Julio 2018. Extraordinaria. Ejercicio 2A. Calificación máxima: 2,5 puntos

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si} \quad x\le 2 \\ \dfrac{x^3-4x}{x-2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ y se pide:

c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución.

c. $$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 8\,e^{2x\text{-}4}\,dx=\frac{8}{2}\int_0^2 e^{2x\text{-}4}\cdot 2\,dx=\left[4\cdot e^{2x\text{-}4}\right]_0^2=4\cdot e^{2\cdot 2\text{-}4}-4\cdot e^{2\cdot 0\text{-}4}=4-\frac{4}{e^4}$$

Junio 2017. Ejercicio 4A: Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

c) (1 punto) Calcular $\int_3^5 f(x)\,dx$

Solución.

c. $$\int_3^5 f(x)\,dx=\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx$$

Por ser el numerador de mayor grado que el denominador, se divide la fracción. Utilizando el método de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{12} \end{array} \qquad \frac{x^2+x+6}{x-2}=x+3+\frac{12}{x-2}$$

$$\int_3^5 f(x)\,dx=\int_3^5\left(x+3+\frac{12}{x-2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x+12\,\text{Ln}|x-2|\right]_3^5=$$

$$=\frac{5^2}{2}+3\cdot 5+12\,\text{Ln}|5-2|-\left(\frac{3^2}{2}+3\cdot 3+12\,\text{Ln}|3-2|\right)=14+12\,\text{Ln}\,3$$

Septiembre 2016. Ejercicio 2B. Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{5+x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

Solución.

c. Aplicando las propiedades de la regla de Barrow, la integral ase descompone en suma de integrales.

Si c es un punto interior al intervalo $[a,b]$, se verifica:

$$\int_a^c f(x)\cdot dx+\int_c^b f(x)\cdot dx=\int_a^b f(x)\cdot dx$$

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0\frac{1}{5-x}\,dx+\int_0^1\frac{1}{5+x}\,dx=-\int_{-1}^0\frac{-1}{5-x}\,dx+\left(\text{Ln}|5+x|\right]_0^1=-\left(\text{Ln}|5-x|\right]_{-1}^0+\left(\text{Ln}|5+x|\right]_0^1=$$

$$= -\text{Ln}|5-0| - \left(-\text{Ln}|5-(-1)|\right) + \text{Ln}|5+1| - \text{Ln}|5+0| = -\text{Ln}5 + \text{Ln}6 + \text{Ln}6 - \text{Ln}5 = 2\text{Ln}\frac{6}{5}$$

Junio 2016. Ejercicio 3B. Calificación máxima 2 puntos

a) (1 punto) Determine el polinomio f(x), sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in R$ y además verifica: f(1) = 3; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) (1 punto) Determine el polinomio g(x), sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in R$ y además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 5 \quad , \quad \int_0^2 g(x)\,dx = 14$$

Solución.

a. Por definición de función derivada:

$$f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx}$$

Separando variables e integrando se obtiene la primitiva de $f''(x)$

$df''(x) = f'''(x)\cdot dx$ Integrando los dos miembros de la igualdad $\int df''(x) = \int f'''(x)\cdot dx$

$$f''(x) = \int 12\cdot dx = 12x + C_1$$

La solución particular se calcula con el dato $f''(1) = 4$

$$f''(1) = 12\cdot 1 + C_1 = 4 \quad ; \quad C_1 = -8 \quad ; \quad f''(x) = 12x - 8$$

Repitiendo el procedimiento se obtiene a $f'(x)$ y de esta, se llega a $f(x)$

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} \quad ; \quad df'(x) = f''(x)\cdot dx \quad ; \quad \int df'(x) = \int f''(x)\cdot dx \quad ;$$

$$f'(x) = \int (12x-8)\cdot dx = \frac{12x^2}{2} - 8x + C_2$$

La solución particular se calcula con el dato $f'(1) = 1$

$$f'(1) = 6\cdot 1^2 - 8\cdot 1 + C_2 = 1 \quad ; \quad C_2 = 3 \quad ; \quad f'(x) = 6x^2 - 8x + 3$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad ; \quad df(x) = f'(x)\cdot dx \quad ; \quad \int df(x) = \int f'(x)\cdot dx \quad ; \quad f(x) = \int \left(6x^2 - 8x + 3\right)\cdot dx$$

$$f(x) = \frac{6x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 3x + C_3 = 2x^3 - 4x^2 + 3x + C_3$$

