

Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. [2 puntos] Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$.

2. [2 puntos] Averiguar para qué valores del parámetro k , la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A para $k = 2$.

3. [1,5 puntos] Estudia el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro k .

Supongamos que k se sustituye por el valor para el que el rango de M no es tres, ¿cuál es el sistema de ecuaciones asociado a la matriz M ? ¿Crees que tiene solución?

4. [2,5 puntos] Despeja la matriz X en la ecuación $XA^2 - B = X$. Halla la matriz X sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. [2 puntos] Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, usa las propiedades de los determinantes para calcular el valor

de los dos siguientes: $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix}$.

Soluciones

1. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$. La factorización del polinomio x^3+x^2 es $x^2(x+1)$. Descompongamos pues la fracción

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{x+2}{x^2(x+1)} \text{ en fracciones simples. } \frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

Igualando los numeradores: $x+2 = Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$.

Si $x=0$, tenemos que $B=2$. Si $x=-1$, tenemos que $C=1$. Si $x=1$ tenemos que $3=2A+4+1 \Rightarrow A=-1$

Entonces $\frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1}$, es decir: $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx = -\ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|x+1| + C = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{2}{x} + C$

2. A no tiene inversa si, y sólo si, $|A|=0$. Pero $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 - (-4k+3) = -k^2 + 4k - 3$. Las

soluciones de $-k^2 + 4k - 3 = 0$ son $k = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$. Por tanto, para los

dos valores anteriores la matriz A no tiene inversa.

Si $k=2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A|=1$. Calculemos la matriz adjunta de A :

$$A^d = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Entonces } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Aplicando el método de Gauss tenemos: $\begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 + 3f_1 \\ f_3 - kf_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ 0 & 6-3k & 0 & 0 \\ 0 & -4+k^2 & 6-3k & -4+2k \end{pmatrix}$

Es fácil darse cuenta ahora que si $k=2$ la segunda y la tercera fila se anulan y que si $k \neq 2$ las tres filas

son distintas de cero. Por tanto tenemos que $\begin{cases} r(M) = 1 \Leftrightarrow k = 2 \\ r(M) = 3 \Leftrightarrow k \neq 2 \end{cases}$

Si $k=2$ la matriz toma la siguiente forma $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, matriz que, al aplicar el método de

Gauss como hemos hecho antes se convierte en $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo sistema asociado tiene solamente

una ecuación: $x-2y+3z=-2$ (un plano). Este sistema tiene infinitas soluciones (los infinitos puntos del plano), pues si damos valores cualesquiera tanto a y como a z , por ejemplo, $y=a$, $z=b$ tenemos que $x=2a-3b-2$ y las infinitas soluciones son el conjunto $\{(2a-3b-2, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

$$4. \quad XA^2 - B = X \Rightarrow XA^2 - X = B \Rightarrow X(A^2 - I) = B \Rightarrow X(A^2 - I)(A^2 - I)^{-1} = B(A^2 - I)^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow X \cdot I = B(A^2 - I)^{-1} \Rightarrow X = B(A^2 - I)^{-1}$$

Si ahora llamamos $C = A^2 - I$ tenemos que $X = BC^{-1}$. Para hallar X tenemos que calcular previamente la inversa de la matriz C .

$$C = A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante de C es $|C| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (8-1) - (-2-2) = 11$

$$C^d = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \frac{1}{|C|}(C^d)^t = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 5 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = BC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$5. \quad \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2 \cdot 7 = 14$$

$$\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & c & 5a \\ -q & r & 5p \\ -y & z & 5x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & b & 5a \\ -q & q & 5p \\ -y & y & 5x \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + 0 = [\text{dos cambios en las columnas}]$$

$$= -5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -5 \cdot 7 = -35$$