6.- CÓNICAS

1.- CIRCUNFERENCIA

1. Considera las circunferencias C: $x^2+y^2+8x+12 = 0$, C': $x^2+y^2-4x = 0$, C'': $x^2+y^2+4x -4y-8 = 0$ halla:
   a) La potencia del centro de la segunda respecto de la tercera.
   b) El eje radical que determinan la segunda y la tercera.
   c) El centro radical de las tres
   Solución: a) Pot = 4, b) $2x-y-2 = 0$, c) C = (-1, -4).

2. Escribe las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto P = (0, 5) a la circunferencia $x^2+y^2 = 4$
   Solución: $y = -\frac{\sqrt{21}}{2}x + 5$, $y = \frac{\sqrt{21}}{2}x + 5$

3. Para que valor de a la recta $y = x + a$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2 = 9$?
   Solución: $a = \pm 3\sqrt{2}$

4. Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica a $x^2+y^2 +8x+16 = 0$ y cuyo radio es 3.
   Solución: $x^2+y^2 +8x+5 = 0$

5. Halla la ecuación de la circunferencia de centro C = (5, -2) y pase por el punto P = (-1, 5).
   Solución: $x^2+y^2-10x+4y-56 = 0$

6. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene uno de sus diámetros el segmento limitado por los puntos P = (5, -1) y Q = (3, -7).
   Solución: $x^2+y^2-8x+6y-75 = 0$

7. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P = (5, 3), Q = (6, 2), R = (3,– 1)
   Solución: $x^2+y^2-8x-2y+12 = 0$

8. Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (-4, 2) y que sea tangente a la recta $3x+4y-16 = 0$.
   Solución: $(x+4)^2+(y-2)^2 = 16$

9. Calcula la potencia del punto P = (-8, 1) respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 -2x -4y+3 = 0$
   Solución: $Pot_C(P) = 80$

10. Determina la posición relativa del punto A = (7, 3) respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 – 6x – 6y + 9 = 0$
    Solución: $Pot_C(P) = 7 > 0$, *es exterior.*

11. Calcula el eje radical de las circunferencias $x^2 + y^2 -4x + 4y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x- 4y + 7 = 0$
    Solución: $x - y = 0$.

12. Sea C la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. El centro y el radio son:
    a) C = (1 , -2), r = 3, b) C = (-1 , 2), r = 3, c) C = (1 , -2), r = 4.
    Solución: a)

13. Idea un método que, sin resolver el sistema, le permita averiguar si la recta $3x+4y-8 = 0$ es exterior, tangente o secante a la circunferencia $C \equiv (x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$. Razona la respuesta.

14. Sea la recta r: x = 3.

a) Halla el punto simétrico de A = (1 , 4) respecto de r, A'.

b) Halla la circunferencia cuyo centro es A' y es tangente a la recta r.

Solución: $(x-5)^2+(y-4)^2 = 4$

15. Halla las ecuaciones de las circunferencias que cumplan:

a) Su centro es (1, 0) y su radio 2.

b) Su centro es (1, 0) y pasa por (2, 2).

c) Su diámetro es el segmento que une los puntos P = (1, 0) y Q = (2, 2).

d) Pasa por los puntos A = (0, 1), B = (1, 2) y C = (2, 1)

e) Su centro es el punto (1, 3) y es tangente al eje de ordenadas.

f) Su centro es el punto (3, 1) y es tangente al eje de abscisas.

Solución: a) $(x-1)^2+y^2 = 4$, *b)* $(x-1)^2+y^2 = 5$, *c)* $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2 = 5$

d) $x^2+y^2-7x+3y-4 = 0$, *e)* $(x-1)^2+(y-3)^2 = 1$, *f)* $(x-3)^2+(y-1)^2 = 1$

2.- ELIPSE

16. Encuentra la ecuación de la elipse de focos F = (1, 1) y F' = (1,-1) si a = 2.

Solución: $4x^2+3y^2-8x-8 = 0$

17. Halla la tangente y la normal a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$ en el punto P = $\left(3, \frac{16}{5}\right)$.

Solución: $t \equiv y-\frac{16}{5} = -\frac{3}{5}(x-3)$, $n \equiv y-\frac{16}{5} = \frac{5}{3}(x-3)$

18. Determina la ecuación reducida de la elipse cuyo eje mayor mide 18 y pasa por P = (6, 4).

Solución: $\frac{x^2}{81}+\frac{5y^2}{144} = 1$

19. Halla las ecuaciones de las tangentes trazada desde P = (4, 0) a la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$.

Solución: $y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-4)$, $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-4)$

20. Halla la ecuación reducida de la elipse tal que pasa por P = (3, 4) y excentricidad e = $\frac{3}{5}$

Solución: $\frac{x^2}{34}+\frac{25y^2}{544} = 1$

21. Halla los elementos de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$

Solución: F = (3,0) y F' = (-3,0); A = (5,0), A' = (-5,0), B = (0,4) y B' = (0, -4).

a = 5, b = 3; c = 3; e = $\frac{3}{5}$ *= 0,6.*

22. Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son F = (4, 0) y F' = (-4, 0), sabiendo que su eje mayor es 10.

