10'' + i \operatorname{sen} 59°\ 2'\ 10'')$

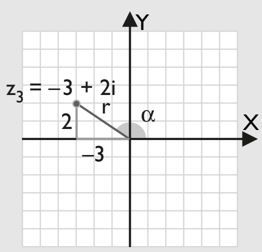
b)



$z_2 = (2\sqrt{13})_{236°\ 18'\ 36''} =$

$= 2\sqrt{13}(\cos 236°\ 18'\ 36'' + i \operatorname{sen} 236°\ 18'\ 36'')$

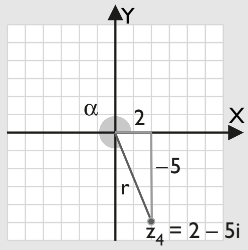
c)



$z_3 = (\sqrt{13})_{146°\ 18'\ 36''} =$

$= \sqrt{13}(\cos 146°\ 18'\ 36'' + i \operatorname{sen} 146°\ 18'\ 36'')$

d)



$z_4 = (\sqrt{29})_{291°\ 48'\ 5''} =$

$= \sqrt{29}(\cos 291°\ 48'\ 5'' + i \operatorname{sen} 291°\ 48'\ 5'')$

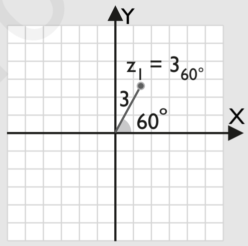
18. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos y pásalos a forma trigonométrica y binómica.

a) $z_1 = 3_{60°}$ b) $z_2 = 4_{225°}$

c) $z_3 = 5_{330°}$ d) $z_4 = 6_{150°}$

Solución:

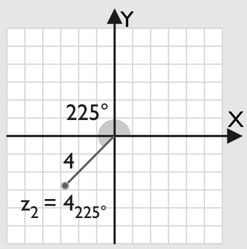
a)



$z_1 = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) =$

$= 3\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

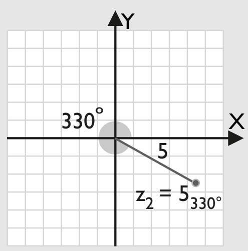
b)



$z_2 = 4(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°) =$

$= 4\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

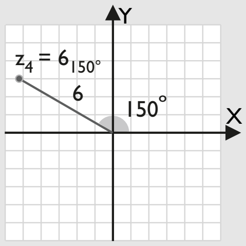
c)



$z_3 = 5(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) =$

$= 5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5}{2}i$

d)



$z_4 = 6(\cos 150° + i \text{ sen } 150°) =$

$= 6\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i\right) = -3\sqrt{3} + 3i$

19. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos y pásalos a forma polar y binómica.

a) $z_1 = 3(\cos 225° + i \text{ sen } 225°)$

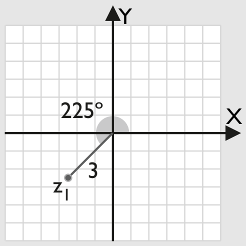
b) $z_2 = 2(\cos 300° + i \text{ sen } 300°)$

c) $z_3 = 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

d) $z_4 = 5(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$

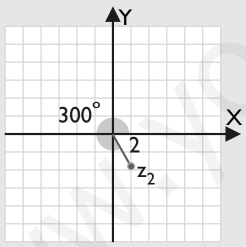
Solución:

a)



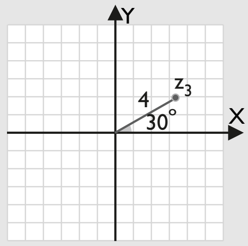
$z_1 = 3_{225°} = 3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} i$

b)



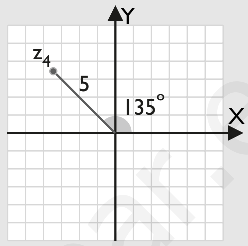
$z_2 = 2_{300°} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1 - \sqrt{3}i$

c)



$z_3 = 4_{30°} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

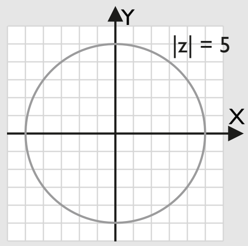
d)



$z_4 = 5_{135°} = 5\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2} i$

20. Define y representa el lugar geométrico definido por: $|z| = 5$

Solución:



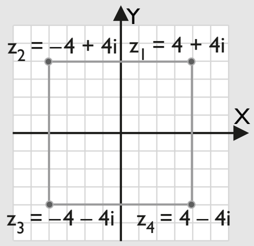
Es una circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 5

4. Operaciones en forma polar

Piensa y calcula

Dado el número complejo $z = 4 + 4i$, multiplica reiteradamente tres veces por $\boldsymbol{i}$. Representa en el plano de Gauss el número complejo $z = 4 + 4i$ y los tres números complejos que has obtenido. Une mediante un segmento cada afijo con el siguiente, y el último con el primero. ¿Qué figura se obtiene?

Solución:



Se obtiene un cuadrado.

Aplica la teoría

21. Sean $z_1 = 2_{120°}$, $z_2 = 3_{210°}$, $z_3 = 4_{315°}$

Calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:

a) $6_{330°}$ b) $8_{75°}$ c) $12_{165°}$

22. Sean $z_1 = 6_{225°}$, $z_2 = 3_{150°}$, $z_3 = 2_{300°}$

Calcula:

a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:

a) $2_{75°}$ b) $3_{285°}$ c) $1{,}5_{210°}$

23. Sean $z_1 = 5_{150°}$, $z_2 = 3_{225°}$, $z_3 = 2_{45°}$

Calcula:

a) z_1^3 b) z_2^4 c) z_3^5

Solución:

a) $125_{90°}$ b) $81_{180°}$ c) $32_{225°}$

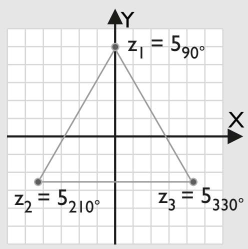
24. Un triángulo equilátero de centro el origen de coordenadas tiene un vértice en el punto A(0, 5). Halla las coordenadas de los otros dos vértices y dibuja dicho triángulo.

Solución:

$z_1 = 5i = 5_{90°}$

$z_2 = 5_{90°} \cdot 1_{120°} = 5_{210°}$

$z_3 = 5_{210°} \cdot 1_{120°} = 5_{330°}$



5. Radicación de números complejos

Piensa y calcula

a) Calcula mentalmente $\sqrt{1}$. ¿Cuántas raíces tiene?

b) Observando que $\sqrt[4]{1} = \sqrt{\sqrt{1}}$, calcula mentalmente $\sqrt[4]{1}$. ¿Cuántas raíces tiene?

Solución:

a) 1 y – 1, tiene dos raíces. b) 1, – 1, i y – i, tiene cuatro raíces.

