NÚMEROS REALES. POLINOMIOS Y RAZONES ALGEBRAICAS.

Parte I.

Ejercicio 1.

a) Definición de entorno. Tipos de entornos y su expresión mediante un intervalo.

b) Exprese como entornos los siguientes conjuntos:

i. $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$

ii. $\{x \in \mathbb{R} : d(x,-1) < 5\}$

iii. $[-3,5]$

Resolución.

a) Puede consultarse en el libro de texto.

b) Los entornos son los siguientes:

i. $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-0| \leq 2\} = \overline{E}(0;2)$

ii. $\{x \in \mathbb{R} : d(x,-1) < 5\} = E(-1;5)$

iii. $[-3,5] = [1-4, 1+4] = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 4\} = \overline{E}(1;4)$

Ejercicio 2.

Demuestre, indicando las propiedades que utiliza, que si $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ **entonces** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n}$ **, siempre que existan todos los radicales contenidos en la igualdad.**

Resolución.

Sabemos que, en las condiciones del ejercicio, si $p \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[y]{x} = \sqrt[y \cdot p]{x^p}$. Por tanto:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^m} \text{ y } \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{b^n}$$

Además, sabemos que, si $p \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[p]{x} \cdot \sqrt[p]{y} = \sqrt[p]{x \cdot y}$, por lo que:

$$\sqrt[n \cdot m]{a^m} \cdot \sqrt[n \cdot m]{b^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} .$$

Luego,

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m} \cdot \sqrt[n \cdot m]{b^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n}$$

Ejercicio 3.

a) Definición de polinomio reducible y de polinomio irreducible.

b) Enuncie y demuestre el Teorema del Resto y el Teorema del Factor.

Resolución.

a) Un polinomio reducible es aquel polinomio $p(x)$ que se puede expresar como producto de otros dos de menor grado que $p(x)$.

b) Teorema del Resto. El valor numérico de un polinomio $p(x)$ para $x = a$ es igual al resto de dividir $p(x)$ entre $x - a$.

Demostración: Como $x - a$ tiene grado 1, el resto r de la división de $p(x)$ entre $x - a$ es de grado cero (es decir, un número real). Sea $C(x)$ el cociente de dicha división. Entonces:

$$p(x) = C(x) \cdot (x-a) + r$$

Sustituyendo x por a en ambos miembros, obtenemos:

$$p(a) = C(a)\cdot(a-a) + r = C(a)\cdot 0 + r = r$$

Teorema del factor. Un polinomio $p(x)$ es divisible entre $x-a$ si y sólo si a es una raíz de $p(x)$.

Demostración.

Sea r el resto de la división de $p(x)$ entre $x-a$. Entonces $p(x)$ es divisible entre $x-a$ si y sólo si $r=0$. Por el teorema del Resto, esto es verdad si y sólo si $p(a)=0$, es decir, si y sólo si a es raíz de $p(x)$.

<u>Ejercicio 4.</u>

a) Consideremos el conjunto formado por las inversas de los números naturales, $I = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \right\}$. Estudie su acotación, existencia de máximo, mínimo, supremo e ínfimo.

(Indicaciones: Represente los elementos de I sobre la recta real y observe el conjunto de puntos que resulta. Deduzca el mínimo intervalo de números reales que contiene todos los puntos)

b) Consideremos ahora el conjunto formado por los opuestos de los elementos de I, es decir, $J = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ -\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots \right\}$. Estudie su acotación, existencia de máximo, mínimo, supremo e ínfimo.

(Indicación: Utilice las conclusiones del apartado anterior, representando, si es necesario, el conjunto J).

c) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, estudie la acotación y existencia de máximo, mínimo, supremo e ínfimo del conjunto unión de ambos $I \cup J$.

