TEMA 3

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD.

1. Se quiere lanzar al espacio un objeto de 500 kg y para ello se utiliza un dispositivo que le imprime la velocidad necesaria. Se desprecia la fricción con el aire.
   a) Explique los energéticos del cambios objeto desde su lanzamiento hasta que alcanza una altura h y calcule su energía mecánica a una altura de 1000 m.
   b) ¿Qué velocidad inicial sería necesaria para que alcanzara dicha altura?
   Datos: $G=6´67.10^{-11}$ $Kg.m^2.Kg^{-2}$ $M_T=6.10^{24}Kg$ $R_T=6´4.10^3Km$

a) En su posición inicial, el satélite dispondría de la energía potencial correspondiente a la de la superficie terrestre. Además, puesto que se le administra cierta velocidad en el despegue, llevará asociado también cierto valor de energía potencial. A medida que asciende a través de la atmósfera, con la que no se producen pérdidas energéticas, su energía potencial va incrementándose, a costa de una disminución progresiva (y en la misma cantidad que el incremento) de energía cinética. Llegado el punto de altura máxima, la energía potencial adquirirá su mayor valor; en este punto, la energía cinética será nula.

Si hacemos la descripción matemática:

$$E_{M1}=E_{K1}+E_{P1}=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{-G.M_T.m}{R_T^2}$$

$$E_{M2}=E_{K2}+E_{P2}=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{-G.M_T.m}{(R_T+h)^2}$$

Al tratarse de un sistema conservativo :

$$E_{M1}=E_{M2}\rightarrow\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{-G.M_T.m}{R_T^2}=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{-G.M_T.m}{(R_T+h)^2}\rightarrow\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{-G.M_T.m}{R_T^2}-\frac{-G.M_T.m}{(R_T+h)^2}$$

$$\rightarrow\Delta E_K=-\Delta E_P$$

Para calcular la energía mecánica a 1000 metros de altura, necesitaríamos saber si la órbita que se pretende alcanzar es de 1 Km o si por el contrario, el cohete seguirá ascendiendo.
Vamos a suponer que el enunciado se refiere al primero de los casos. Entonces, la energía cinética alcanzado el kilómetro de altura sería nula. Luego:

$$E_{M2}=E_{K2}+E_{P2}=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{-G.M_T.m}{(R_T+h)^2}=0+\frac{-G.M_T.m}{(R_T+h)^2}=\frac{-6´67.10^{-11}.6.10^{24}.500}{(6´4.10^6+10^3)^2}=-4883´73\,J$$

b) Puesto que este valor de energía mecánica es constante:

$$E_{M1}=E_{M2}\rightarrow\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{-G.M_T.m}{R_T^2}=\frac{-G.M_T.m}{(R_T+h)^2}\rightarrow\frac{1}{2}.m.v_1^2+\frac{-G.M_T.m}{R_T^2}=-4883´73\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1}{2}mv_1^2=-4883´73-\frac{-G.M_T.m}{R_T^2}\rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2}{m}.\left(-4883´73-\frac{-G.M_T.m}{R_T^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{500}.\left(-4883´73-\frac{-6´67.10^{-11}.6.10^{24}.500}{(6´4.10^6)^2}\right)}=7´8.10^{-2}\,m.s^{-1}$$

(Valor que sólo se puede comprender si recordamos que no se producen fricciones con la atmósfera.)

2. Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa M.
   a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es mayor que en el punto A, razone si la partícula se acerca o se aleja de M.
   b) Explique las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escriba su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de A a B siguiendo una trayectoria no rectilínea?

a) El potencial gravitatorio en un punto A se define como el trabajo que debe realizar la fuerza conservativa (en nuestro caso la gravitatoria) para trasladar la unidad de masa desde un punto situado en el infinito (en el que no existe influencia gravitacional, hasta el punto A. Matemáticamente:

$$V_A = \frac{-G.M}{R_A}$$

, siendo M la masa que crea el campo gravitatorio y R_A la distancia entre la masa que crea el campo y el punto A.
Se trata de una magnitud escalar, siempre negativa, cuyo valor máximo se halla en el infinito; Par un punto situado en el infinito, R tendría valor infinito, con lo que el potencial sería nulo.
Por lo tanto, si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es mayor que el correspondiente al punto A, ello indica que B se halla más alejado de la masa M que el punto A. Por lo tanto, la partícula se alejaría de M.
Puesto que la tendencia espontánea de los cuerpos es la de dirigirse hacia lugares en los que el potencial sea menor, se desprende que el desplazamiento indicado deberá ser causada por una fuerza externa.

b) La masa **m**, inicialmente en el punto A poseerá una energía potencial debido a su posición respecto de **M**.
Además, deberá contener cierto nivel de energía cinética, puesto que de no ser así, la partícula no se desplazaría hasta otro punto.
A medida que la partícula avanza hacia B, su energía potencial se hace mayor (recordemos que la partícula **m** se aleja de **M**). Por su parte, la energía cinética del cuerpo va disminuyendo paulatinamente.
Al llegar al punto B, la energía cinética se habrá anulado; en ese punto, a la masa le corresponderá otro nivel de energía potencial debido a su nueva posición.
Si nos centramos en las posiciones inicial (A) y final (B), las energías mecánicas correspondientes serán:

$$\left.\begin{array}{l} E_{MA} = E_{PA} + E_{KA} = \dfrac{-G.M.m}{R_A} + \dfrac{1}{2} m v_A^2 \\ E_{MB} = E_{PB} + E_{KB} = \dfrac{-G.M.m}{R_B} + \dfrac{1}{2} m v_B^2 \end{array}\right\}$$

Puesto que el sistema es conservativo, la energía mecánica del sistema deberá ser constante :

$$\frac{-G.M.m}{R_A} + \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{-G.M.m}{R_B} + \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{-G.M.m}{R_A} - \frac{-G.M.m}{R_B} \rightarrow \Delta E_K = -\Delta E_P$$

En el caso en el que la trayectoria no sea rectilínea, la variación energética será la misma. Recordemos que, por tratarse de un sistema conservativo, el trabajo realizado para llevar una partícula puede establecerse como la diferencia entre dos magnitudes que dependen de las posiciones inicial y final del cuerpo, independientemente del camino recorrido.

3. a) La energía potencial de un cuerpo de masa *m* en el campo gravitatorio producido por otro cuerpo de masa *m'* depende de la distancia entre ambos. ¿Aumenta o disminuye dicha energía potencial al alejar los dos cuerpos? ¿Por qué?
b) ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo de masa *m* al desplazarse desde una posición A hasta otra B? Razone la respuesta.

a) Se conoce como energía potencial gravitatoria a una función escalar característica de campos conservativos, que depende únicamente de la masa de las partículas y de la distancia entre ellas. Para un sistema formado por más de dos partículas, la energía del sistema será la suma de las energías potenciales de cada uno de los pares de partículas.
Para el caso que nos ocupa, un sistema formado por dos partículas de masas puntuales **m** y **m´**, la energía potencial asociada es:

$$E_P = \frac{-G.m.m'}{R}$$, siendo R la distancia que las separa.

