Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Febrero 2011

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-2)$, $B(3,0)$ y $C(1,4)$. Obtener su centro y su radio.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$r : \begin{cases} -2n + p = -4 \\ 3m + p = -9 \\ m + 4n + p = -17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = -1/4 \\ n = -17/8 \\ p = -33/4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - \frac{6}{7}x - \frac{17}{7}y - \frac{45}{7} = 0 \Longrightarrow 7x^2 + 7y^2 - 6x - 17y - 45 = 0$$

$$\begin{cases} m = -2a = -1/4 \Longrightarrow a = -1/8 \\ n = -2b = -17/8 \Longrightarrow b = -17/16 \\ p = -33/4 = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \dfrac{\sqrt{2405}}{16} = 3,065 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{17}{16}\right), \quad r = \frac{\sqrt{2405}}{16} = 3,065$$

Problema 2 Sea la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1}$ y sea el punto $P(3,3)$. Encontrar los puntos de la recta r que se encuentran a una distancia igual a 5 del punto P.

Solución:

Construimos una circunferencia de centro P y radio $\sqrt{7}$ y luego calculamos los puntos de corte de esta circunferencia con la recta r.

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25, \quad r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1) \\ P_r(1,3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$$

$$(-2 + 2\lambda)^2 + \lambda^2 = 25 \Longrightarrow 5\lambda^2 - 8\lambda - 21 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1,4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P'(7,6) \\ P''(-1,8;1,6) \end{cases}$$

Problema 3 Calcular la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 6 = 0$ en el punto P(3,1).

Solución:

La circunferencia tiene de centro $C(2,2)$ y radio $r=\sqrt{2}$. El vector $\overrightarrow{CP}=(1,-1)$ es perpendicular a la recta tangente, luego:

$$x-y+\lambda=0 \Longrightarrow 3-1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-2$$

La recta tangente es: $x-y-2=0$

Problema 4 Dadas las rectas $r: x+y-2=0$ y $s:\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \end{array}\right.$, se pide calcular:

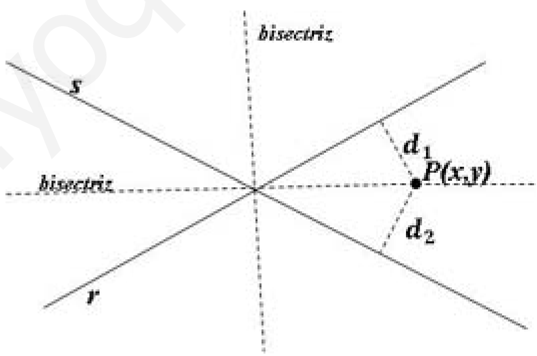
1. Su punto de corte.
2. Ángulo que forman.
3. Sus bisectrices.

Solución:

1. $(1+2\lambda)+(\lambda)-2=0 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{1}{3} \Longrightarrow \left(\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

2.

$$\left\{\begin{array}{l} r: x+y-2=0 \Longrightarrow (1,1) \\ s: x-2y-1=0 \Longrightarrow (1,-2) \end{array}\right. \Longrightarrow \cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \Longrightarrow \alpha=108^{o}26'6''$$



3.

$$d(P,r)=d(P,s) \Longrightarrow \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x-2y-1|}{\sqrt{5}}$$

- $x+y-2=0,63(x-2y-1) \Longrightarrow 37x+226y-137=0$
- $x+y-2=-0,63(x-2y-1) \Longrightarrow 163x-26y-263=0$