Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2011

Problema 1 Sea $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ la ecuación de una elipse horizontal. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=3\Longrightarrow a=\sqrt{3},\quad b^2=2\Longrightarrow b=\sqrt{2}$$

$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow c=1\quad e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Eje Mayor= $2a=2\sqrt{3}$
Eje Menor= $2b=2\sqrt{2}$
Distancia Focal= $2c=2$
Excentricidad= $e=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
Vértices: $A(\sqrt{3},0)$, $A'(-\sqrt{3},0)$, $B'(0,\sqrt{2})$, $B(0,\sqrt{2})$
Focos: $F(1,0)$, $F'(-1,0)$
Ecuación general: $2x^2+3y^2=6$

Problema 2 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 4 cm y tiene una excentricidad $e=\dfrac{1}{4}$. Calcular los datos que la definen, su ecuación general y las tangentes a esta cónica en los puntos de abcisa $x=1$.

Solución:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{4}\Longrightarrow a=4c$$

$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow 16c^2=4+c^2\Longrightarrow c=\sqrt{\frac{4}{15}}=\frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$a=4c=\frac{8}{\sqrt{15}}$$

Eje Mayor= $2a=\frac{16}{\sqrt{15}}$
Eje Menor= $2b=4$
Distancia Focal= $2c=\frac{4}{\sqrt{15}}$
Excentricidad= $e=\dfrac{1}{4}$
Vértices: $A\left(\dfrac{16}{\sqrt{15}},0\right)$, $A'\left(-\dfrac{16}{\sqrt{15}},0\right)$, $B'(0,2)$, $B(0,-2)$
Focos: $F\left(\dfrac{2}{\sqrt{15}},0\right)$, $F'\left(-\dfrac{2}{\sqrt{15}},0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{64/15}+\frac{y^2}{4}=1\Longrightarrow\frac{15x^2}{64}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ecuación general: $15x^2 + 16y^2 = 64$

Si $x = 1 \Longrightarrow y = \pm\frac{7}{4}$

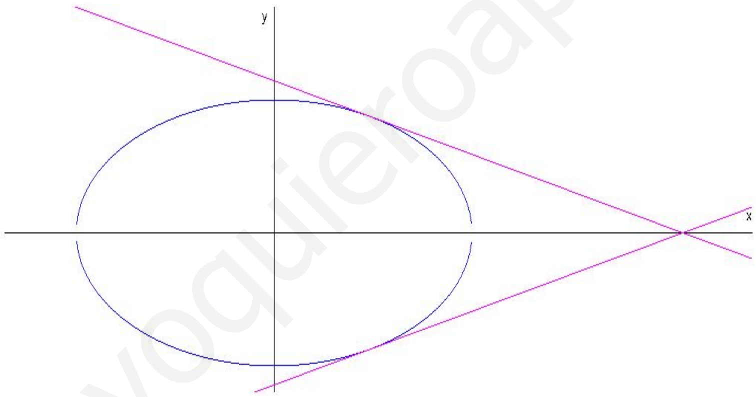
$$30xdx + 32ydy = 0 \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{30x}{32y}$$

En el punto $P_1\left(1, \frac{7}{4}\right) \Longrightarrow m = -\frac{15}{28}$

$$\text{Tangente}: y - \frac{7}{4} = -\frac{15}{28}(x-1)$$

En el punto $P_2\left(1, -\frac{7}{4}\right) \Longrightarrow m = \frac{15}{28}$

$$\text{Tangente}: y + \frac{7}{4} = \frac{15}{28}(x-1)$$



Problema 3 Nuestro amigo Pablo ha pasado una temporada con los aborígenes australianos. Dice que es un auténtico experto en el lanzamiento del bumerang. Quiere hacer una demostración lanzándolo alrededor de Gloria, su compañera de clase. Gloria se había situado alejada de él en el punto $A(2,1)$ (hace falta tener mucho valor, yo no me pondría). El boomerang lanzado sigue una trayectoria curva, de forma que la distancia desde Gloria al boomerang es siempre igual a la distancia del boomerang a la recta $r: x - y = 0$. Se pide:

1. Identifica de que curva se trata.

2. Calcular la ecuación de esta curva.

3. ¿Se encuentra Gloria en peligro de ser golpeada por este artefacto sabiendo que las aspas del boomerang miden 50 cm? La escala del plano en las que hemos tomado las medidas esta determinada por cuadrados de 50×50 cm.

Solución:

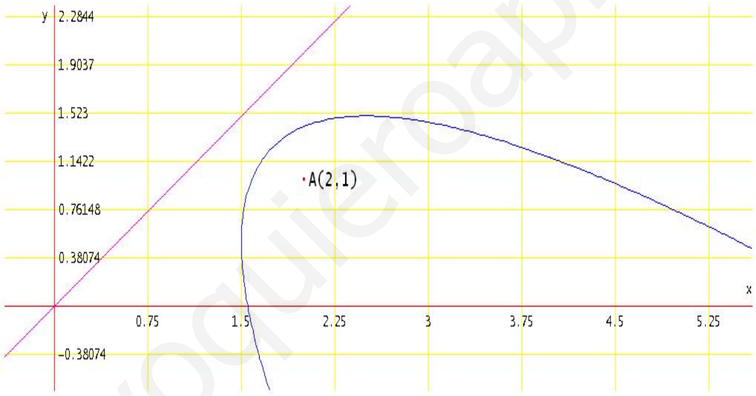
1. Se trata de una parábola por definición.

2. Sea $P(x, y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(P, r)$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \Longrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(x-y)^2}{2}$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 4y + 10 = 0$$



3. Gloria se encuentra en peligro ya que la parábola tiene que pasar entre ella y la recta directriz::

$$d(A, r) = \frac{|2-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071067811$$

En centímetros sería: $0,7071067811 \times 50 = 35{,}35533905$ cm, por lo que las aspas la golpearían.