Vemos que, cuanto mayor es la distancia que las separa mayor será la energía potencial asociada (menos negativa). En el caso en el que las distancia que las separe sea muy grande (infinito), la energía potencial del sistema será nula. Así pues, se estima el valor de referencia en un punto situado en el infinito, donde, por decirlo de un modo comprensible, ninguna de las cargas "percibe" el campo gravitatorio asociado a la otra masa.
A medida que estas cargas se aproximan, el valor de R va disminuyendo, con lo que el valor absoluto de la energía potencial aumenta; sin embargo, puesto que la ecuación lleva asociada un signo negativo podemos concluir con que, a medida que las masas se acercan, la energía potencial del sistema disminuye.
Si consideramos que la fuerza gravitatoria es siempre atractiva, las masas se aproximarán de manera natural, de manera que la energía potencial del sistema disminuirá. Se trata de una tendencia espontánea del sistema, sin que sea necesaria la actuación de una fuerza externa. Por el contrario, la separación de masas supone un aumento de la energía potencial, proceso forzado (no espontáneo) que sólo podrá realizarse cuando una fuerza externa sea la encargada de separar las cargas.

b) Como ya hemos aludido, la energía potencial es una función (magnitud) que únicamente tiene sentido cuando el campo es conservativo. En estas circunstancias, el trabajo realizado por la fuerza conservativa (la gravitatoria en este caso) no depende de la trayectoria realizada para desplazar una masa (que está en el interior de un campo gravitatorio) desde un punto A hasta un punto B; tan sólo depende (además de las masas de las partículas) de las posiciones de los puntos A y B.
Se puede entonces establecer el trabajo realizado por la fuerza como:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_P$$

Y, como anteriormente se ha indicado (ver apartado a)):

$$E_P = \frac{-G.m.m'}{R}$$

Por lo tanto:

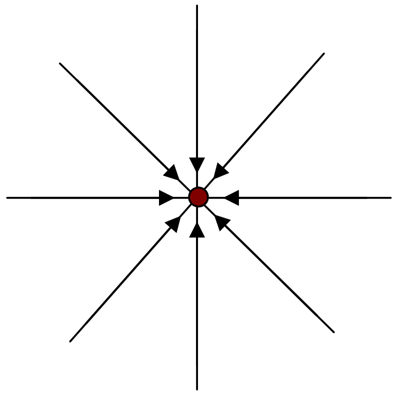
$$\left.\begin{array}{l} E_P(A) = \dfrac{-G.m.m'}{R_A} \\ E_P(B) = \dfrac{-G.m.m'}{R_B} \end{array}\right\} \to \Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = \frac{-G.m.m'}{R_B} - \frac{-G.m.m'}{R_A} = -G.m.m'\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)$$

En consecuencia, se deduce que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para llevar la masa **m´** desde un punto A hasta otro B de un campo gravitatorio creado por otra masa **m** será:

$$W_{A\to B} = G.m.m'\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)$$

4. Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en una misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M.
   a) Si una masa m está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué?
   b) Si una masa m está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? Razone su respuesta.

a)



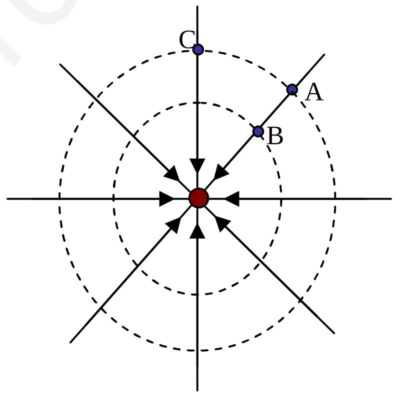
Las líneas de campo son representaciones que indican la trayectoria que seguiría una masa patrón, inicialmente en reposo, situada el los alrededores de la masa central, que crea el campo gravitatorio. Estas líneas tienen como características principales ir dirigidas hacia la masa que genera el campo (la gravitación es una fuerza atractiva). En cada punto, la línea de campo es tangente al vector INTENSIDAD DE CAMPO.
En el caso que nos ocupa, en el que sólo existe una masa puntual, las líneas de campo son radiales, con el sentido indicado anteriormente

b1) La energía potencial de una partícula situada en un campo gravitatorio viene dada por la expresión:

$$E_P = \frac{-G.M.m}{R}$$

El origen de energías es nulo en el infinito, puesto que una masa en él no sentirá la interacción provocada por M. En cualquier otro lugar, la energía potencial será negativa, tanto más cuanto mayor sea la proximidad a M. Teniendo en cuenta que B está más cercano a M que A:

$$E_{PA} > E_{PB} \rightarrow \frac{-G.M.m}{R_A} > \frac{-G.M.m}{R_B}$$



b2) Como hemos señalado,:

$$E_P = \frac{-G.M.m}{R}$$

Puesto que tanto A como C están a la misma distancia de M, los potenciales gravitatorios serán los mismos (al igual que las energías potenciales de las masas que en estos puntos se coloquen).

$$E_{PA} = E_{PC} \rightarrow \frac{-G.M.m}{R_A} = \frac{-G.M.m}{R_C}$$

Los puntos caracterizados por poseer iguales valores de energía potencial constituyen las SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES. El trabajo realizado para trasladar una masa desde un punto a otro de una superficie equipotencial será nulo:

$$W_{A \rightarrow C} = -\Delta E_P = 0$$

5. Un satélite describe una órbita en torno a la Tierra con un período de revolución igual al terrestre.
   a) Explique cuántas órbitas son posibles y calcule su radio.
   b) Determine la relación entre la velocidad de escape en un punto de la superficie terrestre y la velocidad orbital del satélite.

   $G = 6'67.10^{-11}$ N.m^{2}kg^{-2}; $g_T = 10$ ms^{-2}; $R_T = 6400$ km

a) Sólo será posible una órbita, cuyo radio respecto del centro de la Tierra vamos a calcular. Esta característica (tener un período de revolución igual al terrestre) es la que diferencia a los llamados SATÉLITES GEOESTACIONARIOS O GEOSINCRÓNICOS. Además, su órbita siempre debe estar en el plano ecuatorial.

Estas características hacen que el satélite parezca no moverse, desde el punto de vista de un observador situado en el ecuador, y con el satélite en su zénit (permanentemente)

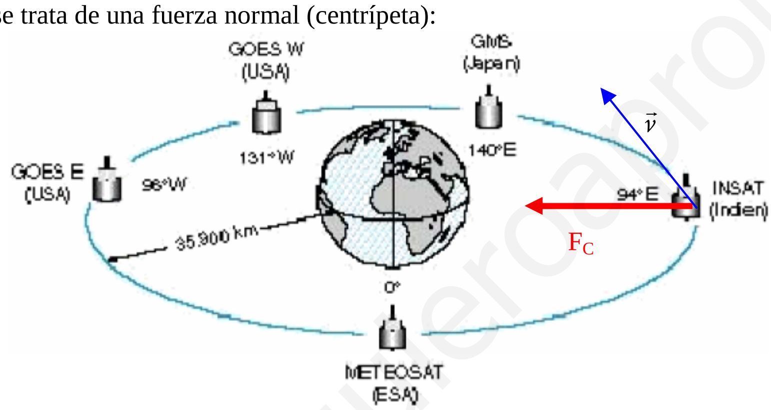
Para determinar el radio de su órbita, partiremos del dato correspondiente al período:

$$\tau_{TIERRA} = 24.3600 = 86400\, sg$$

Además:

$$\omega = \frac{2.\pi}{\tau} = \frac{2.\pi}{86400} = 7'27.10^{-5}\,\text{rds.sg}^{-1}$$

Por otro lado, sabemos que la fuerza que provoca el movimiento de traslación del satélite (movimiento circular) es la fuerza gravitatoria. Como es la fuerza que provoca este movimiento, podemos decir que se trata de una fuerza normal (centrípeta):



$$\left.\begin{cases} F_C = \dfrac{m.v^2}{(R_T + h)} \\ F_G = \dfrac{G.m_T.m}{(R_T + h)^2} \end{cases}\right\} \rightarrow \frac{m.v^2}{(R_T + h)} = \frac{G.m_T.m}{(R_T + h)^2} \rightarrow v^2 = \frac{G.m_T}{(R_T + h)}$$

Pero, puesto que no disponemos del valor de la velocidad tangencial, podemos sustituirla en función de la velocidad angular. Recordemos que:

$$v = \omega.R$$

Así pues,

$$v^2 = \frac{G.m_T}{(R_T + h)} \rightarrow \omega^2.(R_T + h)^2 = \frac{G.m_T}{(R_T + h)} \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{G.m_T}{(R_T + h)^3}}$$