Aplica la teoría

25. Halla las raíces cúbicas de z = 8*i*; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

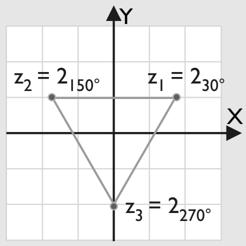
Solución:

$z = 8_{90°}$

$z_1 = 2_{30°}$

$z_2 = 2_{150°}$

$z_3 = 2_{270°}$



Se obtiene un triángulo equilátero.

26. Halla las raíces cuartas de z = –81; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

Solución:

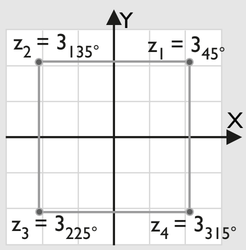
$z = 81_{180°}$

$z_1 = 3_{45°}$

$z_2 = 3_{135°}$

$z_3 = 3_{225°}$

$z_4 = 3_{315°}$



Se obtiene un cuadrado.

27. Halla las raíces quintas de z = – 3 + 4*i*; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

Solución:

$z = 5_{126°\ 52'\ 12''}$

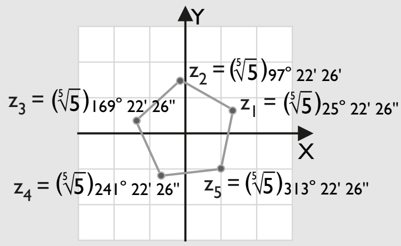
$z_1 = \left(\sqrt[5]{5}\right)_{25°\ 22'\ 26''}$

$z_2 = \left(\sqrt[5]{5}\right)_{97°\ 22'\ 26''}$

$z_3 = \left(\sqrt[5]{5}\right)_{169°\ 22'\ 26''}$

$z_4 = \left(\sqrt[5]{5}\right)_{241°\ 22'\ 26''}$

$z_5 = \left(\sqrt[5]{5}\right)_{313°\ 22'\ 26''}$



Se obtiene un pentágono regular.

28. Resuelve las ecuaciones siguientes; representa las raíces gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

a) $z^4 + 16 = 0$

b) $z^4 - 16i = 0$

Solución:

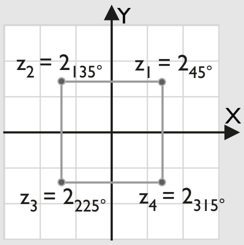
a) $z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}}$

$z_1 = 2_{45°}$

$z_2 = 2_{135°}$

$z_3 = 2_{225°}$

$z_4 = 2_{315°}$



Se obtiene un cuadrado.

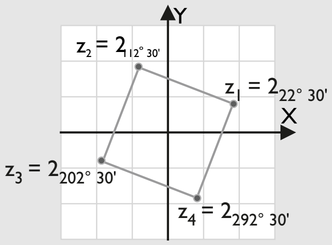
b) $z^4 - 16i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16_{90°}}$

$z_1 = 2_{22°\ 30'}$

$z_2 = 2_{112°\ 30'}$

$z_3 = 2_{202°\ 30'}$

$z_4 = 2_{292°\ 30'}$



Se obtiene un cuadrado.

29. Resuelve la ecuación: $x^2 + 6x + 10 = 0$

a) ¿Cómo son las raíces?

En la parábola correspondiente:

b) halla el vértice.

c) halla el eje de simetría.

d) Represéntala.

Solución:

$x_1 = -3 + i$

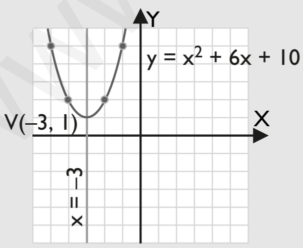
$x_2 = -3 - i$

a) Las raíces son complejas conjugadas.

b) $V(-3, 1)$

c) $x = -3$

d)



30. Halla una ecuación de 2° grado que tenga las raíces: $2 \pm 3i$

Solución:

$(x - 2)^2 + 3^2 = 0$

$x^2 - 4x + 13 = 0$

31. Halla una ecuación de 2° grado que tenga las raíces: $6 \pm \sqrt{5}\,i$

Solución:

$(x - 6)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$

$x^2 - 12x + 41 = 0$

32. Resuelve la ecuación:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

a) ¿Cómo son las raíces?

En la parábola correspondiente:

b) halla el vértice.

c) halla el eje de simetría.

d) Represéntala.

Solución:

$x_1 = 1 + \sqrt{2}\,i$

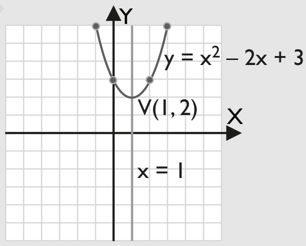
$x_2 = 1 - \sqrt{2}\,i$

a) Las raíces son complejas conjugadas.

b) $V(1, 2)$

c) $x = 1$

d)

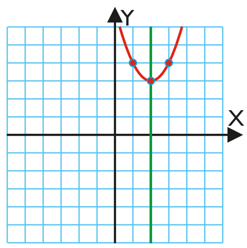


33. Dado el dibujo de la parábola siguiente, halla:

a) el vértice.

b) las raíces.

c) la ecuación de la parábola.



Solución:

a) $V(2, 3)$

b) $x_1 = 2 + \sqrt{3}\,i, x_2 = 2 - \sqrt{3}\,i$

c) $(x - 2)^2 + 3 = 0 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 7$

1. Forma binómica del número complejo

34. Completa con equis las casillas a las que pertenecen los siguientes números.

Números	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
-7		×	×	×	×
$\sqrt{-13}$					
$-6/5$					
$2 + 5i$					
28					
e					

Solución:

Números	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
-7		×	×	×	×
$\sqrt{-13}$					×
$-6/5$			×	×	×
$2 + 5i$					×
28	×	×	×	×	×
e				×	×

35. Escribe cinco números complejos que no sean reales.

Solución:
$4 + 5i, -7i, \sqrt{-5}, -2 - 3i, \sqrt[6]{-43}$

36. Escribe cinco números imaginarios puros.

Solución:
$7i, -2i, 4i, 9i, -9i$

37. Halla mentalmente las siguientes raíces:

a) $\sqrt{36}$

b) $\sqrt{-64}$

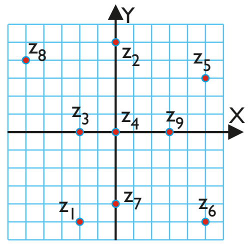
Solución:
a) ± 6
b) $\pm 8i$

38. Calcula mentalmente **x** e **y** para que los siguientes números complejos sean iguales:

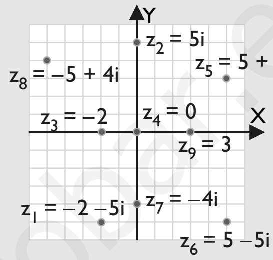
$$z_1 = 8 - xi$$
$$z_2 = y - 5i$$

Solución:
$x = 5, y = 8$

39. Halla los números complejos representados en el siguiente plano de Gauss por sus afijos:



Solución:



$z_1 = -2 - 5i$	$z_2 = 5i$	$z_3 = -2$
$z_4 = 0$	$z_5 = 5 + 3i$	$z_6 = 5 - 5i$
$z_7 = -4i$	$z_8 = -5 + 4i$	$z_9 = 3$

40. Representa los afijos de los siguientes números complejos en el plano de Gauss.

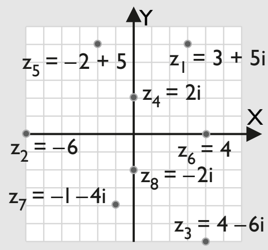
a) $z_1 = 3 + 5i$ b) $z_2 = -6$

c) $z_3 = 4 - 6i$ d) $z_4 = 2i$

e) $z_5 = -2 + 5i$ f) $z_6 = 4$

g) $z_7 = -1 - 4i$ h) $z_8 = -2i$

Solución:



2. Operaciones en forma binómica

41. Sean $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 5 - 4i$

Calcula:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$

c) $3z_1 - 4z_2$ d) $-5z_1 + 2z_2$

Solución:
a) $7 - 7i$ b) $-3 + i$ c) $-14 + 7i$ d) $7i$

42. Sean $z_1 = 5 - 2i, z_2 = -3 + i, z_3 = 6 - 4i$
Calcula:
a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:
a) $-13 + 11i$ b) $22 - 32i$ c) $-14 + 18i$

43. Calcula:
a) $(4 + i)^2$ b) $(-5 + 2i)^2$
c) $(3 - 3i)^2$ d) $(6 + i)^2$

Solución:
a) $15 + 8i$ b) $21 - 20i$
c) $-18i$ d) $35 + 12i$

44. Sea $z = -5 + 2i$
Calcula:
a) el opuesto de z
b) el conjugado de z
c) el inverso de z
d) el producto $z \cdot \bar{z}$

Solución:
a) $-z = 5 - 2i$
b) $\bar{z} = -5 - 2i$
c) $z^{-1} = -\frac{5}{29} - \frac{2}{29}i$
d) $z \cdot \bar{z} = 29$

45. Sean $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 2 + i, z_3 = -6 + 4i$
Calcula:
a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:
a) $\frac{1}{5} - \frac{13}{5}i$
b) $-\frac{19}{26} + \frac{9}{26}i$
c) $-\frac{2}{13} - \frac{7}{26}i$

46. Calcula las siguientes potencias:
a) i^{159} b) i^{242} c) i^{272} d) i^{209}

Solución:
a) $-i$ b) -1 c) 1 d) i

47. Dado el número complejo $z = 4 - 5i$, calcula: $z \cdot \bar{z} \cdot z^{-1}$

Solución:
$4 + 5i$

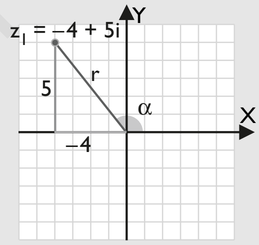
3. Forma polar del número complejo

48. Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, y pásalos a forma polar.
a) $z_1 = -4$
b) $z_2 = 5i$
c) $z_3 = -2i$
d) $z_4 = 3$

Solución:
a) $4_{180°}$ b) $5_{90°}$ c) $2_{270°}$ d) $3_{0°}$

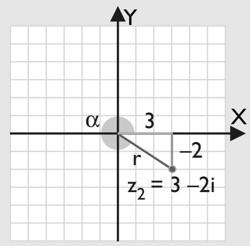
49. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos, y pásalos a forma polar y trigonométrica.
a) $z_1 = -4 + 5i$
b) $z_2 = 3 - 2i$
c) $z_3 = -6 - i$
d) $z_4 = 1 + 5i$

Solución:
a)



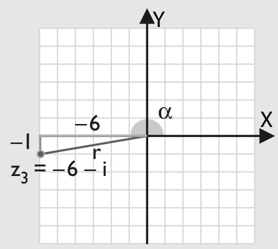
$z_1 = (\sqrt{41})_{128°\ 39'\ 35''} =$
$= \sqrt{41}(\cos 128°\ 39'\ 35'' + i \text{ sen } 128°\ 39'\ 35'')$

b)



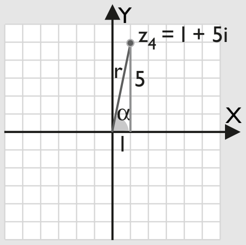
$z_2 = (\sqrt{13})_{326°\ 18'\ 36''} =$
$= \sqrt{13}(\cos 326°\ 18'\ 36'' + i \text{ sen } 326°\ 18'\ 36'')$

c)



$z_3 = (\sqrt{37})_{189°\ 27'\ 44''} =$
$= \sqrt{37}(\cos 189°\ 27'\ 44'' + i \text{ sen } 189°\ 27'\ 44'')$

d)



$z_4 = (\sqrt{26})_{78^\circ\,41'\,24''} =$

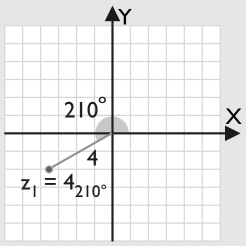
$= \sqrt{26}(\cos 78^\circ\,41'\,24'' + i \text{ sen } 78^\circ\,41'\,24'')$

50. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos, y pásalos a forma trigonométrica y binómica.

a) $z_1 = 4_{210^\circ}$ b) $z_2 = 5_{135^\circ}$
c) $z_3 = 6_{30^\circ}$ d) $z_4 = 3_{315^\circ}$

Solución:

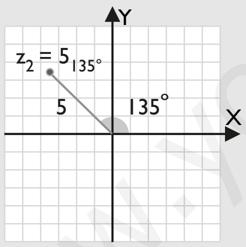
a)



$z_1 = 4(\cos 210^\circ + i \text{ sen } 210^\circ) =$

$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} - 2i$

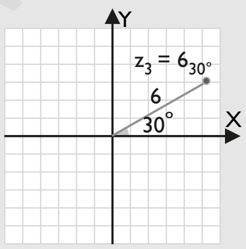
b)



$z_2 = 5(\cos 135^\circ + i \text{ sen } 135^\circ) =$

$= 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$

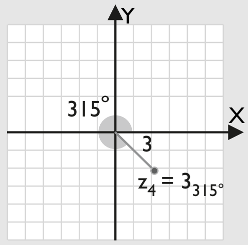
c)



$z_3 = 6(\cos 30^\circ + i \text{ sen } 30^\circ) =$

$= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$

d)



$z_4 = 3(\cos 315^\circ + i \text{ sen } 315^\circ) =$

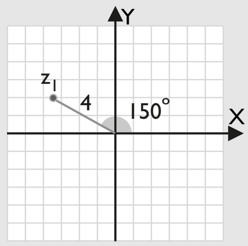
$= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

51. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos, y pásalos a forma polar y binómica.

a) $z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \text{ sen } 150^\circ)$
b) $z_2 = 3(\cos 330^\circ + i \text{ sen } 330^\circ)$
c) $z_3 = 2(\cos 45^\circ + i \text{ sen } 45^\circ)$
d) $z_4 = 5(\cos 240^\circ + i \text{ sen } 240^\circ)$

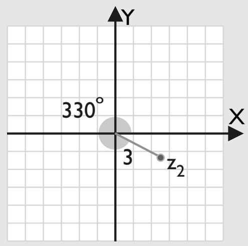
Solución:

a)



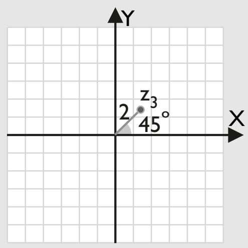
$z_1 = 4_{150^\circ} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i$

b)



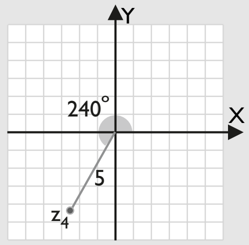
$z_2 = 3_{330^\circ} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

c)



$z_3 = 2_{45^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

d)

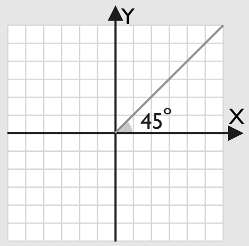


$$z_4 = 5_{240°} = 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

52. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos que tienen de argumento 45°

Solución:

Es una semirrecta, que nace en el origen de coordenadas O(0, 0), y el ángulo formado por el semieje positivo de l as X y dicha semirrecta tiene una amplitud de 45°; es decir, es la bisectriz del primer cuadrante.

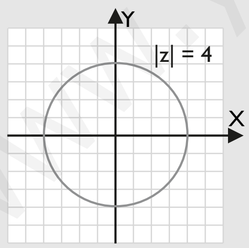


53. Define y representa el lugar geométrico definido por:

$$|z| = 4$$

Solución:

Es una circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 4



4. Operaciones en forma polar

54. Sean $z_1 = 4_{60°}, z_2 = 5_{240°}, z_3 = 6_{300°}$

Calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:

a) $20_{300°}$ b) $24_{0°}$ c) $30_{180°}$

55. Sean $z_1 = 8_{45°}, z_2 = 4_{210°}, z_3 = 2_{330°}$

Calcula:

a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:

a) $2_{195°}$ b) $4_{75°}$ c) $2_{240°}$

56. Sean $z_1 = 6_{120°}, z_2 = 5_{315°}, z_3 = 3_{225°}$

Calcula:

a) z_1^3 b) z_2^4 c) z_3^5

Solución:

a) $216_{0°}$ b) $625_{180°}$ c) $243_{45°}$

57. Un cuadrado de centro el origen de coordenadas tiene un vértice en el punto A(4, 0). Halla las coordenadas de los otros vértices y dibuja dicho cuadrado.

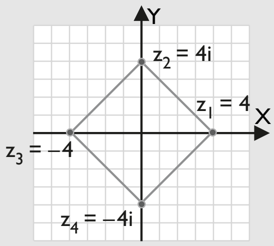
Solución:

$z_1 = 4 = 4_{0°}$

$z_2 = 4_{0°} \cdot 1_{90°} = 4_{90°} = 4i$

$z_3 = 4_{90°} \cdot 1_{90°} = 4_{180°} = -4$

$z_4 = 4_{180°} \cdot 1_{90°} = 4_{270°} = -4i$



5. Radicación de números complejos

58. Halla las raíces cúbicas de $z = -27i$; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

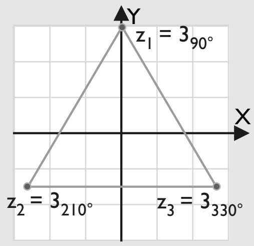
Solución:

$z = 27_{270°}$

$z_1 = 3_{90°}$

$z_2 = 3_{210°}$

$z_3 = 3_{330°}$



Se obtiene un triángulo equilátero.

59. Halla las raíces cuartas de z = 16; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

Solución:

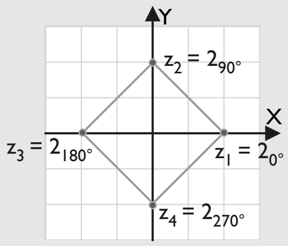
$z = 16_{0°}$

$z_1 = 2_{0°}$

$z_2 = 2_{90°}$

$z_3 = 2_{180°}$

$z_4 = 2_{270°}$



Se obtiene un cuadrado.

60. Halla las raíces quintas de z = 3 + 5*i*; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

Solución:

$z = \left(\sqrt{34}\right)_{59°\ 2'\ 10''}$

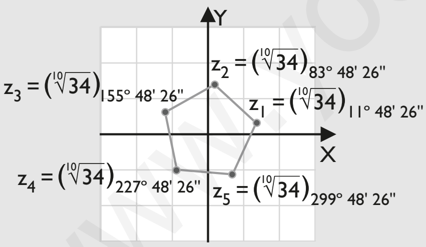
$z_1 = \left(\sqrt[10]{34}\right)_{11°\ 48'\ 26''}$

$z_2 = \left(\sqrt[10]{34}\right)_{83°\ 48'\ 26''}$

$z_3 = \left(\sqrt[10]{34}\right)_{155°\ 48'\ 26''}$

$z_4 = \left(\sqrt[10]{34}\right)_{227°\ 48'\ 26''}$

$z_5 = \left(\sqrt[10]{34}\right)_{299°\ 48'\ 26''}$



Se obtiene un pentágono regular.

61. Resuelve las ecuaciones siguientes; representa las raíces gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

a) $z^4 - 81 = 0$ b) $z^4 + 16i = 0$

Solución:

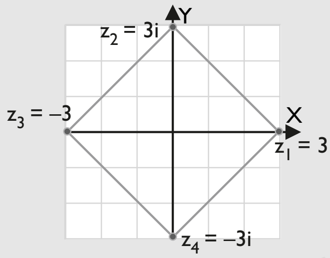
a) $z^4 - 81 = 0 \Rightarrow z^4 = 81 \Rightarrow z = \sqrt[4]{81}$

$z_1 = 3$

$z_2 = 3i$

$z_3 = -3$

$z_4 = -3i$



Se obtiene un cuadrado.

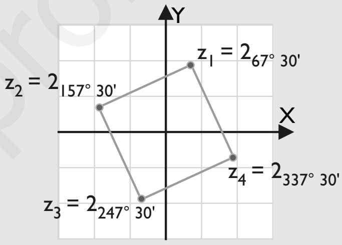
b) $z_4 + 16i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16_{270°}}$

$z_1 = 2_{67°\ 30'}$

$z_2 = 2_{157°\ 30'}$

$z_3 = 2_{247°\ 30'}$

$z_4 = 2_{337°\ 30'}$



Se obtiene un cuadrado.