Resolución.

a) El conjunto I está formado por números positivos menores o iguales que 1. Además, se aproximan a 0 tanto como queramos, por lo que el menor intervalo en el que está incluido I es el intervalo $(0,1]$. Está claro que el conjunto I no es todo el intervalo pero sí están todos sus elementos dentro de dicho intervalo. Evidentemente este intervalo está acotado tanto superior como inferiormente (0 y 1 son cotas inferior y superior respectivamente).
   Además, como $1 \in I$ y $0 \notin I$, el valor 1 es un máximo y supremo de I y el valor 0 es un ínfimo de I, pero no tiene mínimo pues el ínfimo no está en I.

b) Los elementos de J son los elementos opuestos de I, por lo que es claro que está también acotado (valen los opuestos de las cotas indicadas anteriormente, aunque ahora -1 es cota inferior y 0 es cota superior) y -1 es mínimo e ínfimo y 0 es supremo pero no máximo, por lo que J no posee supremo.

c) Como I tiene cota inferior 0 y J tiene cota inferior -1, es claro que $I \cup J$ tiene cota inferior -1. De igual forma vemos que $I \cup J$ tiene cota superior 1. Por tanto $I \cup J$ está acotado. Como todos sus elementos están entre -1 y 1 y ambos elementos pertenecen a $I \cup J$, es claro que su ínfimo y mínimo es -1 y su supremo y máximo es 1.

Parte II.

Ejercicio 5.

Opere, simplifique y, en su caso, racionalice las siguientes expresiones:

a) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\div\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{4y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

b) $\left(\sqrt[4]{64}-4\sqrt[3]{2^{3/2}}+\sqrt{18}+1\right)\left(\sqrt[3]{4\sqrt{\dfrac{1}{2}}}-1\right)$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2b}+\sqrt{b^3-2ab^2+a^2b}}{\sqrt{9b}-\sqrt{4a^3}}$

Resolución.

a) $$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\div\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{4y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-\sqrt{4y}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{2\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$$

b) $$\left(\sqrt[4]{64}-4\sqrt[3]{2^{3/2}}+\sqrt{18}+1\right)\left(\sqrt[3]{4\sqrt{\frac{1}{2}}}-1\right)=\left(\sqrt[4]{2^6}-4\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}+\sqrt{3^2\cdot 2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{\frac{16}{2}}}-1\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2^3}-4\sqrt[6]{2^3}+3\cdot\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt[6]{8}-1\right)=\left(2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt[6]{2^3}-1\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2=2-1=1.$$

c) $$\frac{\sqrt{a^2b}+\sqrt{b^3-2ab^2+a^2b}}{\sqrt{9b}-\sqrt{4a^3}}=\frac{a\sqrt{b}+\sqrt{b\left(b^2-2ab+a^2\right)}}{3\sqrt{b}-2a\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{b}+\sqrt{b\left(b-a\right)^2}}{3\sqrt{b}-2a\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{b}+\left(b-a\right)\sqrt{b}}{3\sqrt{b}-2a\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}}{3\sqrt{b}-2a\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{b}}{3\sqrt{b}-2a\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{b}\left(3\sqrt{b}+2a\sqrt{a}\right)}{\left(3\sqrt{b}-2a\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt{b}+2a\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\frac{b\sqrt{b}\left(3\sqrt{b}+2a\sqrt{a}\right)}{\left(3\sqrt{b}-2a\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt{b}+2a\sqrt{a}\right)}=\frac{3b^2+2ab\sqrt{ab}}{9b-4a^3}$$

Ejercicio 6.

Sean $P(X)$ **y** $Q(X)$ **los polinomios:**

$P(X)=2X^4+aX^3-14X^2+40X-24$**, donde** a **es el coeficiente para el que este polinomio tiene resto** -72 **al dividirlo entre** $(X+1)$**.**

$Q(X)=-X^4-5X^3+bX^2+21X+18$**, donde** b **es el coeficiente para el que este polinomio tiene resto 32 al dividirlo entre** $(X-1)$**.**

Halle el polinomio máximo común divisor y el polinomio mínimo común múltiplo (ambos con coeficiente principal 1) de los polinomio $P(X)$ y $Q(X)$

Resolución.

Por el Teorema del Resto sabemos que $P(-1)=-72$ y que $Q(1)=32$. Sustituyendo en las expresiones de tales polinomios, obtenemos:

$$P(-1)=2-a-14-40-24=-a-76=-72\Rightarrow a=-4$$

$$Q(1)=-1-5+b+21+18=33+b=32\Rightarrow b=-1.$$

Por tanto los polinomios son:

$$P(X)=2X^4-4X^3-14X^2+40X-24=2(X-2)^2(X-1)(X+3)$$

$$Q(X)=-X^4-5X^3-X^2+21X+18=-(X-2)(X+1)(X+3)^2$$

Las factorizaciones se pueden realizar fácilmente haciendo divisiones por el método de Ruffini.