Sin embargo, tampoco disponemos del valor de la masa de la Tierra. Para calcularlos utilizaremos el campo gravitatorio en la superficie terrestre. De este modo:

$$g_0 = \frac{G.m_T}{R_T^2} \rightarrow m_T = \frac{g_0.R_T^2}{G}$$

Sustituyendo ahora este valor de la masa terrestre en la ecuación encuadrada:

$$\omega^2 = \frac{G.m_T}{(R_T + h)^3} \rightarrow \omega^2 = \frac{G.\left(\dfrac{g_0.R_T^2}{G}\right)}{(R_T + h)^3} \rightarrow \omega^2 = \frac{g_0.R_T^2}{(R_T + h)^3} \rightarrow (R_T + h)^3 = \frac{g_0.R_T^2}{\omega^2} \rightarrow$$

Despejando h:

$$(R_T + h) = \left[\frac{g_0.R_T^2}{\omega^2}\right]^{1/3} \rightarrow h = \left(\left[\frac{g_0.R_T^2}{\omega^2}\right]^{1/3} - R_T\right)$$

Al sustituir todos los valores:

$$\boxed{h = 36234´75Km}$$ (Altura por encima de la superficie terrestre)

b) Velocidad de escape es la velocidad que se le debe comunicar a un cuerpo para llevarlo, desde la superficie terrestre, hasta un punto situado en el infinito, en el que su velocidad será nula. Así:

$$E_P^{(SUPERFICIE)} + E_K^{(SUPERFICIE)} = E_P^{(\infty)} + E_K^{(\infty)} \rightarrow E_P^{(SUPERFICIE)} + E_K^{(SUPERFICIE)} = 0$$

$$\frac{-G.m.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}m.v_{ESCAPE}^2 = 0 \rightarrow \frac{-G.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}.v_{ESCAPE}^2 = 0 \rightarrow \boxed{v_{ESCAPE} = \sqrt{\frac{2G.m_T}{R_T}}}$$

En cuanto a la velocidad orbital, según hemos deducido en el apartado a):

$$\boxed{v_{ORBITAL} = \sqrt{\frac{G.m_T}{(R_T + h)}}}$$

La relación entre ambas será:

$$\frac{v_{ESCAPE}}{v_{ORBITAL}} = \frac{\sqrt{\frac{2G.m_T}{R_T}}}{\sqrt{\frac{G.m_T}{(R_T + h)}}} = \sqrt{\frac{2G.m_T.(R_T + h)}{R_T.G.m_T}} = \boxed{\sqrt{\frac{2.(R_T + h)}{R_T}} = \frac{v_{ESCAPE}}{v_{ORBITAL}}}$$

6. a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.
b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

a) Velocidad de escape es la velocidad que se le debe comunicar a un cuerpo para llevarlo, desde la superficie terrestre, hasta un punto situado en el infinito, en el que su velocidad será nula. Así:

$$E_P^{(SUPERFICIE)} + E_K^{(SUPERFICIE)} = E_P^{(\infty)} + E_K^{(\infty)} \rightarrow E_P^{(SUPERFICIE)} + E_K^{(SUPERFICIE)} = 0$$

$$\frac{-G.m.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}m.v_{ESCAPE}^2 = 0 \rightarrow \frac{-G.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}.v_{ESCAPE}^2 = 0 \rightarrow v_{ESCAPE} = \sqrt{\frac{2G.m_T}{R_T}}$$

b) La velocidad de escape es una velocidad teórica que no considera los rozamientos (fricciones) a los que estaría sometido el cuerpo durante su ascenso por la atmósfera terrestre. Ocurriría que, durante el período en el que asciende por la atmósfera, se produce una pérdida de energía por rozamientos.
Puesto que el sistema no sería conservativo en esas condiciones, se cumplirá:

$$E_P^{(SUPERFICIE)} + E_K^{(SUPERFICIE)} < E_P^{(\infty)} + E_K^{(\infty)} \rightarrow E_P^{(SUPERFICIE)} + E_K^{(SUPERFICIE)} < 0$$

El objeto no será capaz de alcanzar el infinito; En estas circunstancias, el objeto seguirá bajo el campo de influencia de la Tierra, por lo que, teóricamente, volvería a ser atraído por ella (Al principio la velocidad sería muy pequeña, para ir creciendo posteriormente.

7. a) Escriba la Ley de Gravitación Universal y explique su significado físico.
b) Según la Ley de Gravitación, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

a) La teoría de la gravitación universal (posteriormente Ley) , propuesta por Newton fue presentada en su obra *"Philosophae Naturalis Principia Mathematica*" (Principios Matemáticos de Filosofía Natural, o simplemente, Principia), publicada en 1687.
El razonamiento se puede sintetizar en estas cuatro proposiciones:

↳ *"Los planetas giran alrededor del sol como consecuencia de la existencia de una fuerza que actúa sobre ellos (fuerza gravitatoria)".*
Ello debe ser así puesto que la inexistencia de esta fuerza supondría un movimiento planetario del tipo MRU.

↳ *"La fuerza gravitatoria actúa sobre todos los cuerpos, independientemente de la situación y naturaleza."*
Se trata de la unificación entre la caída de los cuerpos y el movimiento de los planetas

↳ *"La interacción gravitatoria tiene carácter central"*
La fuerza tiene la dirección de la línea que une los planetas

↳ *El valor de la fuerza gravitatoria, considerando masas puntuales, viene dada por la expresión:*

$$\vec{F} = -G.\frac{M_1.M_2}{r_{12}^2}.\vec{u}_r$$

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{F}} \equiv \text{Fuerza Gravitator ia (Newtons)} \\ \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \equiv \text{Masas de los cuerpos que interaccio nan (Kg)} \\ \mathrm{r}_{12} \equiv \text{Distancia entre los cuerpos o (m)} \\ \vec{\mathrm{u}}_r \equiv \text{Vector unitario en la dirección que une las masas puntuales} \\ \mathrm{G} \equiv \text{constante de gravitació n universal } \left(6´67.10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nw.m}^2}{\mathrm{Kg}^2}\right. \\ (\text{El signo negativo indica el carácter atractivo de la interacció n}) \end{cases}$$

En el caso en el que el sistema en estudio se halle formado por varias masas puntuales, la fuerza neta que actúa sobre cada una de ellas será igual a la suma (vectorial) de las fuerzas ejercidas por cada una de las otras masas:

$$\vec{F}_{RESULTANTE,1} = \sum \vec{F}_{i,1}$$

c) Como acaba de decirse, la fuerza que la Tierra ejercerá sobre un cuerpo de masa **m** será:

$$\vec{F}_{CT} = -G.\frac{M \quad .M_2}{r_{12}^2}.\vec{u}_r$$

Por otro lado, a partir de la segunda ley de la dinámica:

$\vec{F}_{CT} = m.\vec{a}$ (Fuerza ejercida sobre el cuerpo por la Tierra)

Igualando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{CT} = -G.\frac{M_T.m}{r_{12}^2}.\vec{u}_r \\ \vec{F}_{CT} = m.\vec{a} \end{array} \right\} \rightarrow G.\frac{M_T.m}{r_{12}^2} = m.a \text{ (al igualar módulos) } \rightarrow G.\frac{M_T}{r_{12}^2} = a$$

Aceleración que no es otra que la gravedad en la superficie terrestre (g_0) , que a nivel de la superficie terrestre es, aproximadamente $9´81 m.s^{-1}$.
Es decir, la aceleración con la que un objeto es atraído hacia la superficie terrestre es independiente de la masa de este. Dicho de otro modo, los cuerpos que se dejan caer desde cierta altura (en las cercanías de la superficie terrestre), describen un movimiento cinemática (MRUA) independiente de su masa.