La solución particular se calcula con el dato $f(1) = 3$

$$f(1) == 2\cdot 1^3 - 4\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + C_3 = 3 \quad ; \quad C_3 = 2$$

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

b. Operando de la misma forma que en el apartado anterior, se obtiene g(x).

$$g''(x) = \frac{dg'(x)}{dx} \quad ; \quad dg'(x) = g''(x)\cdot dx \quad ; \quad \int dg'(x) = \int g''(x)\cdot dx \quad ; \quad g'(x) = \int 6\cdot dx = 6x + C_1$$

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} \quad ; \quad dg(x) = g'(x)\cdot dx \quad ; \quad \int dg(x) = \int g'(x)\cdot dx \quad ; \quad g(x) = \int (6x + C_1)\cdot dx$$

$$g(x) = \frac{6x^2}{2} + C_1x + C_2 = 3x^2 + C_1x + C_2$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2, se dan los datos $\int_0^1 g(x)\,dx = 5$ y $\int_0^2 g(x)\,dx = 14$, con los que se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\int \left(3x^2 + C_1x + C_2\right)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C = x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \left(x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x\right]_0^1 = \left(1^3 + \frac{C_1}{2}1^2 + C_2\cdot 1\right) - \left(0^3 + \frac{C_1}{2}0^2 + C_2\cdot 0\right) = 5 \quad ; \quad \frac{1}{2}C_1 + C_2 = 4$$

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \left(x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x\right]_0^1 = \left(2^3 + \frac{C_1}{2}2^2 + C_2\cdot 2\right) - \left(0^3 + \frac{C_1}{2}0^2 + C_2\cdot 0\right) = 14 \quad ; \quad 2C_1 + 2C_2 = 6$$

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 8 \\ C_1 + C_2 = 3 \end{cases} : \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 5 \end{cases}$$

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Modelo 2016. Ejercicio 2A. Calificación máxima: 3 puntos
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x < 1 \\ x\,e^{1-x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

se pide:

b) (0,5 puntos) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Solución.

b. $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = \left(-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{0^2}{2} - \left(-\frac{1^2}{2}\right) + \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Junio 2015. Ejercicio 1A. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\operatorname{Ln}(x+1)}{x+1},$$

donde Ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

c) (0'75 puntos) Calcular $\int f(x)\,dx$.

Solución.

c. $$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{\operatorname{Ln}(x+1)}{x+1}\right)dx = \int \frac{x}{x^2-4}\,dx + \int \frac{\operatorname{Ln}(x+1)}{x+1}\,dx$$

La primera es del tipo logaritmo $\begin{cases} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \operatorname{Ln}|f(x)| + C \\ f(x) = x^2 - 4 \qquad f'(x) = 2x \end{cases}$.

La segunda es de tipo potencial $\begin{cases} \int f^n(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \quad \forall n \ne -1 \\ f(x) = \operatorname{Ln}(x+1) \qquad f'(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx + \int \frac{\operatorname{Ln}(x+1)}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx + \int \operatorname{Ln}(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(x^2-4\right) + \frac{(\operatorname{Ln}(x+1))^2}{2} + C$$

Septiembre 2014. Ejercicio 1A. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$$

se pide:

c) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución.