Por tanto el máximo común divisor y mínimo común divisor de P y Q son, respectivamente:

$$MCD(P,Q)=(X-2)(X+3)=X^2+X-6$$

$$mcm(P,Q)=(X-2)^2(X-1)(X+1)(X+3)^2=X^6+2X^5-12X^4-14X^3+47X^2+12X-36$$

(Nota: el desarrollo de estos polinomios no es necesario indicarlo).

<u>Ejercicio 7.</u>

Realice las siguientes operaciones y exprese el resultado como suma de razones algebraicas simples:

$$\left(\frac{x^2-2x-x^3+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}+\frac{x+2}{x^2+1}\right)\cdot\frac{-2}{x-2}$$

Resolución.

Factorizando los denominadores, obtenemos:

$$\left(\frac{x^2-2x-x^3+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}+\frac{x+2}{x^2+1}\right)\cdot\frac{-2}{x-2}=\left(\frac{x^2-2x-x^3+4}{(x-1)^2(x^2+1)}+\frac{x+2}{x^2+1}\right)\cdot\frac{-2}{x-2}=$$

$$=\left(\frac{x^2-2x-x^3+4}{(x-1)^2(x^2+1)}+\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+1)}\right)\cdot\frac{-2}{x-2}=\left(\frac{x^2-2x-x^3+4}{(x-1)^2(x^2+1)}+\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\right)\cdot\frac{-2}{x-2}=$$

$$=\left(\frac{x^2-5x+6}{(x-1)^2(x^2+1)}\right)\cdot\frac{-2}{x-2}=\frac{-2(x-2)(x-3)}{(x-1)^2(x^2+1)(x-2)}=\frac{-2(x-3)}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Para expresarlo como suma de razones algebraicas simples, sabemos que existen $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ tales que:

$$\frac{-2(x-3)}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Igualando los numeradores de la primera y última razón, obtenemos:

$$-2x+6=A(x^3-x^2+x-1)+B(x^2+1)+Cx^3+(-2C+D)x^2+(C-2D)x+D$$

de donde, igualando los coeficientes de los términos de igual grado:

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ -A+B-2C+D=0 \\ A+C-2D=-2 \\ -A+B+D=6 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación, $C=-A$ y sustituyendo en tercera, obtenemos $-2D=-2 \Rightarrow D=1$.

Sustituyendo en la segunda y cuarta obtenemos $\left.\begin{array}{l} -A+B+2A+1=0 \\ -A+B+1=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=-1 \\ -A+B=5 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-3, B=2$,

por lo que queda:

$$\frac{-2(x-3)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3x+1}{x^2+1}$$

Ejercicio 8.

a) Desarrolle la potencia $\left(x-2x^2\right)^5$**.**

b) Halle el término de grado 14 en el desarrollo de $\left(3x^4+\dfrac{1}{x}\right)^6$**.**

Resolución.

a) $\left(x-2x^2\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}\left(-2x^2\right)^k=x^5+5x^4(-2)x^2+10x^3(-2)^2\left(x^2\right)^2+10x^2(-2)^3\left(x^2\right)^3+$

$+5x(-2)^4\left(x^2\right)^4+(-2)^5\left(x^2\right)^5=x^5-10x^6+40x^7-80x^8+80x^9-32x^{10}$

b) Uno de los términos es $\binom{6}{k}3^k\left(x^4\right)^k\left(\dfrac{1}{x}\right)^{6-k}=\binom{6}{k}3^k x^{4k}\left(x^{-1}\right)^{6-k}=\binom{6}{k}3^k x^{4k-6+k}=\binom{6}{k}3^k x^{5k-6}$.

Como queremos el término de grado 14, entonces $5k-6=14 \Rightarrow 5k=20 \Rightarrow k=4$.

Luego el término de grado 14 es:

$$\binom{6}{4}3^4x^{14}=15\cdot 3^4x^{14}=1215x^{14}$$