Sin embargo, la causa que los produce, es decir, la fuerza de atracción gravitatoria, o dicho de otra manera, el peso del cuerpo, si variará en función de la masa, puesto que como todos sabemos:

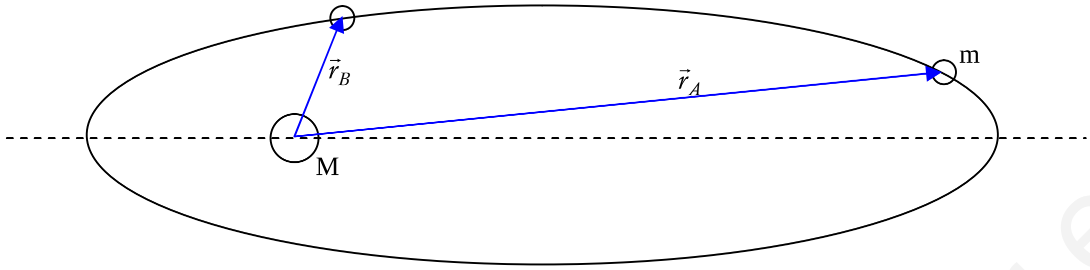
$$P = m.g_0$$

Y, claro está, a diferentes masas, distintos pesos (fuerzas)
Como resumen, podemos decir que el comportamiento cinemática de cuerpos de distinta masa es el mismo (despreciando rozamientos), pero, en cambio, los comportamientos dinámicos sí son diferentes.

8. Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B.

a) Haga un análisis energético del movimiento del cometa y compare los valores de las energías cinética y potencial en A y en B.

b) ¿En cuál de los puntos A o B es mayor el módulo de la velocidad? ¿Y el de la aceleración?



a) En el punto A, más alejado, el cometa dispone de una energía potencia, como corresponde a su posición respecto al Sol. Al hallarse en su posición alejada, su energía potencial será:

$$E_P = \frac{-G.M.m}{r_A}$$

Por otro lado, posee una velocidad orbital, y, por tanto, una energía cinética asociada, de valor:

$$E_K = \frac{1}{2}.m.v_A^2$$

La energía mecánica en este punto será:

$$E_{MEC,\,A} = \frac{-G.M.m}{r_A} + \frac{1}{2}.m.v_A^2$$

Más tarde, cuando se halla en el punto B, poseerá un valor de energía potencial diferente, menor que el correspondiente al punto A (recordemos que E_p en el infinito adopta el valor máximo, cero). Desde luego, el cometa dispondrá también de un cierto nivel de energía cinética.
Por lo tanto:

$$E_{MEC,\,B} = \frac{-G.M.m}{r_B} + \frac{1}{2}.m.v_B^2$$

Considerando nos hallamos ante un sistema conservativo, podemos afirmar que la energía mecánica del sistema se mantendrá constante. Luego:

$$E_{MEC,\,A} = E_{MEC,\,B} \rightarrow \frac{-G.M.m}{r_A} + \frac{1}{2}.m.v_A^2 = \frac{-G.M.m}{r_B} + \frac{1}{2}.m.v_B^2$$

Como ya se ha comentado, la energía potencial en al punto más próximo al Sol será menor. Consecuentemente, la energía cinética deberá ser mayor, puesto que sólo así podrá mantenerse constante el valor de la energía mecánica.

Por otro lado,

$$\frac{-G.M.m}{r_A} + \frac{1}{2}.m.v_A^2 = \frac{-G.m.M}{r_B} + \frac{1}{2}.m.v_B^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{-G.M.m}{r_B} + \frac{-G.M.m}{r_A} = +\frac{1}{2}.m.v_B^2 - \frac{1}{2}.m.v_A^2 \rightarrow -\Delta E_P = \Delta E_K$$

b) Ya hemos demostrado que la velocidad será mayor cuanto más próximo se encuentre el cometa del Sol. La velocidad máxima del cometa se producirá a su paso por el perihelio (punto más cercano); y de igual modo, el valor mínimo de velocidad orbital se producirá en el afelio (punto más alejado)

En cuanto a las aceleraciones, nos fijaremos en el valor de la intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$):

$$\vec{g} = \frac{-G.M_S}{R_{SC}^2}.\vec{u}_R$$, y su valor sería menor cuanto más alejado se encuentre el cometa del Sol

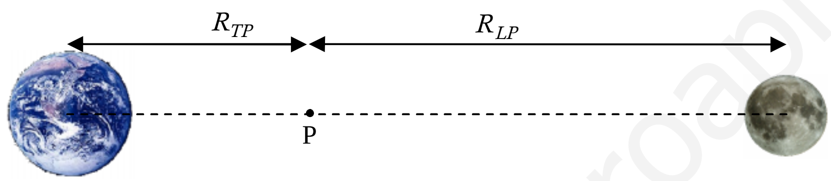
Otro modo de analizar las aceleraciones se realizaría a partir del concepto de aceleración centrípeta o normal:

$$a_C = \frac{v^2}{R} \rightarrow \text{si}\left\{\begin{matrix} v_A < v_B \\ R_A > R_B \end{matrix}\right\} \rightarrow a_C(A) < a_C(B)$$

9. Si con un cañón lo suficientemente potente se lanzara desde la Tierra hacia la Luna un proyectil,
   a) ¿En qué punto de su trayectoria hacia la Luna la aceleración del proyectil sería nula.
   b) ¿Qué velocidad mínima inicial debería poseer parra llegar a ese punto?. ¿Cómo se movería a partir de esa posición?

   $G = 6'67.10^{-11}$ N.m^{2}kg^{-2}; $M_T = 6.10^{24}$ kg; $M_L = 7'0.10^{22}$ kg;
   $d_{T\text{-}L} = 3'8.10^8$ m; $R_T = 6'4.10^6$ m; $R_L = 1'6.10^6$ m

a)



$$\left.\begin{matrix} \vec{g}_T = \dfrac{G.M_T}{R_{TP}^2}.\vec{i} \\ \vec{g}_L = \dfrac{-G.M_L}{R_{LP}^2}.\vec{i} \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{g}_T + \vec{g}_L = 0 \rightarrow \left(\frac{G.M_T}{R_{TP}^2} - \frac{G.M_L}{R_{LP}^2}\right).\vec{i} = \vec{0} \rightarrow \frac{G.M_T}{R_{TP}^2} - \frac{G.M_L}{R_{LP}^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{M_T}{R_{TP}^2} = \frac{M_L}{R_{LP}^2} \rightarrow \frac{M_T}{R_{TP}^2} = \frac{M_L}{(d_{TL} - R_{TP})^2} \rightarrow \frac{M_T}{M_L} = \frac{R_{TP}^2}{(d_{TL} - R_{TP})^2} \rightarrow \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \frac{R_{TP}}{(d_{TL} - R_{TP})} \rightarrow$$

$$\rightarrow (d_{TL} - R_{TP}) = \frac{R_{TP}}{\sqrt{\dfrac{M_T}{M_L}}} \rightarrow (d_{TL} - R_{TP}) = R_{TP}.\sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \rightarrow d_{TL} = R_{TP}.\sqrt{\frac{M_L}{M_T}} + R_{TP} \rightarrow$$

$$\rightarrow d_{TL} = R_{TP}.\left(1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right) \rightarrow R_{TP} = \frac{d_{TL}}{\left(1 + \sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}}\right)}$$

Sustituyendo :

$$R_{TP} = \frac{3'8.10^8}{\left(1 + \sqrt{\dfrac{7'0.10^{22}}{6.10^{24}}}\right)} = 3'429.10^8\,m$$

b1) Si no consideramos la presencia de la Luna, el problema se reduce al cálculo de la velocidad de escape. En la superficie terrestre, la energía del cuerpo será:

$$E_A = \frac{-G.m.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_e^2$$

Si el cuerpo alcanza cierta altura:

$$E_B = \frac{-G.m.m_T}{(R_T + h)}$$

Puesto que se trata de un sistema conservativo:

$$E_A = E_B \rightarrow \frac{-G.m.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_e^2 = \frac{-G.m.m_T}{(R_T + h)} \rightarrow v_e = \sqrt{2.\left(\frac{-G.m_T}{(R_T + h)} - \frac{-G.m_T}{R_T}\right)}$$

