1. Hallar un vector $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}=(3,1)$ y cuyo producto escalar por sí mismo sea 1.

(1,5 puntos)

2. Dado $\vec{u}=(4,3)$, se pide:

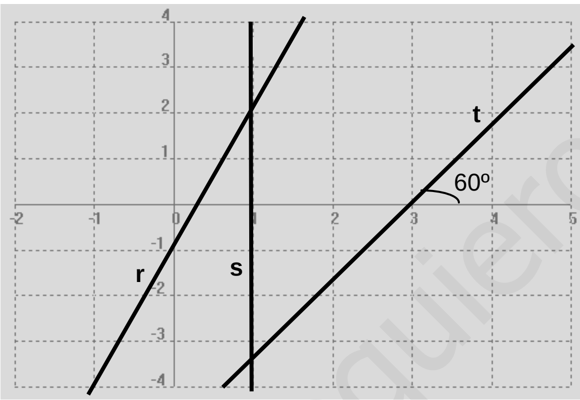
a) Hallar directamente (sin utilizar ecuaciones ni sistemas) un vector $\perp$ a $\vec{u}$ y unitario. ¿Cuántas soluciones hay? Explicar gráficamente la solución.

b) Hallar directamente (sin utilizar ecuaciones ni sistemas) un vector opuesto a $\vec{u}$ y unitario. ¿Cuántas soluciones hay? Explicar gráficamente la solución.

c) Hallar directamente (sin utilizar ecuaciones ni sistemas) un vector $\perp$ a $\vec{u}$ y de módulo 5. ¿Cuántas soluciones hay? Explicar gráficamente la solución.

d) Dado $\vec{v}=(3,1)$, hallar $\left(\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{u}\right)\vec{v}$ *(3 puntos)*

3.



Hallar la ecuación general de las rectas **r**, **s** y **t** de la figura. *(1,5 puntos)*

4. Dada la recta r: 4x+ay-2=0, se pide:

a) Hallar **a** para que pase por el punto P(1,2), y expresar para ese valor de **a** la recta en todas las formas conocidas

b) Hallar **a** para que sea // a la bisectriz del 1$^{\underline{er}}$ cuadrante, y calcular en tal caso la distancia entre ambas rectas.

c) Hallar **a** para que sea $\perp$ a otra de pendiente 3/2.

d) Hallar **a** para que forme 60º con el eje y. ¿Cuántas soluciones hay? *(3,75 puntos)*

① ¿ $\vec{u}=(a,b)$? $\vec{u}\perp\vec{v}=(3,1) \Rightarrow (a,b)\cdot(3,1)=3a+b=0$ 0.5 $\Big\} \rightarrow b=-3a \overset{(*)}{\Rightarrow} a^2+(-3a)^2=1;\ a^2+9a^2=1$

$\vec{u}\cdot\vec{u}=1 \Rightarrow (a,b)\cdot(a,b)=a^2+b^2=1\ (*)$

$10a^2=1;\ a^2=\frac{1}{10} \nearrow a_1=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow b_1=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\searrow a_2=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow b_2=+\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 0.5

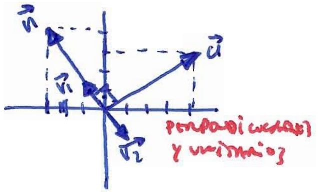
Soluc: $\boxed{\vec{u}_1=\left(\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right);\ \vec{u}_2=\left(-\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)}$ 0.5

TOTAL: 1,5

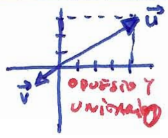
---

② $\vec{u}=(4,3)$

a) $|\vec{u}|=\sqrt{16+9}=5;\quad \vec{u}=(4,3) \overset{\perp}{\Longrightarrow} \vec{n}=(-3,4) \xrightarrow{\text{UNITARIO}} \boxed{\vec{v}_1=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) \text{ y su opuesto: } \vec{v}_2=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}$ 2 soluc.