Solución: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$.

23. Halla la tangente y la normal a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$ en el punto P = $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solución: $t \equiv y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{25}{8}(x-1)$, $n \equiv y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{25}(x-1)$

24. Halla los focos, semiejes y excentricidad de la elipse $2x^2 + 3y^2 = 108$

    Solución: $F = (\sqrt{13}, 0)$ y $F' = (-\sqrt{13}, 0)$, $a = 7$; $b = 6$; $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$

25. Determina la ecuación de la elipse cuya suma de distancias a los focos F = (4, 0) y F' = (-4, 0) vale 10.

    Solución: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

3.- HIPÉRBOLA

26. Si $ax^2 - 9y^2 = 4$ es la ecuación de una hipérbola equilátera halla el valor de a.
    Solución: a = 9

27. Halla la ecuación respecto de sus asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

    Solución: xy = 2

28. Halla la tangente a hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto de abcisa 6 y ordenada positiva.

    Solución: $\left(y - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9}{4\sqrt{5}}(x-6)$

29. Determina la ecuación reducida de la hipérbola en la que uno de los focos es F = (13, 0) y uno de sus vértices es V = (12, 0).

    Solución: $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

30. Halla los elementos de la hipérbola $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

    Solución: F = (13, 0) y F' = (-13, 0); A = (12, 0) y A' = (-12, 0); a = 12, b = 5; c = 13.
    $e = \frac{13}{12}$; *asíntotas:* $y = \frac{13}{12}x$, $y = -\frac{13}{12}x$.

31. Halla la ecuación de la hipérbola con foco F = (5, 0) y uno de cuyos vértices es V = (4, 0).

    Solución: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

32. Halla la tangente y la normal a la elipse $\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$ en el punto P(5, 2)

    Solución: $t \equiv y-2 = \frac{1}{2}(x-5)$; $n \equiv y-2 = -2(x-5)$.

33. Halla la ecuación respecto de sus asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$

    Solución: x'y' = 8.

34. Halla los focos, semiejes, vértices, asíntotas y excentricidad de la elipse $9x^2 - 16y^2 = 144$.
    Solución: F = (5, 0) y F' = (-5, 0); A = (4, 0) y A' = (-4, 0), a = 4, b = 3; c = 5.

$e = \frac{5}{4}$; asíntotas: $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$.

35. Halla la tangente y la normal a la hipérbola $x^2 - 9y^2 = 16$ en los puntos de ordenada $y = 1$.
    Solución: $t \equiv y-1 = \frac{1}{9}(x - 5)$; $n \equiv y-1 = 9(x - 5)$. $t \equiv y-1 = -\frac{1}{9}(x + 5)$; $n \equiv y-1 = -9(x + 5)$.

4.- PARÁBOLA

36. Halla la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto F = (0, 2) y cuya directriz es la recta de ecuación $y = -2$.
    Solución: $x^2 = 8y$.

37. Una parábola tiene su eje paralelo al de ordenadas y pasa por los puntos A = (2, 0), B = (6, 0) y C = (0, 6). Calcula la ecuación de la parábola.
    Solución: $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 6$

38. Halla la ecuación de la parábola que tiene por foco F = (0, 2) y su directriz es $x-y-2 = 0$.
    Solución: $x^2+y^2+2xy+4x-4y+4 = 0$

39. Encuentra el vértice, el foco, el eje y la directriz de la parábola de ecuación $y^2 = -14x$.
    Solución: V = (0, 0), eje: $y = 0$, $F = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{7}{2}$

40. Calcula los elementos de la parábola $y^2 = 8x$.
    Solución: $F = (2, 0)$ *y la directriz es* $x = -2$, $p = 2$, *eje:* $x = 0$, *vértice:* $O = (0,0)$.

41. Determina la ecuación de la parábola cuyos puntos equidistan del punto (0, 4) y del eje de ordenadas.
    Solución: $x^2 = 8y - 16$

42. Encuentra el foco y la directriz de la parábola de ecuación $y^2 = x$.
    Solución: Solución: $F = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ *y la directriz es* $x = -\frac{1}{4}$

43. Encuentra la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x + y = -1$ y por foco el punto F = (1, 1).
    Solución: $x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 6y + 3 = 0$

44. Deduce razonadamente la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $y = -1$ y por vértice el punto V = (0, 1).
    Solución: $x^2 = 4y$

45. Encuentra la tangente y la normal a la parábola $y^2 = 4x$ en el punto P = (1, 2).
    Solución: $t: x-y+1 = 0$, $n: x+y-3 = 0$.

46. Halla las ecuaciones de la tangentes trazadas a la parábola $y^2 = x$ desde el punto P = (2, 0).
    Solución: $y = -\frac{1}{\sqrt{8}}(x - 2)$, $y = \frac{1}{\sqrt{8}}(x - 2)$