Sustituyendo valores:

$$v_e = \sqrt{2.6'67.10^{-11}.6.10^{24}.\left(\frac{-1}{(3'429.10^8)} + \frac{1}{6'4.10^6}\right)} = 11078'3\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

b2) Si consideramos la interacción lunar, el sistema estará ahora constituido por tres partículas, Tierra, Luna y satélite. En este caso:

$$\left\{\begin{aligned} E_A &= \frac{-G.m.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_e^2 + \frac{-G.m.m_L}{d_{TL} - R_T} \\ E_B &= \frac{-G.m.m_T}{R_{TP}} + \frac{-G.m.m_L}{d_{TL} - R_{TP}} \end{aligned}\right\} \rightarrow E_A = E_B \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-G.m.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_e^2 + \frac{-G.m.m_L}{d_{TL} - R_T} = \frac{-G.m.m_T}{R_{TP}} + \frac{-G.m.m_L}{d_{TL} - R_{TP}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-G.m_T}{R_T} + \frac{1}{2}.v_e^2 + \frac{-G.m_T}{d_{TL} - R_T} = \frac{-G.m_T}{R_{TP}} + \frac{-G.m_T}{d_{TL} - R_{TP}} \rightarrow$$

$$v_e = \sqrt{2.\left(\frac{-G.m_T}{R_{TP}} + \frac{-G.m_T}{d_{TL} - R_{TP}} - \frac{-G.m_T}{d_{TL} - R_T} - \frac{-G.m_T}{R_T}\right)}$$

Al sustituir:

$$v_e = \sqrt{2.\left(\frac{-G.m_T}{R_{TP}} + \frac{-G.m_T}{d_{TL} - R_{TP}} - \frac{-G.m_T}{d_{TL} - R_T} - \frac{-G.m_T}{R_T}\right)}$$

Hallemos en primer lugar:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{R_{TP}} = 3'429.10^8\,m \\ d_{TL} - R_{TP} = 3'8.10^8 - 3'429.10^8 = 37'1.10^6\,m \\ d_{TL} - R_T = 3'8.10^8 - 6'4.10^3 = 37'999.10^6\,m \\ R_T = 6'4.10^6\,m \\ \text{Con lo que no tendremos nada más que sustituir valores:} \\ v_e = 11055'22\,m.s^{-1} \end{array}\right.$$

10. Se suele decir que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m situado a una altura h viene dada por E_P = m.g.h.

a) ¿Es correcta esta afirmación? ¿por qué?

b) ¿En qué condiciones es válida dicha fórmula?

a) La ecuación es únicamente válida en el caso en el que la altura sobre la superficie terrestre sea despreciable frente al radio de la Tierra. Para los casos en los que esto no sea cierto, la expresión no resulta correcta, por lo que debe utilizarse la expresión general que indica la energía potencial de un cuerpo en un determinado punto de un campo gravitatorio.

Vamos a demostrarlo matemáticamente. La expresión general de la energía potencial es:

$$E_P(0) = \frac{-G.M_T.m}{R_T + h}$$

Al elevar el cuerpo cierta altura **h**, incrementará su energía potencial:

$$E_P(1) = \frac{-G.M_T.m}{R_T + h}$$

Por tanto, la variación de energía potencial será:

$$E_P(1) - E_P(0) \rightarrow \Delta E_P = \frac{-G.M_T.m}{R_T + h} - \frac{-G.M_T.m}{R_T} = -G.M_T.m\left(\frac{1}{(R_T + h)} - \frac{1}{R_T}\right) =$$

$$= -G.M_T.m\left(\frac{R_T - (R_T + h)}{(R_T + h)}\right) = -G.M_T.m\left(\frac{-h}{(R_T + h)}\right) = \frac{G.M_T.m.h}{(R_T + h)}$$

En el caso en el que $R_T >> h \rightarrow R_T + h \approx R_T$, por lo que:

$$\Delta E_P = \frac{G.M_T.m.h}{(R_T + h)} \approx \frac{G.M_T.m.h}{R_T}$$

Y, puesto que:

$$\frac{G.M_T}{R_T} = g$$

La expresión queda como:

$$\Delta E_P = m.g.h$$

, siendo **h** la diferencia de alturas entre la posición final e inicial, que hemos considerado cero

Una expresión algo más general sería:

$$\Delta E_P = m.g.\Delta h$$

b) Como dijimos al principio del apartado a), esta expresión es únicamente válida bajo la condición esgrimida, que $R_T >> h \rightarrow R_T + h \approx R_T$. En caso de no cumplirse la condición, debe emplearse la expresión general de la energía potencial.

11. La masa de la Luna es 0'01 veces la de la Tierra y su radio es 0'25 veces el radio terrestre. Un cuerpo, cuyo peso en la Tierra es de 800 N, cae desde una altura de 50 m sobre la superficie lunar.
   a) Determine la masa del cuerpo y su peso en la Luna.
   b) Realice el balance de energía en el movimiento de caída y calcule la velocidad con que el cuerpo llega a la superficie.
   $g_T = 10\ m.s^{-2}$

a)

$$\left.\begin{aligned} F_{TIERRA} &= \frac{G.M_T.m_C}{R_T^2} = m_C \cdot g_0 \\ F_{LUNA} &= \frac{G.M_L.m_C}{R_L^2} \end{aligned}\right\}$$

A partir de la primera expresión, conocido el valor de $\mathbf{g_0}$, podremos conocer la masa del cuerpo (recordemos que la masa es la cantidad de materia que tiene un cuerpo). Así:

$$800 = m.g_0 \rightarrow 800 = m.10 \rightarrow m = 80Kg \text{ (valor constante)}$$

El peso en la Luna no resulta, en principio, fácil de determinar, puesto que no conocemos los valores de masa y radio lunar. Sin embargo, puesto que estos valores lunares se expresan en referencia a los valores respectivos de Tierra, podemos dividir:

$$\frac{F_{TIERRA}}{F_{LUNA}} = \frac{\left(\frac{G.M_L.m_C}{R_L^2}\right)}{\left(\frac{G.M_T.m_C}{R_T^2}\right)} \rightarrow \frac{F_{TIERRA}}{F_{LUNA}} = \frac{\left(\frac{M_T}{R_T^2}\right)}{\left(\frac{M_L}{R_L^2}\right)} \rightarrow \frac{F_{TIERRA}}{F_{LUNA}} = \frac{\left(\frac{M_T}{R_T^2}\right)}{\left(\frac{0´01.M_T}{(0´25R_T)^2}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{F_{TIERRA}}{F_{LUNA}} = \frac{\left(\frac{M_T}{R_T^2}\right)}{\left(\frac{0´01.M_T}{(0´25R_L)^2}\right)} \rightarrow \frac{F_{TIERRA}}{F_{LUNA}} = \frac{1}{\left(\frac{0´01}{(0´25)^2}\right)} \rightarrow \frac{F_{TIERRA}}{F_{LUNA}} = \frac{(0´25)^2}{0´01} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{F_{TIERRA}}{F_{LUNA}} = 6´25 \rightarrow F_{LUNA} = \frac{F_{TIERRA}}{6´25}$$

$$\boxed{F_{LUNA} = \frac{800}{6´25} = 128N}$$

b) El cuerpo, por encontrarse 50 metros sobre la superficie lunar, lleva asociado un cierto nivel de energía potencial gravitatoria. A lo largo de la caída, esta cantidad va disminuyendo progresivamente, siendo "reemplazado" este nivel por otro de energía cinética, que al contrario que el anterior, va aumentando (en la misma progresión al descenso de energía potencial).