c. $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x}{x+4}\,dx = \left\{\begin{array}{c}\text{Dividiendo}\\ \dfrac{x}{x+4}=1-\dfrac{4}{x+4}\end{array}\right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^1\left(1-\frac{4}{x+4}\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{4}{x+4}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^1 dx - 4\int_0^1 \frac{1}{x+4}\,dx =$$

$$= \left(\mathrm{Ln}|x+1|\right]_0^1 + \left(x\right]_0^1 - 4\left(\mathrm{Ln}|x+4|\right]_0^1 = \left(x+\mathrm{Ln}\left|\frac{x+1}{(x+4)^4}\right|\right]_0^1 = 1+\mathrm{Ln}\left|\frac{1+1}{(1+4)^4}\right| - \left(0+\mathrm{Ln}\left|\frac{0+1}{(0+4)^4}\right|\right) =$$

$$= 1+\mathrm{Ln}\,\frac{2}{625} - \mathrm{Ln}\,\frac{1}{256} = 1+\mathrm{Ln}\,\frac{512}{625}$$

Septiembre 2013. Ejercicio 3B. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

b. (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 x\,f(x)\,dx$

Solución

b. $$\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot\frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

Integral racional, que por ser de igual grado numerador y denominador, habrá que empezar por descomponer dividiendo.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^2\ -1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \Longrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 1-\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left(x\right]_0^1 - \left(\mathrm{arctg}\,x\right]_0^1 =$$

$$= 1-0-\left(\mathrm{arctg}\,1-\mathrm{arctg}\,0\right) = 1-\frac{\pi}{4}$$

Junio 2013. Ejercicio 3A. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

b. (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 x\,f(x)\,dx$

Solución

b. $$\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot\frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

Integral racional, que por ser de igual grado numerador y denominador, habrá que empezar por descomponer dividiendo.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^2\ -1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \Longrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 1-\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left(x\right]_0^1 - \left(\mathrm{arctg}\,x\right]_0^1 =$$

$$= 1-0-\left(\mathrm{arctg}\,1-\mathrm{arctg}\,0\right) = 1-\frac{\pi}{4}$$

Junio 2013. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\int \frac{x-3}{x^2+9}dx$ **b)** (1 punto) $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}dx$

Solución.
a. La integral se descompone en dos, una de ellas de tipo logaritmo neperiano y la otra del tipo arcotangente.

$$\int \frac{x-3}{x^2+9}dx = \int\left(\frac{x}{x^2+9}-\frac{3}{x^2+9}\right)dx = \int \frac{x}{x^2+9}dx - \int \frac{3}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}dx - 3\int \frac{1}{x^2+3^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x^2+9\right| - 3\cdot\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3} + C = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x^2+9\right| - \mathrm{arctg}\frac{x}{3} + C$$

b. El cociente se descompone en fracciones simples.

$$\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}dx = \int_1^2\left(\frac{3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{x^4}{x^3}\right)dx = \int_1^2\left(3x^{-3}-\frac{1}{x}+x\right)dx = \left[\frac{3x^{-2}}{-2}-\mathrm{Ln}|x|+\frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2x^2}-\mathrm{Ln}|x|\right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2}-\frac{3}{2\cdot 2^2}-\mathrm{Ln}|2|\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{3}{2\cdot 1^2}-\mathrm{Ln}|1|\right) = \frac{21}{8}-\mathrm{Ln}2$$

Junio 2013. Ejercicio 1B. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función $f(x)=2\cos^2 x$, se pide:

c) (1 punto) Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

Solución.
c.
$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 x\,dx = \left\{\begin{array}{c}\text{Trigometria}\\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\end{array}\right\} == 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx = \left[x+\frac{1}{2}\mathrm{sen}2x\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(0+\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\cdot 0)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Junio 2012. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

b) (1punto) $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sen}\,2x}{1+\cos^2 2x}dx$

Solución.
b. Integral pseudo inmediata del tipo arco tangente

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \mathrm{arctg}\,f(x)+C$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sen}\,2x}{1+\cos^2 2x}dx = \left\{\begin{array}{l}f(x)=\cos 2x\\ f'(x)=-\mathrm{sen}\,2x\cdot 2\end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{-2\cdot\mathrm{sen}\,2x}{1+\cos^2 2x}dx = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(\cos 2x)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(\cos(2\cdot 0))\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(\cos\pi)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(\cos 0) =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(-1)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(1) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Modelo 2012. Ejercicio 1B. Calificación máxima: 3 puntos.