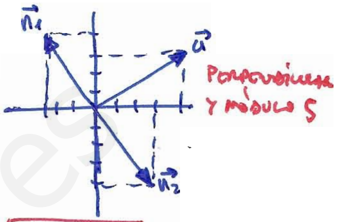
b) $\vec{u}=(4,3) \xrightarrow{\text{OPUESTO}} (-4,-3) \xrightarrow{\text{UNITARIO}} \boxed{\vec{v}=\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)}$ 1 soluc.



0,75 cada apartado

c) $\vec{u}=(4,3) \xrightarrow{\perp} \boxed{\vec{n}_1=(-3,4) \text{ y su opuesto: } \vec{n}_2=(3,-4)}$ 2 soluc.

ambos tienen igual módulo que $\vec{u}$, es decir, 5



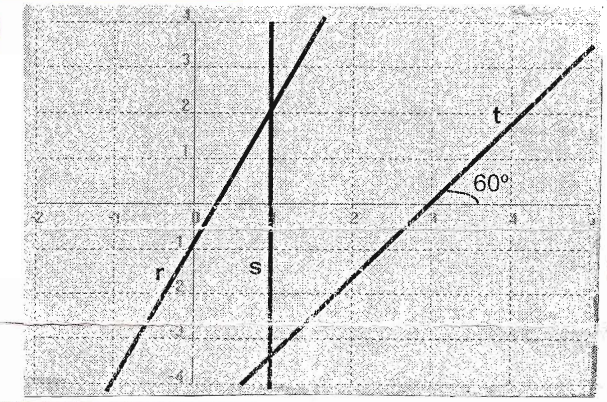
d) $(\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{u})\vec{v}=[(4,3)\cdot(3,1)-(4,3)\cdot(4,3)](3,1)=(15-25)(3,1)=-10(3,1)=\boxed{(-30,-10)}$

$\vec{v}=(3,1)$

TOTAL: 3

---

③



r: $\left.\begin{array}{l}A(0,-1)\\B(1,2)\end{array}\right\}\ \vec{u}_r=\vec{AB}=B-A=(1,3);\quad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3};\ 3x=y+1$ 0.625 $\boxed{3x-y-1=0}$

s: $\boxed{x=1}$ 0.25

t: $\left.\begin{array}{l}m=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}\\P(3,0)\end{array}\right\}\ y-0=\sqrt{3}(x-3);\ \boxed{\sqrt{3}x-y-3\sqrt{3}=0}$ 0.625

TOTAL: 1,5

---

④ $r: 4x+ay-2=0$

a) $P(1,2)\in r \Rightarrow 4+2a-2=0;\ 2a=-2;\ \boxed{a=-1}$ 0.25 $\Rightarrow r: \boxed{4x-y-2=0}$ 0,25 $\Rightarrow \vec{u}_r=(1,4) \Rightarrow m=4$

0.25 $\boxed{\left.\begin{array}{l}x=1+\lambda\\y=2+4\lambda\end{array}\right\}}$ PARAMÉTRICAS $\Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}}$ CONTINUA 0.25 $\quad \boxed{y-2=4(x-1)}$ 0.25 PTO-PDTE. $\quad \boxed{y=4x-2}$ 0.25 EXPLÍCITA

(TOTAL APDO: 1,5)

b) $\left.\begin{array}{l}r: 4x+ay-2=0\\ \text{bisectriz 1}^{er}\text{cuad: } y=x \rightarrow x-y=0\end{array}\right\}\ /\!/ \Rightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'} \Rightarrow \frac{4}{1}=\frac{a}{-1} \Rightarrow \boxed{a=-4}$ 0.5 $\rightarrow r: 4x-4y-2=0 \Leftrightarrow 2x-2y-1=0$

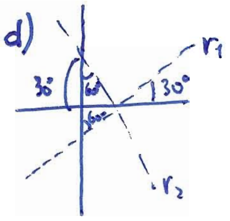
Tomamos un pto. cualquiera $\in$ bisectriz, p.ej. (0,0), y calculamos su distancia a r:

$d(r,\text{bisectriz})=d(O,r)=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{4+4}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\ u}$ 0.5

TOTAL: 3,75

c) $\left.\begin{array}{l}m_s=\frac{3}{2} \Rightarrow \vec{u}_s=(2,3)\\ \vec{u}_r=(-a,4)\end{array}\right\}\ r\perp s \Leftrightarrow \vec{u}_r\cdot\vec{u}_s=0 \Rightarrow -2a+12=0;\ \boxed{a=6}$ 0.5

d)



que forme 60º con el eje y significa que forma 30º con el eje X; por lo tanto, puede haber dos soluc (ver dibujo; no es exacto, sino aproximado!)