Considerando la ausencia de atmósfera en la Luna, quedan descartadas fuerzas disipativas (de rozamiento), con lo que el sistema es conservativo. Podemos entonces, afirmar que se conservará la energía mecánica del sistema. Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} E_{M,1} &= m.g_L.h \quad \text{(energía mecánica inicial, en el punto en el que va a ser lanzado el cuerpo)} \\ E_{M,2} &= \frac{1}{2.}m.v^2 \quad \text{(energía mecánica final, en la superficie lunar)} \end{aligned}\right\}$$

Igualando :

$$E_{M,1} = E_{M,2} \rightarrow m.g_L.h = \frac{1}{2.}m.v^2 \rightarrow g_L.h = \frac{1}{2.}v^2 \rightarrow \boxed{v = \sqrt{2.g_L.h}}$$

Pero no disponemos del dato de la gravedad lunar. Recordando los valores de masa del cuerpo así como peso del cuerpo en la Luna, resulta rápida la obtención del valor de g_L, y asimismo del valor de **v**

Entonces:

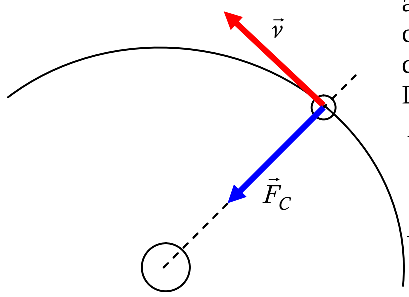
$$\left\{\begin{matrix} m = 80Kg \\ F_L = 128N \end{matrix}\right\} \rightarrow F_L = m.g_L \rightarrow 128 = 80.g_L \rightarrow g_L = \frac{128}{80} = 1´6\ \ m.s^{-1}$$

Luego :

$$v = \sqrt{2.g_L.h} = \sqrt{2.1´6.50} = \sqrt{160} = 12´53\ m.s^{-1}$$

12. Un satélite describe una órbita circular de radio $2R_T$ en torno a la Tierra.
    a) determine su velocidad orbital.
    b) Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿cuál será su peso en la órbita? Explique las fuerzas que actúan sobre el satélite.

    $G = 6'67.10^{-11}\ N.m^2kg^{-2}$; $M_T = 6.10^{24}$ kg; $R_T = 6'4.10^6$ m



a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de atracción gravitatoria, que, por ser la causa del movimiento circular descrito por la nave respecto a la Tierra es, sin lugar a dudas, una fuerza central.

La transcripción matemática será:

$$F_G = F_C$$

$$\frac{G.M_T.M_S}{R^2_{ORBITA}} = \frac{M_S.v^2}{R_{ORBITA}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_{ORBITA}}}$$

Sustituyendo los valores correspondientes:

$$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_{ORBITA}}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{6´67.10^{-11}.6.10^{24}}{2.6´4.10^{6}}} = 5591´6\ \ m.s^{-1}$$

b) Lo que denominamos PESO DE UN CUERPO no es sino la fuerza gravitatoria con la que la Tierra (en este caso) atrae a un cuerpo (nuestro satélite)

Vamos, pues, a determinar la intensidad de la fuerza del satélite tanto en la superficie como en la órbita en la que se encuentra:

$$\left\{\begin{matrix} F_{SUPERFICIE} = \dfrac{G.m_T.m_S}{R_T^2} \\ F_{ORBITA} = \dfrac{G.m_T.m_S}{(2R_T)^2} \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{F_{SUPERFICIE}}{F_{ORBITA}} = \frac{\left(\dfrac{G.m_T.m_S}{R_T^2}\right)}{\left(\dfrac{G.m_T.m_S}{(2R_T)^2}\right)} \rightarrow \frac{F_{SUPERFICIE}}{F_{ORBITA}} = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{ORBITA} = \frac{F_{SUPERFICIE}}{4}$$

Y, ya que el peso en la superficie es de 5000 N, resultará:

$$F_{ORBITA} = \frac{F_{SUPERFICIE}}{4} \rightarrow F_{ORBITA} = \frac{5000}{4} = \boxed{1250\ N}$$

, **peso** del satélite a la altura de su órbita

13. Un meteorito de 1000 kg colisiona con otro, a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra, y pierde toda su energía cinética.
    a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica tras la colisión?
    b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre? ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida? Razone las respuestas.

    $G = 6'67.10^{-11}\ N.m^2kg^{-2}$; $M_T = 6.10^{24}$ kg; $R_T = 6'4.10^6$ m

a1) El peso del meteorito a esta altura será:

$$F_G = \frac{G.M_T.m}{R^2} = \frac{G.M_T.m}{(7R)^2} = \frac{G.M_T.m}{49R^2}$$

Sustituyendo:

$$F_G = \frac{G.M_T.m}{R^2} = \frac{G.M_T.m}{(7R)^2} = \frac{G.M_T.m}{49R^2} \rightarrow F_G = \frac{6'67.10^{-11}.6.10^{24}.1000}{(7.6'4.10^6)^2} = 199'40N$$

a2) Puesto que tras la colisión el meteorito pierde toda su energía cinética:

$$E_M = E_K + E_P \rightarrow E_M = 0 + \frac{-G.M_T.m}{7.R_T} \rightarrow E_M = \frac{-6'67.10^{-11}.6.10^{24}.1000}{7.6'4.10^6} = -8'933.10^9\ J$$

b1) Inicialmente el meteorito, por hallarse en una determinada posición y dotado de cierta velocidad, dispondrá de un valor energético suma de las correspondientes energías potencial y cinética. En el caso en el que consideremos que en la situación inicial el meteorito ya perdió toda su energía cinética. Luego:

$$E_{M0} = \frac{-G.M_T.m}{7.R_T} + \frac{1}{2}.m.v_0^2$$

A medida que cae hacia la Tierra, irá paulatinamente perdiendo energía potencial a costa de un aumento de la energía cinética:

$$E_{M1} = \frac{-G.M_T.m}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_1^2$$

Si no consideramos las fricciones en la atmósfera cuya consecuencia será la elevada pérdida de energía en forma de calor, se cumplirá:

$$E_{M0} = E_{M1} \rightarrow \frac{-G.M_T.m}{7.R_T} + \frac{1}{2}.m.v_0^2 = \frac{-G.M_T.m}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_1^2$$

Pero si por el contrario si los tenemos en cuenta, la existencia fuerzas de rozamiento (no conservativas), implica el cumplimiento de:

$$\Delta E_M = W_{ROZ} \rightarrow \left(\frac{-G.M_T.m}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_1^2\right) - \left(\frac{-G.M_T.m}{7.R_T} + \frac{1}{2}.m.v_0^2\right) = W_{ROZ}$$

b2)

$$\Delta E_M = 0 \rightarrow \left(\frac{-G.M_T.m}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_1^2\right) - \left(\frac{-G.M_T.m}{7.R_T} + \frac{1}{2}.m.v_0^2\right) = 0$$

$$\frac{-G.M_T.m}{R_T} + \frac{G.M_T.m}{7.R_T} = -\frac{1}{2}.m.v_1^2 \rightarrow \frac{-G.M_T}{R_T} + \frac{G.M_T}{7.R_T} = -\frac{1}{2}.v_1^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2.G.M_T}{R_T}\left(1 - \frac{1}{7}\right)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{6}{7}\left(\frac{2.G.M_T}{R_T}\right)} = \sqrt{\left(\frac{12.G.M_T}{7.R_T}\right)}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{12.6'67.10^{-11}.6.10^{24}}{7.6'4.10^6}\right)} = 10353'57 m.s^{-1}$$

b3) En el caso en el que no se considere el rozamiento con la atmósfera, la velocidad con la que impacte el meteorito no será función de la trayectoria recorrido, puesto que al tratarse de un sistema conservativo, puede definirse en el la función energía potencial. Sin embargo, al participar el rozamiento, fuerza no conservativa, como ya hemos dicho, el trabajo realizado por esta si será función del camino recorrido. Cuanto mayor sea la trayectoria recorrida en la atmósfera, mayor será la energía perdida en forma de calor, y por lo tanto, menor será la energía cinética con la que alcance la superficie terrestre (menor velocidad).