62. Resuelve la ecuación:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

a) ¿Cómo son las raíces?

En la parábola correspondiente:

b) halla el vértice.

c) halla el eje de simetría.

d) Represéntala.

Solución:

$x_1 = 2 + i$

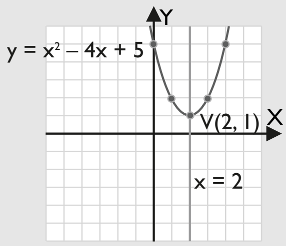
$x_2 = 2 - i$

a) Son complejas conjugadas.

b) V(2, 1)

c) x = 2

d)



63. Resuelve la ecuación:

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

a) ¿Cómo son las raíces?

En la parábola correspondiente:

b) halla el vértice.

c) halla el eje de simetría.

d) Represéntala.

Solución:

$x_1 = -2 + \sqrt{3}\,i$

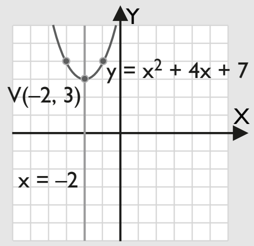
$x_2 = -2 - \sqrt{3}\,i$

a) Son complejas conjugadas.

b) V(– 2, 3)

c) $x = -2$

d)



64. Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces: $3 \pm 5i$

Solución:

$(x - 3)^2 + 5^2 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 6x + 34 = 0$

65. Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces: $-2 \pm \sqrt{3}\,i$

Solución:

$(x + 2)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 4x + 7 = 0$

Para ampliar

66. Las raíces cuadradas de los números reales negativos, ¿qué clase de números son? Pon un ejemplo.

Solución:

Son números imaginarios puros.

Ejemplo:

$\sqrt{-9} = \pm 3i$

67. La suma de un número complejo y su conjugado, ¿qué clase de número es? Pon un ejemplo.

Solución:

Es un número real.

Ejemplo:

$z = 2 + 3i,\ \overline{z} = 2 - 3i$

$z + \overline{z} = 4$

68. El producto de un número complejo y su conjugado, ¿qué clase de número es? Pon un ejemplo.

Solución:

Es un número real.

$z = 4 + 5i,\ \overline{z} = 4 - 5i$

$z \cdot \overline{z} = 41$

69. Dado el número complejo:

$$z = 3 + 5i$$

Calcula:

a) el conjugado del opuesto.

b) el opuesto del conjugado.

c) ¿qué relación hay entre los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores?

Solución:

a) $\overline{-z} = -3 + 5i$

b) $-\overline{z} = -3 + 5i$

c) Que son iguales.

70. Calcula **x** e **y** para que:

a) $x + 2i + 5 - 3i = 7 + yi$

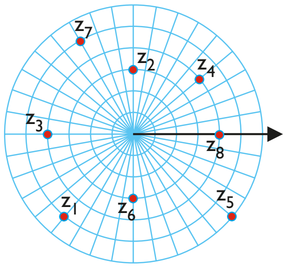
b) $3 - 5i - 7 + yi = x + 2i$

Solución:

a) $x = 2,\ y = -1$

b) $x = -4,\ y = 7$

71. Halla los números complejos representados en forma polar:



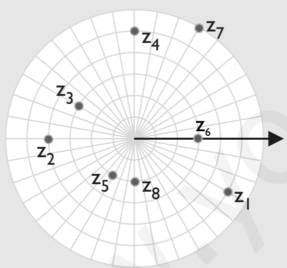
Solución:

$z_1 = 5_{230°}$ $z_2 = 3_{90°}$
$z_3 = 4_{180°}$ $z_4 = 4_{40°}$
$z_5 = 6_{320°}$ $z_6 = 3_{270°}$
$z_7 = 5_{120°}$ $z_8 = 4_{0°}$

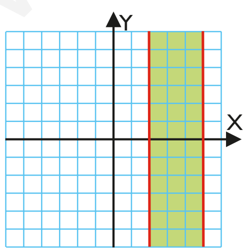
72. Representa los siguientes números complejos en el eje polar.

a) $z_1 = 5_{330°}$ b) $z_2 = 4_{180°}$
c) $z_3 = 3_{150°}$ d) $z_4 = 5_{90°}$
e) $z_5 = 2_{240°}$ f) $z_6 = 3_{0°}$
g) $z_7 = 6_{60°}$ h) $z_8 = 2_{270°}$

Solución:



73. Escribe la condición que deben cumplir los números complejos representados en la siguiente figura:



Solución:

Que la parte real esté comprendida entre 2 y 5

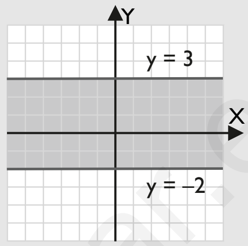
$2 \leq \text{Real}(z) \leq 5$

74. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos cuya parte imaginaria está comprendida entre – 2 y 3

Solución:

Es una franja horizontal, los números complejos que están comprendidos entre las rectas y = – 2 e y = 3, incluidas las rectas.

$-2 \leq \text{Imaginaria}(z) \leq 3$



75. Si el producto de dos números complejos no reales es un número real, ¿qué relación hay entre sus argumentos? Pon un ejemplo.

Solución:

La suma de los argumentos tiene que ser 180° o 360°

$2_{60°} \cdot 3_{120°} = 6_{180°} = -6$

76. Resuelve las ecuaciones siguientes. Representa las raíces gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

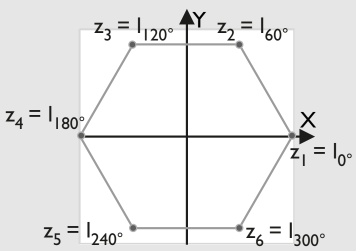
a) $z^6 - 1 = 0$

b) $z^6 + i = 0$

Solución:

a) $z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0°}}$

$z_1 = 1_{0°}$
$z_2 = 1_{60°}$
$z_3 = 1_{120°}$
$z_4 = 1_{180°}$
$z_5 = 1_{240°}$
$z_6 = 1_{300°}$



Se obtiene un hexágono regular.

b) $z^6 + i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{270°}}$

$z_1 = 1_{45°}$

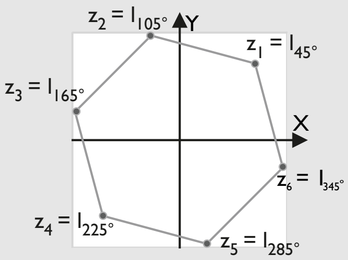
$z_2 = 1_{105°}$

$z_3 = 1_{165°}$

$z_4 = 1_{225°}$

$z_5 = 1_{285°}$

$z_6 = 1_{345°}$



Se obtiene un hexágono regular.

