

4. SEMEJANZA

- 1 Con un cable de 50 metros se quiere conseguir un polígono semejante a otro de 90 metros de perímetro. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 5 metros?

Solución:

La razón de los perímetros de dos polígonos es igual a la razón de semejanza.

$$\frac{P}{P'} = \frac{50}{90} = \frac{a}{5} \Rightarrow a = \frac{5 \cdot 50}{90} = \frac{250}{90} = 2,77 \text{ m}$$

- 2 Las áreas de dos polígonos semejantes están en la razón 1:64. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Solución:

Todo polígono se puede descomponer en triángulos P, Q, R..., para los cuales se cumple:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot a' \cdot h'} = \frac{a \cdot h}{a' \cdot h'} = r^2 \Rightarrow \frac{P}{P'} = r^2; \frac{Q}{Q'} = r^2; \frac{R}{R'} = r^2$$
$$\Rightarrow P = r^2 \cdot P'; Q = r^2 \cdot Q'; R = r^2 \cdot R' \Rightarrow P + Q + R = r^2 \cdot (P' + Q' + R')$$
$$\Rightarrow S = r^2 \cdot S' \Rightarrow \frac{S}{S'} = r^2 \Rightarrow \frac{1}{64} = r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{8}$$

- 3 Se quiere dibujar un polígono de perímetro 60 cm, semejante a otro de perímetro 180 cm. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 15 metros?

Solución:

La razón de los perímetros de dos polígonos es igual a la razón de semejanza.

$$\frac{P}{P'} = \frac{60}{180} = \frac{a}{15} \Rightarrow a = \frac{15 \cdot 60}{180} = \frac{900}{180} = 5 \text{ cm}$$

- 4 Los lados de un cuadrilátero son: a=1 cm, b=6 cm, c=7 cm y d=4 cm. Se sabe que el área de otro semejante es 16 veces mayor que el área del primero. Determina la medida de los lados del cuadrilátero semejante.

Solución:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = 16 \Rightarrow r = \frac{a}{a'} = 4$$

Por tanto:

$$a' = 4 \cdot a = 4 \cdot 1 = 4 \text{ cm}$$

$$b' = 4 \cdot b = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$$

$$c' = 4 \cdot c = 4 \cdot 7 = 28 \text{ cm}$$

$$d' = 4 \cdot d = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$$

- 5 Dado un prisma rectangular de 5 cm de altura y lados de la base 3 y 4 cm, construimos otro semejante a él de razón de semejanza 0,5. Calcula el volumen del segundo por dos métodos: utilizando la fórmula del volumen del prisma y utilizando la razón de semejanza entre volúmenes.

Solución:

1. Las medidas del segundo prisma son:

$$\text{Altura} = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ cm.}$$

$$\text{Lado base} = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ cm.}$$

$$\text{Lado base} = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ cm.}$$

$$\text{Volumen del segundo prisma} = 2,5 \cdot 1,5 \cdot 2 = 7,5 \text{ cm}^3.$$

2. La razón de semejanza entre volúmenes es $0,5^3 = 0,125$, y el volumen del primer prisma es $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \text{ cm}^3$, por lo que el volumen del segundo prisma es $60 \cdot 0,125 = 7,5 \text{ cm}^3$.

- 6 **Dos ciudades situadas a 63 km están representadas en un mapa a una distancia de 4 cm. ¿A qué distancia se encontrarán dos ciudades que distan 233 km?**

Solución:

Primero calculamos la escala del mapa pasando, previamente, los km a cm:

$$\frac{6.300.000}{4} = 1.575.000 \Rightarrow \text{Escala } 1 : 1.575.000$$

Luego si dos puntos distan 233 km, en el mapa se representan a:

$$\frac{23.300.000}{1.575.000} = 14,8 \text{ cm}$$

- 7 **Dado un trapecio isósceles de 4 cm de altura y bases 8 y 6 cm, construimos otro semejante a él de razón de semejanza 1,5. Calcula la superficie del segundo por dos métodos: utilizando la fórmula del área del trapecio y utilizando la razón de semejanza entre áreas.**