14. Razone las respuestas a las siguientes cuestiones:
   a) Si el cero de energía potencial de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿Cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra?
   b) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?, ¿puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?

a) La ecuación que todos conocemos de energía potencial, parte del hecho de considerar nulo el valor de esta en el infinito. De este modo, a un cuerpo situado en la superficie terrestre le correspondería un valor.

$$\left\{\begin{array}{l} E_P(\text{superficie}) = \dfrac{-\mathrm{G.M_T}.m}{R_T} \\ E_P(\infty) = 0 \end{array}\right\}$$

El trabajo que realizaría la fuerza conservativa para llevar el cuerpo de masa **m** desde la superficie al infinito sería, en este caso,

$$W_{A\to\infty} = 0 - \frac{-\mathrm{G.M_T}.m}{R_T} = \frac{\mathrm{G.M_T}.m}{R_T}$$

Este valor del trabajo no es sino la diferencia entre las energías potenciales de los dos puntos considerados. Basándonos en este argumento, un cambio en el nivel cero de energía potencial no debe modificar el valor de la diferencia de potencial entre los dos puntos. Si a esto le añadimos que todos los procesos espontáneos van dirigidos hacia estados de menor energía potencial, llegaremos fácilmente a comprender que:

$$\left\{\begin{array}{l} E_P(\text{superficie}) = 0 \\ E_P(\infty) = \dfrac{\mathrm{G.M_T}.m}{R_T} \end{array}\right\}, \text{ de modo que: } W_{A\to\infty} = \frac{\mathrm{G.M_T}.m}{R_T} - 0 = \frac{\mathrm{G.M_T}.m}{R_T}$$

Que, claro está es el mismo que el anterior, como ya presuponíamos según el argumento indicado.

Pero también podemos realizar la argumentación matemáticamente. Si cambiamos la definición de energía potencial conocida por esta otra, ***el trabajo realizado por la fuerza conservativa para llevar un objeto de masa m desde el infinito hasta un punto de la superficie terrestre, en cuyo lugar su valor es nulo***, la ecuación matemática quedaría como:

$$W_{B\to A} = \int_B^A \vec{F}.d\vec{r} = \left[\frac{-G.M_T.m}{R}\right]_B^A = \frac{-G.M_T.m}{R_A} - \frac{-G.M_T.m}{R_B}$$

$$E_P(A) - E_P(\infty) = \frac{-G.M_T.m}{R_T} - \frac{-G.M_T.m}{R_\infty}$$

Puesto que, debido al nivel cero elegido, $\mathrm{E_P(A)} = 0$, quedará :

$$0 - E_P(\infty) = \frac{-G.M_T.m}{R_T} - 0 \to E_P(\infty) = \frac{G.M_T.m}{R_T}$$

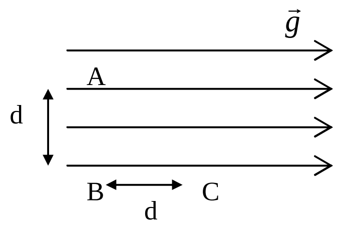
b1) El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria en un proceso espontáneo es siempre positivo. La separación de masas no es un proceso espontáneo, y es necesario efectuar un trabajo en contra de la fuerza gravitatoria. En este caso, el trabajo de esta fuerza gravitatoria es negativo (al no ser ella quien realiza dicho trabajo):

$$W_{\infty\to B} = -\Delta E_P = -\left(E_{P,B} - E_{P,\infty}\right) = \frac{-G.M_T.m}{R_B} - 0 = \frac{G.M_T.m}{R_B} \quad (\text{Proceso espontáneo})$$

$$W_{B\to\infty} = -\Delta E_P = -\left(E_{P,\infty} - E_{P,B}\right) = -\left(0 - \frac{-G.M_T.m}{R_B}\right) = -\frac{G.M_T.m}{R_B} \quad (\text{Proceso no espontáneo})$$

b2) Al estimar el infinito como referente de energías potenciales, las energías potenciales siempre son negativas, ya que, al tratarse de una fuerza atractiva, un cuerpo abandonado en el campo gravitatorio tenderá a desplazarse hacia lugares de menor energía potencial. Si en el infinito, la energía potencial es nula, el único modo de disminuir será considerando que en cualquier otro punto diferente del infinito, estas energías potenciales sean negativas

15. En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo.
    a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde B al C.
    b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.



a)

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F.dr.\cos 90 = 0$$

$$W_{B\to C} = \int_B^C \vec{F}.d\vec{r} = \int_B^C F.dr.\cos 0 = \int_B^C F.dr = \int_B^C \frac{G.M.m}{r^2}.dr = G.M.m.\left(\frac{-1}{r_C} - \frac{-1}{r_B}\right) =$$

$$= G.M.m.\left(\frac{-1}{r_C} + \frac{1}{r_B}\right) = G.M.m.\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right)$$

b)

El campo descrito se comporta como el campo gravitatorio terrestre, con la diferencia de que este es horizontal en tanto que el gravitatorio es vertical. En ambos casos tenemos un campo de fuerzas conservativo.

La diferencia radica en que en el campo gravitatorio, el valor de $\vec{g}$ es una función de la distancia a la Tierra, en tanto que el caso del ejemplo $\vec{g}$ es uniforme.

Por otro lado, las líneas de campo gravitatorio convergen en un punto, el centro del planeta; en nuestro caso, todas las líneas son paralelas.

El ejemplo podría resulta semejante, si lo giramos 90º en sentido horario, al del campo gravitatorio terrestre para puntos cercanos a la superficie de la Tierra. Si consideramos que esta es esférica, puede considerarse que para áreas pequeñas, y para bajas altitudes sobre la superficie terrestre, este será el comportamiento del campo gravitatorio.

16. Una partícula se mueve en un campo gravitatorio uniforme.

a) ¿Aumenta o disminuye su energía potencial gravitatoria al moverse en la dirección y sentido de la fuerza ejercida por el campo? ¿Y si se moviera en una dirección perpendicular a dicha fuerza?. Razone las respuestas.

b) Escriba una expresión del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre la partícula para un desplazamiento "d" en ambos casos. ¿En qué se invierte dicho trabajo?

a1) Disminuirá, ya que al situarse el origen de energías potenciales en el infinito (en cuyo lugar es cero), y, dado que en cualquier otro punto (distinto del infinito) viene dada por la expresión:

$$E_P = \frac{-G.M.m}{r}$$

, siempre será negativa, y menor cuanto más cerca se encuentre de la masa que cree el campo gravitatorio.

a2) Si la partícula se desplaza en sentido perpendicular al campo gravitatorio, no se producirán cambios en la energía potencial. Matemáticamente:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \left[\frac{-G.M.m}{R}\right]_A^B = \frac{-G.M.m}{R_B} - \frac{-G.M.m}{R_A}$$

$$E_P(B) - E_P(A) = \frac{-G.M.m}{R_B} - \frac{-G.M.m}{R_A}$$

Puesto que, $R_B = R_A$:

$$E_P(B) - E_P(A) = 0$$

b1)

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F.dr.\cos 0 = \int_a^B F.dr = \int_A^B \frac{G.M.m}{r^2}.dr = G.M.m.\left(\frac{-1}{r_B} - \frac{-1}{r_A}\right) =$$

$$= -G.M.m.\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

b2)

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F.dr.\cos 90 = 0$$

17. Un cuerpo, inicialmente en reposo a una altura de 150 km sobre la superficie terrestre, se deja caer libremente.

a) Explique cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante el descenso, si se supone nula la resistencia del aire, y determine la velocidad del cuerpo cuando llega a la superficie terrestre.

b) Si, en lugar de dejar caer el cuerpo, lo lanzamos verticalmente hacia arriba desde la posición inicial, ¿cuál sería su velocidad de escape?

Datos: G = 6'67.10^{-11} N.m^{2}kg^{-2}; M_T = 6.10^{24} kg; R_T = 6400 km

a) Variaciones Energéticas:

En el punto inicial, el móvil carece de velocidad, y se encuentra a una determinada altura sobre la superficie del planeta. Dicho de otro modo, el cuerpo dispone de un valor de energía mecánica equivalente a la energía potencial correspondiente a ese punto.

