

EXAMEN TEMA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Conocidas las rectas $r: y = 3x - 5$, $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2}$, $t: \begin{cases} x = 7 - t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$ y los puntos $P(-4, 3)$ y $Q(2, 5)$.

1.- Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto medio del segmento \overline{PQ} y tiene la misma pendiente que la recta s .

2.- Calcula el punto simétrico de P respecto de Q .

3.- Calcula el ángulo entre las rectas r y s .

4.- Estudia la posición relativa de las rectas r y t .

5.- Da la ecuación de la recta que pasa por Q y por el punto de intersección de r y s .

6.- Di cuál debe ser el valor del parámetro " m " para que la recta $q : mx - 5y - 2 = 0$ sea perpendicular a la recta s .

7.- Calcula la distancia entre las rectas r y t .

8.- Estudia si el punto $R(5,0)$ está alineado con P y Q .

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIÓN

Conocidas las rectas $r: y = 3x - 5$, $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2}$, $t: \begin{cases} x = 7 - t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$ y los puntos $P(-4, 3)$ y $Q(2, 5)$.

1.- Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto medio del segmento \overline{PQ} y tiene la misma pendiente que la recta s .

Calculamos el punto medio de \overline{PQ} : $M_{\overline{PQ}}\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \Rightarrow M_{\overline{PQ}}(-1, 4)$

y como nuestra recta tiene la misma pendiente que s , tiene su misma dirección y por tanto nos vale un vector director de s para ella.

Como se trata de la ecuación continua el vector está en el denominador: $\vec{v}_s(4, -2)$

Y con el punto y el vector damos la ecuaciones de la recta:

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (-1, 4) + t \cdot (4, -2); t \in \mathbb{R}$ Operamos: $(x, y) = (-1 + 4t, 4 - 2t)$

Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ Despejamos la t : $t = \frac{x+1}{4}$ $t = \frac{y-4}{-2}$

Ecuación Continua: $\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-2}$ Operamos: $-2x - 2 = 4y - 16$

Ecuación Implícita o General: $2x + 4y - 14 = 0$ Despejamos: $4y = -2x + 14 \Rightarrow y = \frac{-2x+14}{4}$

Ecuación Explícita: $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

2.- Calcula el punto simétrico de P respecto de Q .

Si llamamos $S(x, y)$ al punto simétrico de P respecto de Q , tendremos que Q es el punto medio del segmento \overline{PS} .

Calculamos el punto medio: $M_{\overline{PS}}\left(\frac{-4+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right)$ que debe coincidir con $Q(2, 5)$ por tanto:

$$\frac{-4+x}{2} = 2 \Rightarrow -4 + x = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 = 8 \quad \text{y} \quad \frac{3+y}{2} = 5 \Rightarrow 3 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 3 = 7$$

Así, el simétrico a P respecto de Q es: $S(8, 7)$

3.- Calcula el ángulo entre las rectas r y s .

Utilizamos el vector director de s obtenido en el ejercicio 1: $\vec{v}_s(4, -2)$

y extraemos uno de la recta $r: y = 3x - 5$ $m = 3 \Rightarrow \vec{v}_r(1, 3)$

y realizamos los cálculos necesarios para utilizar la fórmula que nos permite calcular en ángulo entre dos vectores:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (1, 3) \cdot (4, -2) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{v}_s| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

Así:

$$\cos(\widehat{\vec{v}_r, \vec{v}_s}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{-2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-2}{\sqrt{200}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{10} = -0,14 \Rightarrow (\widehat{\vec{v}_r, \vec{v}_s}) = \arccos(-0,14) \simeq 98^\circ$$
$$180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$$

Por tanto el ángulo que forman las rectas r y s es de 82° .

4.- Estudia la posición relativa de las rectas r y t .

Utilizamos el vector director de r obtenido en el ejercicio 3: $\vec{v}_r(1, 3)$

$$\text{y extraemos uno de la recta } t: \begin{cases} x = 7 - t \\ y = 5 - 3t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_t(-1, -3)$$

Comprobamos si sus coordenadas son proporcionales para ver si tienen la misma dirección:

$\frac{1}{-1} = \frac{3}{-3}$ por tanto los vectores directores tienen la misma dirección, con lo que las rectas pueden ser paralelas o coincidentes.