77. Resuelve las ecuaciones siguientes. Representa las raíces gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

a) $z^6 + 1 = 0$

b) $z^6 - i = 0$

Solución:

a) $z^6 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180°}}$

$z_1 = 1_{30°}$

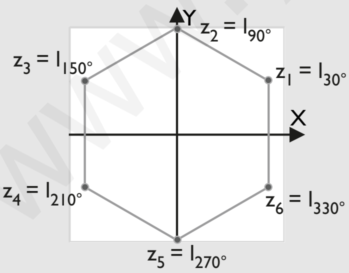
$z_2 = 1_{90°}$

$z_3 = 1_{150°}$

$z_4 = 1_{210°}$

$z_5 = 1_{270°}$

$z_6 = 1_{330°}$



Se obtiene un hexágono regular.

b) $z^6 - i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{i} = \sqrt[6]{1_{90°}}$

$z_1 = 1_{15°}$

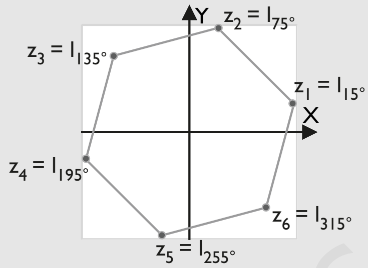
$z_2 = 1_{75°}$

$z_3 = 1_{135°}$

$z_4 = 1_{195°}$

$z_5 = 1_{255°}$

$z_6 = 1_{315°}$



Se obtiene un hexágono regular.

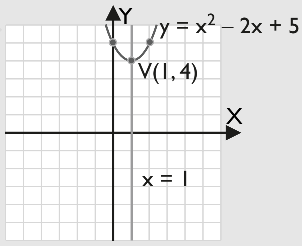
78. Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto V(1, 4) y que no corta al eje de abscisas.

Solución:

Las raíces son: $1 \pm 2i$

$(x - 1)^2 + 2^2 = x^2 - 2x + 5$

$y = x^2 - 2x + 5$



79. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3i, x_4 = -3i$

b) $x_1 = i, x_2 = -i, x_3 = 2i, x_4 = -2i$

80. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2i, x_2 = -2i, x_3 = 3i, x_4 = -3i$

b) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = i, x_4 = -i$

Problemas

81. Halla un número que sumado con su inverso dé 1. ¿Qué tipo de números son el resultado?

Solución:

$z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0$

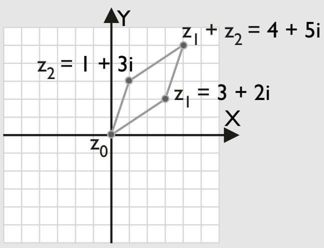
$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \; z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

El resultado son dos números complejos conjugados, tal que la suma de sus partes reales es uno.

82. Dados los números complejos $z_0 = 0, z_1 = 3 + 2i, z_2 = 1 + 3i$, halla $z_1 + z_2$ y representa los afijos de z_0, z_1, z_2 y $z_1 + z_2$. Únelos mediante segmentos en el siguiente orden: $z_0, z_1, z_1 + z_2, z_2$ y z_0. ¿Qué polígono se obtiene?

Solución:

$z_1 + z_2 = 4 + 5i$



Se obtiene un paralelogramo; es equivalente a la suma de vectores.

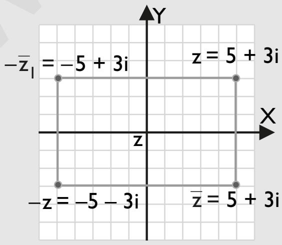
83. Dado el número complejo $z = 5 + 3i$, calcula el conjugado, $\bar{z}$, el opuesto, $-z$, y el opuesto del conjugado, $-\bar{z}$. Representa los cuatro números complejos en el plano de Gauss y únelos en el siguiente orden: $z, \bar{z}, -z, -\bar{z}, z$. ¿Qué polígono se obtiene?

Solución:

$\bar{z} = 5 - 3i$

$-z = -5 - 3i$

$-\bar{z} = -5 + 3i$



Se obtiene un rectángulo.

84. Resuelve la siguiente ecuación sabiendo que **z** es un número complejo: $2z + 6 - 3i = 5z - 3 + 3i$

Solución:

$z = 3 - 2i$

85. Dados los números complejos $z_1 = 4 + xi, z_2 = x - i$, halla **x** para que $z_1 \cdot z_2$ sea:

a) un número real.

b) un número imaginario puro.

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = 5x + (x^2 - 4) i$

a) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

b) $5x = 0 \Rightarrow x = 0$

86. Dados los números complejos $z_1 = 2 - 6i, z_2 = x + 3i$, halla **x** para que z_1/z_2 sea:

a) un número real.

b) un número imaginario puro.

Solución:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2x - 18}{x^2 + 9} - \frac{6x + 6}{x^2 + 9} i$

a) $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

b) $2x - 18 = 0 \Rightarrow x = 9$

87. Dado el número complejo $z = x - 3i$, halla **x** para que $(x - 3i)^2$ sea:

a) un número real.

b) un número imaginario puro.

Solución:

$(x - 3i)^2 = x^2 - 9 - 6xi$

a) $-6x = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

88. Resuelve la siguiente ecuación:

$$(x - 5i)(3 + yi) = 22 - 7i$$

Solución:

$3x + 5y + (xy - 15)i = 22 - 7i$

Se transforma en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 22 \\ xy - 15 = -7 \end{array}\right\}$$

$x_1 = 4, y_1 = 2$

$x_2 = 10/3, y_2 = 12/5$

89. Dados los números complejos $z_1 = x + i, z_2 = 2 + i$, halla **x** para que el afijo de $z_1 \cdot z_2$ esté en la bisectriz del 1er cuadrante.

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = 2x - 1 + (x + 2)i \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 1 = x + 2 \Rightarrow x = 3$

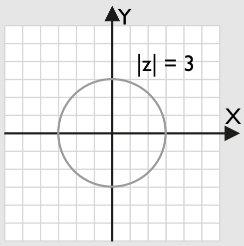
Comprobación:

$z_1 \cdot z_2 = 5 + 5i$

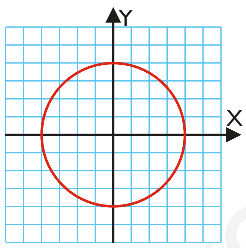
90. Define y representa el lugar geométrico definido por: $|z| = 3$

Solución:

Es una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 3



91. Escribe la condición que deben cumplir los números complejos representados en la siguiente figura:



Solución:

Que su módulo sea 4

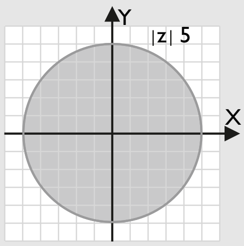
$|z| = 4$

92. Define y representa el lugar geométrico definido por:

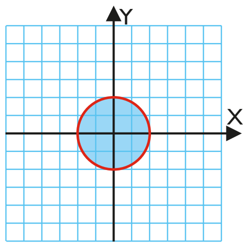
$$|z| \leq 5$$

Solución:

Es el círculo de centro el origen de coordenadas y radio 5, es decir, la circunferencia y su interior.