$\left.\begin{array}{l}m=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \vec{u}_r=(-a,4)\rightarrow m=-\frac{4}{a}\end{array}\right\}\ \frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{4}{a};\quad \boxed{a=\frac{-12}{\sqrt{3}}=\frac{-12\sqrt{3}}{3}=-4\sqrt{3}}$ 0,75

$m=\operatorname{tg}150^\circ=\operatorname{tg}(180-30^\circ)=-\operatorname{tg}30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{4}{a} \Downarrow \boxed{a=4\sqrt{3}}$

ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS: 0,05
LIMPIEZA Y CALIGRAFÍA: 0,05
ORDEN ....: 0,05
LENGUAJE MATEMÁTICO: 0,10

e) $\vec{u_r}=(4,3) \Rightarrow \left.\begin{matrix}\vec{n}=(-3,4)\\ P(0,0)\end{matrix}\right\}$ $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{4}$; $4x=-3y$; $\boxed{4x+3y=0}$ ← 0,5

F) $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}|}{\|\vec{u_r}\|\cdot\|\vec{u_s}\|} \Rightarrow \cos 45^\circ=\dfrac{|(4,3)\cdot(1,K)|}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{1+K^2}}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4+3K}{5\cdot\sqrt{1+K^2}}$ ← 0,25 ; $5\sqrt{2}\cdot\sqrt{K^2+1}=2(4+3K)$

$25\cdot 2\cdot(K^2+1)=4(4+3K)^2$; $25(K^2+1)=2(16+24K+9K^2)$; $25K^2+25=32+48K+18K^2$

$7K^2-48K-7=0$; ← 0,25 $K=\dfrac{48\pm\sqrt{2304+196}}{14}=\dfrac{48\pm 50}{14}$ $\begin{cases}\boxed{K_1=\dfrac{98}{14}=7}\\ \boxed{K_2=\dfrac{-2}{14}=-\dfrac{1}{7}}\end{cases}$ ← 0,5

TOTAL: 3,75

---

⑤ a) $\vec{u}=(4,3) \rightarrow |\vec{u}|=\sqrt{16+9}=5 \Rightarrow$ soluc.: $\boxed{\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)}$ y su opuesto: $\boxed{\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)}$ ← 0,4 son unitarios y con la misma dirección que $\vec{u}$

b) $\vec{u}=(4,3) \rightarrow \vec{n}=\boxed{(-3,4)}$ y su opuesto: $\boxed{(3,-4)}$ ← 0,4 son ⊥ a $\vec{u}$ y con su mismo módulo

c. Basta con dividir los dos vectores anteriores por su módulo: $\boxed{\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) \text{ y } \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}$ ← 0,4 son ⊥ a $\vec{u}$ y unitarios

d) $\left.\begin{matrix}\vec{u}=(2,3)\\ \vec{v}=(-3,1)\\ \vec{w}=(5,2)\end{matrix}\right\}$ $\vec{u}(\vec{v}\cdot\vec{w})-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}=(2,3)(-15+2)-(-6+3)(5,2)=(2,3)(-13)-(-3)(5,2)=(-26,-39)+(15,6)=\boxed{(-11,-33)}$ ← 0,4

e) $\left.\begin{matrix}2x+3y+4=0 \rightarrow \vec{u_r}=(-3,2)\\ m=3/2 \rightarrow \vec{u_s}=(2,3)\end{matrix}\right\}$ $\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}=-6+6=0 \Rightarrow \boxed{\text{sí son } \perp}$ ← 0,4

TOTAL: 2

ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS ... 0,05
CALIGRAFÍA 0,05
ORDEN 0,05
LIMPIEZA 0,05
LENGUAJE MATEMÁTICO .. 0,05

0,25