Sacamos un punto de t : $P_t(7, 5)$ y lo sustituimos en r : $5 = 3 \cdot 7 - 5 \Rightarrow 5 \neq 16 \Rightarrow P_t \notin r$

Si fueran coincidentes cualquier punto de t estaría en r , como sabemos que P_t está en t pero no en r , tenemos que r y t son rectas paralelas.

5.- Da la ecuación de la recta que pasa por Q y por el punto de intersección de r y s .

Sabemos que r y s son rectas que se cortan dado que anteriormente hemos calculado que forman un ángulo de 45° .

Así pues podemos ahora calcular el punto de corte, resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 4y - 20 = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow 14x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{7} \Rightarrow y = \frac{30}{7} - 5 = -\frac{5}{7}$$

Así pues el punto de intersección de r y s es: $I(\frac{10}{7}, -\frac{5}{7})$

La recta que nos piden pasa por $Q(2, 5)$ e $I(\frac{10}{7}, -\frac{5}{7})$ tiene por vector director:

$\vec{QI}(\frac{10}{7} - 2, -\frac{5}{7} - 5)$, o sea: $\vec{QI}(\frac{-4}{7}, \frac{-40}{7})$, o también $\vec{v}(1, 10)$ con lo que una de sus ecuaciones puede ser:

$$\text{Ecuación Vectorial: } (x, y) = (2, 5) + t \cdot (1, 10) \in \mathbb{R} \quad \text{Ecuación Paramétrica: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 10t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ecuación Continua: } \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{10}$$

$$\text{Ecuación Implícita o General: } 10x - y - 15 = 0$$

$$\text{Ecuación Explícita: } y = 10x - 15$$

6.- Di cuál debe ser el valor del parámetro "m" para que la recta $q: mx - 5y - 2 = 0$ sea perpendicular a la recta s .

Utilizamos el vector director de s obtenido en el ejercicio 1: $\vec{v}_s(4, -2)$

y extraemos el vector director de la recta q : $\vec{v}_q(5, m)$.

Las recta q será perpendicular a la recta s si el producto escalar de sus vectores directores es nulo, esto es:

$$\vec{v}_s \cdot \vec{v}_q = 0 \Rightarrow (4, -2) \cdot (5, m) = 0 \Rightarrow 20 - 2m = 0 \Rightarrow 20 = 2m \Rightarrow m = \frac{20}{2} = 10$$

Con lo que tenemos que el valor de m que hace que q sea perpendicular a s es 10, y por tanto la ecuación de la recta q queda:

$$q: 10x - 5y - 2 = 0$$

7.- Calcula la distancia entre las rectas r y t.

Como ya vimos en el ejercicio 4, las rectas r y t son paralelas, por tanto sólo tenemos que utilizar un punto de la recta t, nos vale el $P_t(7,5)$ que calculamos en ese mismo ejercicio, y calcular su distancia a la recta

$$r: y = 3x - 5.$$

Primero la pasamos a la forma implícita: $r: 3x - y - 5 = 0$ y aplicamos la fórmula de la distancia punto-recta.

$$d(P_t, r) = \frac{|3 \cdot 7 - 5 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|21 - 5 - 5|}{\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}} = 3'48 \text{ u}$$

8.- Estudia si el punto $R(5,0)$ está alineado con P y Q.

Recordamos que los puntos P y Q son: $P(-4, 3)$ y $Q(2, 5)$.

Si P, Q y R están alineados los vectores \vec{PQ} y \vec{PR} son proporcionales:

$$\text{Calculamos el vector } \vec{PQ}(2 - (-4), 5 - 3) \Rightarrow \vec{PQ}(6, 2)$$

$$\text{Calculamos el vector } \vec{PR}(5 - (-4), 0 - 3) \Rightarrow \vec{PR}(9, -3)$$

$\frac{6}{9} \neq \frac{2}{-3}$ por tanto los vectores no son proporcionales luego los puntos no están alineados.