93. Escribe la condición que deben cumplir los números complejos representados en la siguiente figura:



Solución:

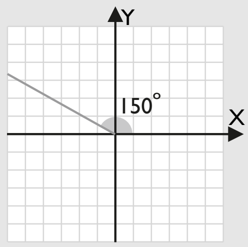
Que su módulo sea menor o igual que 2

$|z| \leq 2$

94. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos que tienen de argumento 150°

Solución:

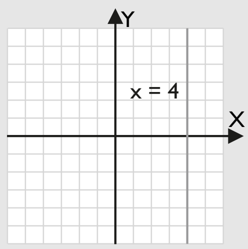
Es una semirrecta que nace en el origen de coordenadas, y el ángulo que forma el semieje positivo de las X con dicha semirrecta tiene de amplitud 150°



95. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos que tienen de parte real 4

Solución:

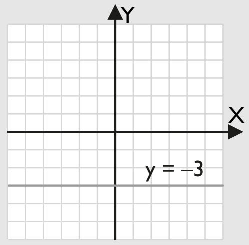
Es una recta vertical de abscisa 4



96. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos que tienen de parte imaginaria -3

Solución:

Es una recta horizontal de ordenada – 3



97. Dado el número complejo:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

calcula z^{50}. Da el resultado en forma binómica.

Solución:

$z = 1_{45°}$

$z^{50} = (1_{45°})^{50} = 1^{50}_{50 \cdot 45°} = 1_{90°} = i$

98. Aplicando la fórmula de Moivre, expresa sen 2α y cos 2α en función del seno α y del cos α

Solución:

$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha$

Desarrollando el cuadrado del primer miembro e igualando las partes reales e imaginarias, se obtiene:

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

99. Halla los vértices de un hexágono regular, sabiendo que uno de ellos es el punto A(5, 0)

Solución:

$A(5, 0) \Rightarrow z = 5_{0°}$

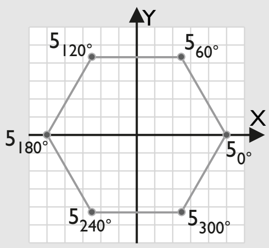
$5_{0°} \cdot 1_{60°} = 5_{60°}$

$5_{60°} \cdot 1_{60°} = 5_{120°}$

$5_{120°} \cdot 1_{60°} = 5_{180°}$

$5_{180°} \cdot 1_{60°} = 5_{240°}$

$5_{240°} \cdot 1_{60°} = 5_{300°}$



100. Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto V(3, 2) y que no corta al eje de abscisas.

Solución:

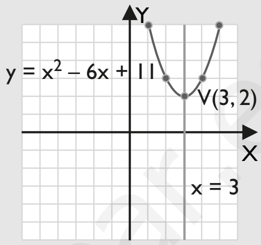
Las raíces son:

$x_1 = 3 + \sqrt{2}i$

$x_2 = 3 - \sqrt{2}i$

$(x - 3)^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 11 = 0$

$y = x^2 - 6x + 11$



101. Halla las raíces cúbicas de i y de $-i$, represéntalas gráficamente en los mismos ejes coordenados y forma el polígono que se obtiene uniendo los afijos de cada una de las raíces.

Solución:

$z = i = 1_{90°}$

$z_1 = 1_{30°}$

$z_2 = 1_{150°}$

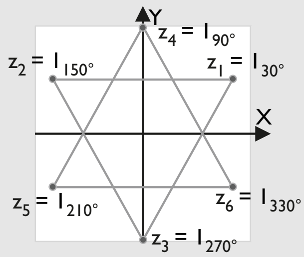
$z_3 = 1_{270°}$

$z = -i = 1_{270°}$

$z_4 = 1_{90°}$

$z_5 = 1_{210°}$

$z_6 = 1_{330°}$



Para profundizar

102. ¿En qué números complejos coincide su inverso con su conjugado? Representa gráficamente la solución.

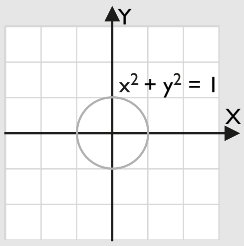
Solución:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i = x - yi$$

Para que las partes reales e imaginarias sean iguales tiene que ser:

$x^2 + y^2 = 1$

Son los números complejos que tienen de módulo uno, es decir, los números complejos que están sobre la circunferencia unidad.

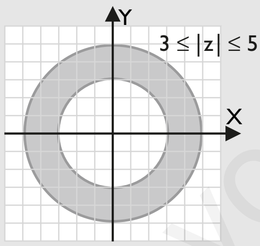


103. Define y representa el lugar geométrico determinado por:

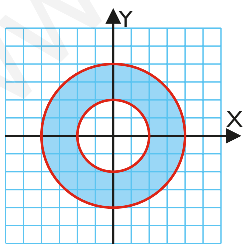
$$3 \le |z| \le 5$$

Solución:

Son los números complejos cuyo módulo está comprendido entre 3 y 5, es decir, una corona circular de radios 3 y 5, con el centro en el origen de coordenadas.



104. Escribe la condición que deben cumplir los números complejos representados en la siguiente figura:



Solución:

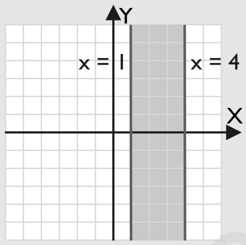
$2 \le |z| \le 4$

105. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos cuya parte real está comprendida entre 1 y 4

Solución:

Es una franja vertical comprendida entre las rectas x = 1 y x = 4

$1 \le \text{Real}(z) \le 4$



106. Dado el número complejo:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

calcula z^{50}. Da el resultado en forma binómica.

Solución:

$z = 1_{315°}$

$z^{50} = (1_{315°})^{50} = 1^{50}_{50 \cdot 315°} = 1_{270°} = -i$

107. Si el cociente de dos números complejos no reales es un número real, ¿qué relación hay entre sus argumentos? Pon un ejemplo.

Solución:

La diferencia de sus argumentos tiene que ser 0° o 180°

$6_{30°} : 2_{30°} = 3_{0°} = 3$

$6_{210°} : 2_{30°} = 3_{180°} = -3$

108. Halla un número complejo cuyo cuadrado sea un número real negativo.

Solución:

$z = 5i$

$z^2 = -25$

109. Halla un número complejo cuyo cuadrado sea un número imaginario puro.

Solución:

$z = 3_{45°}$

$z^2 = 9_{90°} = 9i$

110. Aplicando la fórmula de Moivre, expresa sen 3α y cos 3α en función del seno α y del cos α. Ten en cuenta que: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Solución:

$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha$

Desarrollando el primer cubo e igualando las partes reales e imaginarias, se obtiene:

$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha$

$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$

111. Halla los vértices de un cuadrado de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el punto A(3, 4). Haz el dibujo.