Sabiendo que la función F(x) tiene derivada f(x) continua en el intervalo cerrado [2, 5], y, además, que:

F(2) = 1; F(3) = 2; F(4) = 6; F(5) = 3; f(3) = 3 y f(4) = –1 ;

hallar:

a) (0'5 puntos). $\int_2^5 f(x)\,dx$

b) (1 punto) $\int_2^3 (5f(x)-7)\,dx$

c) (1'5 puntos). $\int_2^4 F(x)f(x)\,dx$

Solución.

$$\text{Si } F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x)+C$$

$$\text{Regla de Barrow: } \int_a^b f(x)\,dx = (F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

a. $$\int_2^5 f(x)\,dx = (F(x)]_2^5 = F(5)-F(2) = 3-1=2$$

b. $$\int_2^3 (5f(x)-7)\,dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx = 5\cdot(F(x)]_2^3 - 7\cdot(x]_2^3 = 5\cdot(F(3)-F(2))-7\cdot(3-2)=$$
$$=5\cdot(2-1)-7\cdot 1 = 5\cdot 1-7=-2$$

c. $$\int_2^4 F(x)f(x)\,dx = \int_2^4 F(x)\cdot F'(x)\,dx = \left(\frac{(F(x))^2}{2}\right]_2^4 = \frac{(F(4))^2}{2}-\frac{(F(2))^2}{2} = \frac{6^2}{2}-\frac{1^2}{2}=\frac{35}{2}$$

Nota: En el enunciado hay datos que nos ese utilizan en la resolución del ejercicio (f(3) = 3; f(4) = –1).

Junio 2011. Ejercicio 3A. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$

Solución.

a. $$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx = \int_1^3 \left(4+5x^2\right)^{1/2} x\,dx = \left\{\begin{matrix} \int f^n\cdot f'\,dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}+C & \\ f=4+5x^2 & n=1/2 \quad f'=10x \end{matrix}\right\} =$$

$$=\frac{1}{10}\int_1^3 \left(4+5x^2\right)^{1/2} 10x\,dx = \left(\frac{1}{10}\,\frac{\left(4+5x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^3 = \left(\frac{1}{15}\sqrt{\left(4+5x^2\right)^3}\right]_1^3 =$$

$$=\frac{1}{15}\sqrt{\left(4+5\cdot 3^2\right)^3}-\frac{1}{15}\sqrt{\left(4+5\cdot 1^2\right)^3} = \frac{1}{15}\sqrt{49^3}-\frac{1}{15}\sqrt{9^3} = \frac{1}{15}\left(7^3-3^3\right)$$

Septiembre 2010 F.M. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.
Hallar:

a) (0,5 puntos) $\int_{14}^{16}(x-15)^8\,dx$

Solución.
a.

$$\int_{14}^{16}(x-15)^8\,dx = \left\{\begin{array}{c} \int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C \\ f(x)=x-15 : f'(x)=1 \\ n=8 \end{array}\right\} = \left(\frac{(x-15)^9}{9}\right]_{14}^{16} = \left(\frac{(16-15)^9}{9}\right)-\left(\frac{(14-15)^9}{9}\right)=$$

$$=\frac{1}{9}-\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}$$

Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular:

a) (1 punto) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Solución.
a.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{c} \int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C \\ f(x)=4-x^2 : f'(x)=-2x \\ n=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\int_0^1\left(4-x^2\right)^{-1/2}\cdot(-2x)dx = \left(-\frac{1}{2}\frac{\left(4-x^2\right)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_0^1 =$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(4-x^2\right)^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 = \left(-\left(4-x^2\right)^{1/2}\right]_0^1 = \left(-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = -\sqrt{4-1^2}-\left(-\sqrt{4-0^2}\right)=2-\sqrt{3}$$

Junio 2009. Ejercicio 2B. Calificación máxima: 3 puntos
Si la derivada de la función f(x) es:

$$f'(x)=(x-1)^3(x-5)$$

obtener

b) (1 punto).La función f sabiendo que f(0) = 0

Solución.
c. La primitiva de la función se encuentra integrando la derivada. Se puede hacer de dos formas, expandiendo le derivada hasta un polinomio de cuarto grado, ó mediante el método de partes.