Solución:

1. Las medidas del segundo trapecio son:

$$\text{Altura} = 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ cm.}$$

$$\text{Base mayor} = 8 \cdot 1,5 = 12 \text{ cm.}$$

$$\text{Base menor} = 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ cm.}$$

$$\frac{12+9}{2} \cdot 6 = 63 \text{ cm}^2$$

Área del segundo trapecio =

$$\frac{8+6}{2} \cdot 4 = 28 \text{ cm}^2$$

2. La razón de semejanza entre áreas es $1,5^2 = 2,25$, y el área del primer trapecio es 28 cm^2 , por lo que el área del segundo trapecio es $28 \cdot 2,25 = 63 \text{ cm}^2$.

- 8 **En el plano de una vivienda, a escala 1:350, las medidas del jardín son 36 mm y 29 mm. ¿Cuál es la superficie real de la terraza?**

Solución:

Las medidas del jardín son:

$$36 \cdot 350 = 12600 \text{ mm} = 12,6 \text{ m}$$

$$29 \cdot 350 = 10150 \text{ mm} = 10,15 \text{ m}$$

$$S = 12,6 \cdot 10,15 = 127 \text{ m}^2$$

- 1 **La sombra de una torre eléctrica mide 10 m y en el mismo instante, la sombra de un joven mide 1,5 m. Si el joven tiene una altura de 1,8 m, ¿cuál es la altura de la torre?**

Solución:

Los triángulos formados por la torre y su sombra y por el joven y su sombra son semejantes, pues los rayos de sol son paralelos.

$$\frac{1,8}{1,5} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 12 \text{ m}$$

Por tanto, si x es la altura de la torre,

- 2 **Se consideran dos triángulos semejantes. Del primero conocemos un ángulo, 35° , y del segundo sabemos que uno de sus ángulos es 55° . Con estos datos, ¿qué podemos averiguar de los triángulos?**

Solución:

Como los ángulos de dos triángulos semejantes deben ser iguales, ambos triángulos tienen un ángulo de 35° y otro de 55° , por lo

que el tercero debe ser de 90° . Por tanto, los triángulos son rectángulos.

- 3 **La base de un triángulo mide el doble que la de otro triángulo, y su altura también. ¿Podemos afirmar siempre que son triángulos semejantes?**

Solución:

No, puede que no sean semejantes. Por ejemplo, el primero puede ser un triángulo rectángulo de base un cateto de 10 cm y altura el otro cateto de 15 cm, y el segundo triángulo puede ser isósceles de base 20 cm y altura 30 cm.

- 4 **Si dos triángulos rectángulos son semejantes y las hipotenusas miden, respectivamente, 26 y 39 cm, y el menor de los catetos del primer triángulo mide 10 cm, ¿cuánto miden los otros lados en ambos triángulos?**

Solución:

Por el teorema de Pitágoras, si x es el cateto mayor del primer triángulo: $x^2 + 10^2 = 26^2 \Rightarrow x = 24$ cm

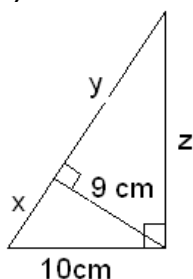
$$\frac{a}{10} = \frac{b}{24} = \frac{39}{26} \Rightarrow a = 15$$

Por otro lado, si a y b son los catetos del segundo triángulo:

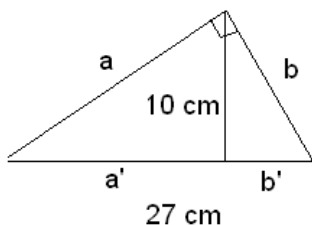
$$y = b = 36$$

- 5 **Encuentra los lados desconocidos:**

a)



b)



Solución:

$$x^2 + 9^2 = 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{19} \approx 4,36$$

a) Por el teorema de Pitágoras:

Los tres triángulos son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Entonces:

$$\frac{4,36}{9} = \frac{10}{z} \Rightarrow z = \frac{90}{4,36} = 20,64 \text{ cm} \quad \frac{y}{9} = \frac{9}{4,36} \Rightarrow y = \frac{36}{4,36} = 8,26 \text{ cm}$$

b) Los tres triángulos son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Entonces:

$$\frac{a'}{10} = \frac{10}{b'} \Rightarrow a' b' = 100$$

, pero como $b' = 27 - a'$, entonces $a' (27 - a') = 100$. Resolviendo, $a' \approx 4,43$ cm, $b' \approx 22,57$ cm

o viceversa.

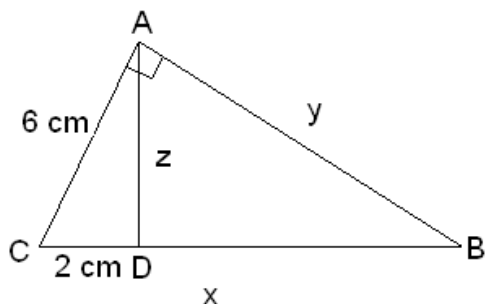
$$\frac{a}{4,43} = \frac{27}{a} \Rightarrow a = 10,94 \text{ cm} \quad \frac{b}{22,57} = \frac{27}{b} \Rightarrow b = 24,69 \text{ cm}$$

Por otro lado,

y

- 6 **Un cateto de un triángulo rectángulo mide 6 cm y su proyección sobre la hipotenusa mide 2 cm. Determinar los otros dos lados y la altura sobre la hipotenusa.**

Solución:



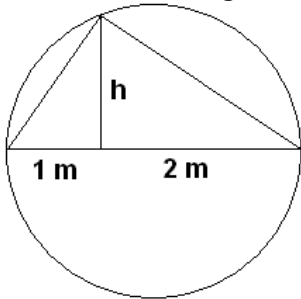
Por el teorema de Pitágoras: $z^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow z = \sqrt{32} \approx 5,66$ cm

Los triángulos ABC y ACD son semejantes, pues comparten un ángulo y ambos tienen además un ángulo recto.

$$\frac{6}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 18 \text{ cm} \quad \frac{2}{5,66} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 2,12 \text{ cm}$$

Entonces: y

7 **Calcula h en la siguiente figura:**



Solución:

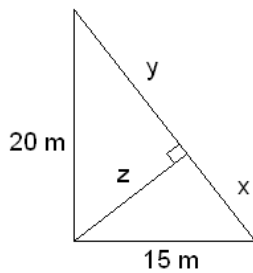
Como la base del triángulo es un diámetro de la circunferencia circunscrita, el triángulo es rectángulo, y por tanto, los dos

$$\frac{1}{h} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ m}$$

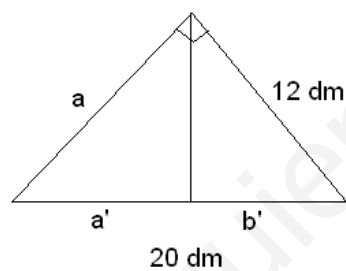
triángulos en los que queda dividido son semejantes entre sí. Por tanto,

8 **Encuentra los lados desconocidos:**

a)



b)



Solución:

$$(x + y)^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow x + y = 25 \text{ m}$$

a) Por el teorema de Pitágoras:

Los tres triángulos son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Entonces:

$$\frac{20}{z} = \frac{25}{15} \Rightarrow z = 12 \text{ m} \quad \frac{20}{12} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 9 \text{ m}$$

y por último $y = 25 - 9 = 16$ m.

b) Los tres triángulos son semejantes, pues tienen los mismos ángulos. Entonces:

$$\frac{20}{12} = \frac{12}{b'} \Rightarrow b' = 7,2 \text{ dm} \quad \frac{12,8}{a} = \frac{a}{20} \Rightarrow a = 16 \text{ dm}$$

y por tanto, $a' = 20 - 7,2 = 12,8$ dm. Además