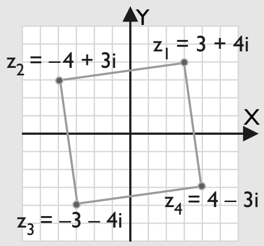
Solución:

$z_1 = 3 + 4i$

$z_2 = z_1 \cdot i = -4 + 3i$

$z_3 = z_2 \cdot i = -3 - 4i$

$z_4 = z_3 \cdot i = 4 - 3i$



112. Halla los vértices de un pentágono regular sabiendo que uno de ellos es el punto A(0, 4)

Solución:

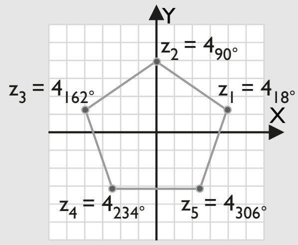
$A(0, 4) \Rightarrow z = 4_{90°}$

$4_{90°} \cdot 1_{72°} = 4_{162°}$

$4_{162°} \cdot 1_{72°} = 4_{234°}$

$4_{234°} \cdot 1_{72°} = 4_{306°}$

$4_{306°} \cdot 1_{72°} = 4_{18°}$



113. Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto V(– 3, 1) y que no corta al eje de abscisas.

Solución:

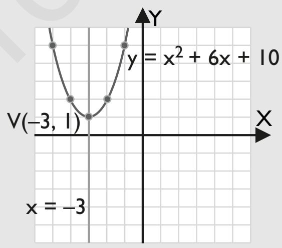
Las raíces son:

$x_1 = -3 + i$

$x_2 = -3 - i$

$(x + 3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 10$

$y = x^2 + 6x + 10$



114. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$

b) $x^3 + 6x + 20 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 3 + 2i$, $x_3 = 3 - 2i$

b) $x_1 = -2$, $x_2 = 1 + 3i$, $x_3 = 1 - 3i$

Paso a paso

115. Multiplica los siguientes números complejos.

$z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = 4 + 5i$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

116. Divide los siguientes números complejos.

$z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = 4 + 5i$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

117. Calcula la siguiente potencia: $(2 + 3i)^5$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

118. Resuelve la ecuación: $x^2 - 6x + 13 = 0$
Haz la interpretación gráfica representando la parábola correspondiente.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

119. Representa el lugar geométrico definido por la expresión: $|z| = 5$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

120. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

121. Sean $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = -2 + 3i$
Calcula:
a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$
c) $7z_1 - 4z_2$ d) $-5z_1 + 9z_2$

Solución:
a) $3 - i$ b) $7 - 7i$
c) $43 - 40i$ d) $-43 + 47i$

122. Sean $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 4 - 2i$, $z_3 = -1 + 6i$
Calcula:
a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:
a) $22 + 14i$ b) $-33 + 13i$ c) $8 + 26i$

123. Calcula:
a) $(3 + 2i)^7$ b) $(-4 + 7i)^8$
c) $(2 - i)^9$ d) $(1 + i)^{10}$

Solución:
a) $-4449 - 6554i$ b) $-9470207 - 15131424i$
c) $-718 + 1199i$ d) $32i$

124. Sean $z_1 = 5 + 6i$, $z_2 = 8 - 9i$, $z_3 = -4 + 3i$
Calcula:
a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:
a) $-\dfrac{14}{145} + \dfrac{93}{145}i$
b) $-\dfrac{2}{25} - \dfrac{39}{25}i$
c) $-\dfrac{59}{25} + \dfrac{12}{25}i$

125. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $z^2 = -3$ b) $z^2 = -i$
c) $z^3 = 1$ d) $z^3 = i$

Solución:
a) $z_1 = -\sqrt{3}i,\ z_2 = \sqrt{3}i$
b) $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$
c) $z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = 1$
d) $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i,\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i,\ z_3 = -i$

126. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 = 81$

b) $z^4 = -16$

c) $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

Solución:

a) $z_1 = -3i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3$, $z_4 = 3$

b) $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $z_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z_1 = -3i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -2$, $z_4 = 2$

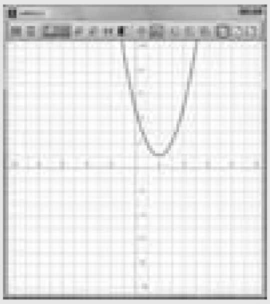
d) $z_1 = -3i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2i$

127. Resuelve la ecuación: $x^2 - 4x + 5 = 0$

Haz la interpretación gráfica representando la parábola correspondiente.

Solución:

$x_1 = 2 - i$, $x_2 = 2 + i$



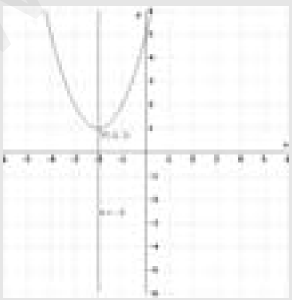
128. Resuelve la ecuación:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Haz la interpretación gráfica representando la parábola correspondiente.

Solución:

$x_1 = -2 - i$, $x_2 = -2 + i$



129. Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces complejas conjugadas $3 \pm 4i$

Solución:

$(x - 3)^2 + 16 = 0$

$x^2 - 6x + 25 = 0$

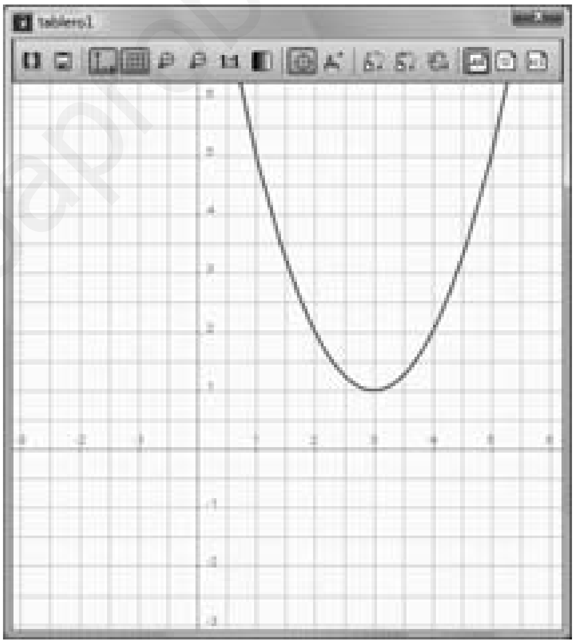
130. Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces: $6 \pm \sqrt{5}\,i$

Solución:

$(x - 6)^2 + 5 = 0$

$x^2 - 12x + 41 = 0$

131. Mediante *ensayo-acierto* halla la fórmula de la siguiente parábola.



Solución:

$y = x^2 - 6x + 10$