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int (x-1)^3(x-5)\cdot dx=\int\left(x^3-3x^2+3x-1\right)(x-5)\cdot dx=$$

$$=\int\left(x^4-3x^3+3x^2-x-5x^3+15x^2-15x+5\right)\cdot dx=\int\left(x^4-8x^3+18x^2-16x+5\right)\cdot dx=$$

$$=\frac{x^5}{5}-\frac{8x^4}{4}+\frac{18x^3}{3}-\frac{16x^2}{2}+5x+C=\frac{x^5}{5}-2x^4+6x^3-8x^2+5x+C$$

La constante se calcula con el dato f(0) = 0.

$$f(0)=\frac{0^5}{5}-2\cdot 0^4+6\cdot 0^3-8\cdot 0^2+5\cdot 0+C=0\Rightarrow C=0$$

$$f(x)=\frac{x^5}{5}-2x^4+6x^3-8x^2+5x$$

Septiembre 2007. Ejercicio 4A. (3 puntos).

$$f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$$

b) (1,5 puntos). Determinar una función F(x) tal que su derivada sea f(x) y además F(0) = 4.

Solución.

b. Primero se calcula la familia de primitivas mediante una integral indefinida, y a continuación se particulariza con F(0) = 4 para calcular la constante la constante y obtener la primitiva buscada.

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)\ :\ dF(x)=f(x)\cdot dx\ :\ \int dF(x)=\int f(x)\cdot dx\ :\ F(x)=\int f(x)\cdot dx$$

$$F(x)=\int\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}dx=\int\left(3+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int 3\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=3x+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x^2+1\right|+C$$

(1) La descomposición de la fracción se hace mediante la división polinómica.

$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & +\ x & +\ 3 & x^2+1 \\ \hline -3x^2 & & -3 & x \\ \hline \cancel{\ } & x & \cancel{\ } & \end{array} \Longrightarrow \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}=3+\frac{x}{x^2+1}$$

Cálculo de la constante de integración:

$$F(0)=3\cdot 0+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|0^2+1\right|+C=4:C=4\qquad(\mathrm{Ln}\ 1=0)$$

$$F(x)=3x+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x^2+1\right|+4$$

Modelo 2006. Ejercicio 4A. (3 puntos). Dada la función:

b) (1 punto). Determinar el valor del parámetro a > 0 para el cual es:

$$\int_o^a f(x)dx=-1$$

Solución.

El primer paso es calcular la primitiva de la función $\left(\int_o^a\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}dx\right)$. La integral es inmediata y corresponde a la primitiva:

$$\int f^n(x)\cdot f'(x)dx=\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C\quad\forall n\neq -1$$

Siendo: $f(x)=1+x^2$; $n=-2$; $f'(x)=2x$

Para obtener la derivada, $-4x$ se puede descomponer en $-2\cdot 2x$, y el -2 sacarlo fuera de la integral por ser una constante.

$$\int_o^a\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-2\int_o^a\left(1+x^2\right)^{-2}2x\cdot dx=\left(-2\frac{\left(1+x^2\right)^{-1}}{-1}\right]_0^a=\left(\frac{2}{1+x^2}\right]_0^a=-1-1$$

Aplicando la regla de Barrow

$$\frac{2}{1+a^2}-\frac{2}{1+0^2}=-1\ :\ 1+a^2=2$$

$$a=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Septiembre 2005. Ejercicio 2B. (2 puntos) Se considera la función:

b) (1 punto). Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

Solución.

$$\int_0^a \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx = \left\{\int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C \quad \forall n\neq -1\right\} = \int_0^a\left(\left(1+e^x\right)^{-2}\cdot e^x\right)dx = \left(\frac{\left(1+e^x\right)^{-1}}{-1}\right]_0^a =$$

$$=\left(\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^a \overset{\text{BARROW}}{=} \frac{-1}{1+e^a}-\frac{-1}{1+e^0} = \frac{-1}{1+e^a}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \quad : \quad \frac{-1}{1+e^a}=\frac{-1}{4}$$

$$\frac{-1}{1+e^a}=\frac{-1}{4}\Leftrightarrow 1+e^a=4 \qquad e^a=3 \qquad a=\text{Ln}\,3$$

Junio 2004. Ejercicio 2A. Calificación máxima: 2 puntos

Se considera la función:

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)\cdot dx$.

Solución.

$$\int_0^1\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx=\int_0^1\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}dx$$

simplificando la fracción mediante la división polinómica

$$\int_0^1\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=\int_0^1 dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{8x}{4x^2+1}dx=[x]_0^1-\frac{1}{2}\left[\text{Ln}\left(4x^2+1\right)\right]_0^1=$$

$$=(1-0)-\left(\text{Ln}\left(4\cdot 1^2+1\right)-\text{Ln}\left(4\cdot 0^2+1\right)\right)=1-\frac{1}{2}\text{Ln}\,5$$

Septiembre 2003. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 3 puntos

Sea la función

$$f(x)=\frac{\text{sen}x}{2-\cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado [−2π, 2π]. Se pide:

c) **(1 punto)** Calcular $\int_0^{\pi/3} f(x)\cdot dx$

Solución.

$$A=\int_0^{\pi/3}\frac{\text{sen}\,x}{2-\cos x}dx=\left\{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\text{Ln}|f(x)|+C\right\}=\text{Ln}|2-\cos x|\Big]_0^{\pi/3}$$

aplicando Barrow

$$A=\text{Ln}\left(2-\cos\frac{\pi}{3}\right)-\text{Ln}(2-\cos 0)=\text{Ln}\frac{3}{2}\,U^2$$

Septiembre 2002. Ejercicio 1A. Calificación máxima: 2 puntos. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

b) (1 punto) Calcular el valor de a para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x)\cdot dx = 1$

Solución:

b. Se pide resolver una ecuación expresada mediante una integral definida.

$$\int_0^a f(x)\cdot dx = 1 \quad : \quad \int_0^a \frac{x}{x^2+1}\cdot dx = 1$$

La integral indefinida se resuelve trasformándola en la primitiva $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx = \text{Ln}|f(x)| + C$. Para tener la derivada del denominador en el numerador hace falta un 2, por lo que se multiplica la expresión subintegral por 2 y la integral por ½.

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+1}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^a \frac{2\cdot x}{x^2+1}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot \text{Ln}\left(x^2+1\right)\Big]_0^a = \frac{1}{2}\cdot\left[\text{Ln}\left(a^2+1\right) - \text{Ln}\left(0^2+1\right)\right] = 1$$

Teniendo en cuenta Ln 1 = 0

$$\frac{1}{2}\cdot \text{Ln}\left(a^2+1\right) = 1 : \text{Ln}\left(a^2+1\right) = 2$$

tomando exponenciales en los dos miembros de la segunda ecuación para simplificar el logaritmo

$$e^{\text{Ln}\left(a^2+1\right)} = e^2 \Rightarrow a^2+1 = e^2$$

$$a = \sqrt{e^2-1}$$

Modelo 2000. Ejercicio 4B. Calificación máxima: 3 puntos

a) {1,5 puntos} Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

Solución.

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}} = \left\{\int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \quad \forall n \neq -1\right\} = \int_{-10}^{-1} \left(1-e^x\right)^{-1/2} e^x dx =$$

$$= \left(\frac{\left(1-e^x\right)^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{-10}^{-1} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1-e^x}\right]_{-10}^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-1}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-10}}$$