La acción gravitatoria produce la caída del cuerpo hacia la Tierra, con lo que su produce un paulatino decrecimiento de energía potencial a beneficio de un aumento de energía cinética, al ir aumentando de velocidad a medida que progresa la caída; por lo tanto, la energía cinética va incrementándose (en la misma medida en la que decrece la energía potencial)

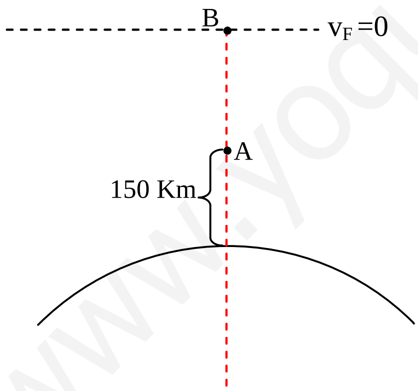
En cualquier caso, y puesto que el sistema es conservativo (si no consideramos las pérdidas energéticas durante la caída), el principio de conservación de la energía mecánica gobernará el proceso, con lo que:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{M1} = E_{K1} + E_{P1} = 0 + \dfrac{-G.M_T.m}{R_T + h} \\ E_{M2} = E_{K2} + E_{P2} = \dfrac{1}{2}.m.v_2^2 + \dfrac{-G.M_T.m}{R_T} \end{array}\right\} \dfrac{-G.M_T.m}{R_T + h} = \dfrac{1}{2}.m.v_2^2 + \dfrac{-G.M_T.m}{R_T} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-G.M_T}{R_T + h} = \frac{1}{2}.v_2^2 + \frac{-G.M_T}{R_T} \rightarrow v_2 = \sqrt{2.\left(\frac{-G.M_T}{R_T + h} - \frac{-G.M_T}{R_T}\right)} = 1692´34\ m.s^{-1}$$

b)



La velocidad escape es la velocidad comunicar a un cuerpo para que, escapando de la acción gravitatoria alcance un punto del infinito con velocidad cero

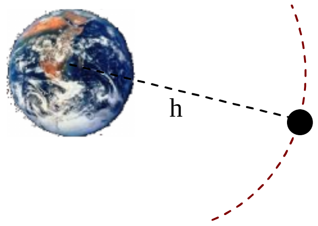
$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$\frac{-G.M_T.m}{R_T + h} + \frac{1}{2}.m.v_{ESCAPE}^2 = 0$$

$$\frac{G.M_T}{R_T + h} = \frac{1}{2}.v_{ESCAPE}^2 \rightarrow v_{ESCAP} = \sqrt{2.\left(\frac{G.M_T}{R_T + h}\right)}$$

18. Se desea colocar un satélite en una órbita circular, a una cierta altura sobre la Tierra.
 a) Explique las variaciones energéticas del satélite desde su lanzamiento hasta su situación orbital.
 b) ¿Influye la masa del satélite en su velocidad orbital?

a)



El cuerpo a lanzar se encuentra inicialmente sobre la superficie terrestre, y en esta posición se le comunica una velocidad para conseguir su despegue. Energéticamente, el dispositivo contiene un valor de energía equivalente a la suma de su energía cinética y su energía potencial:

$$E_{M1} = \frac{-G.M_T.m}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_1^2$$

A medida que asciende, y por considerar nulo el rozamiento con la atmósfera, la energía potencial del cuerpo irá aumentando, a costa de una disminución de la energía cinética. En todo momento, por tratarse de un sistema conservativo, se conservará la energía mecánica del sistema. Una vez alcanzada su órbita, el satélite se hallará en reposo, con lo que, al no disponer de energía cinética, todo su valor energético se hallará en forma de energía potencial gravitatoria:

$$E_{M2} = \frac{-G.M_T.m}{R_T + h} + \frac{1}{2}.m.v_2^2$$

Como hemos dicho:

$$E_{M1} = E_{M2} \rightarrow \frac{-G.M_T.m}{R_T} + \frac{1}{2}.m.v_1^2 = \frac{-G.M_T.m}{R_T + h} + \frac{1}{2}.m.v_2^2 \rightarrow$$

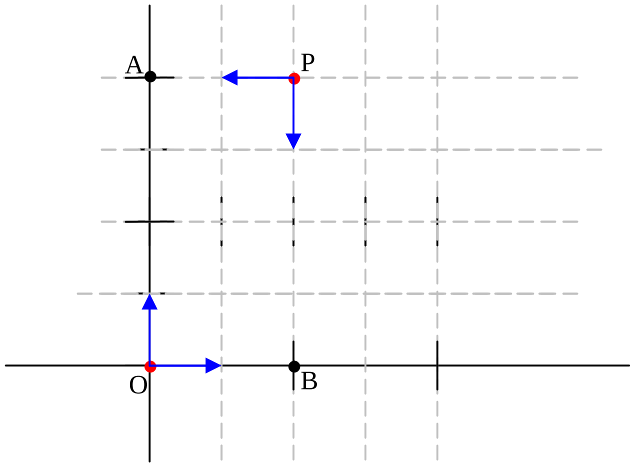
$$\rightarrow \frac{-G.M_T}{R_T} + \frac{1}{2}.v_1^2 = \frac{-G.M_T}{R_T + h} + \frac{1}{2}.v_2^2 \rightarrow \frac{-G.M_T}{R_T} + \frac{1}{2}.v_1^2 = \frac{-G.M_T}{R_T + h} \rightarrow v_1 = \sqrt{2.\left(\frac{-G.M_T}{R_T + h} - \frac{-G.M_T}{R_T}\right)}$$

Tras alcanzarse la órbita, el satélite deberá recibir un impulso tangencial que le permita comenzar a describir la órbita circular.

Como vemos a partir de la última expresión, la velocidad con la que debe ser lanzado el objeto es independiente de su masa.

19. Dos partículas de masas m1 = 2 Kg. y m2 = 5 Kg. están situadas en los puntos P1 (0,2) m y P2 (1,0) m respectivamente.
   a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto O (0,0) m y en el punto P (1,2) m y calcule el campo gravitatorio total en el punto P.
   b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0'1 Kg. desde el punto O al punto P
   G = 6'67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}

a) Vamos a determinar el campo gravitatorio producido en los puntos O y P, por cada una de las masas, de manera independiente.



$$\text{En O}\left\{\begin{array}{l} \vec{g}_{OA} = \dfrac{G.m_A}{y^2}.\vec{j} = \dfrac{2G}{4}.\vec{j} = \dfrac{G}{2}.\vec{j} \\ \vec{g}_{OB} = \dfrac{G.m_B}{x^2}.\vec{i} = \dfrac{5G}{1}.\vec{i} = 5.G.\vec{i} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = \left(5G, \dfrac{G}{2}\right) \text{ N.Kg}^{-1}$$

$$\text{En P}\left\{\begin{array}{l} \vec{g}_{PA} = \dfrac{G.m_A}{x^2}.(-\vec{i}) = \dfrac{2G}{1}.(-\vec{i}) = -2.G.\vec{i} \\ \vec{g}_{PB} = \dfrac{G.m_B}{4}.(-\vec{j}) = \dfrac{2G}{4}.(-\vec{j}) = \dfrac{-5G}{4}.\vec{j} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{g}' = \left(-2G, \dfrac{5G}{4}\right) \text{ N.Kg}^{-1}$$

b) Como ya sabemos, $W = -\Delta E_P$. Vamos entonces a determinar los valores de energías potenciales en O y en P; si a la partícula de masa 0´1 Kg la llamamos **m$_3$**:

$$E_P(O) = \frac{-G.m_A.m_3}{2} + \frac{-G.m_B.m_3}{1} = -G.m_3\left(\frac{m_A}{2} + m_B\right)$$

$$E_P(P) = \frac{-G.m_A.m_3}{1} + \frac{-G.m_B.m_3}{2} = -G.m_3\left(\frac{m_B}{2} + m_A\right)$$

$$\Delta E_P = -G.m_3\left(\frac{m_B}{2} + m_A\right) - \left(-G.m_3\left(\frac{m_A}{2} + m_B\right)\right) = -G.m_3\left(\frac{m_B}{2} + m_A\right) + G.m_3\left(\frac{m_A}{2} + m_B\right) =$$

$$= -G.m_3.\left(\frac{m_B}{2} + m_A - \frac{m_A}{2} - m_B\right) = -G.m_3.\left(-\frac{m_B}{2} + \frac{m_A}{2}\right) = \frac{-G.m_3}{2}.(m_A - m_B)$$

Sustituyendo :

$$\Delta E_P = -\frac{6´67.10^{-11}.0´1}{2}.(2-5) = 3.6´67.10^{-11}.0´1 = 1.10^{-11}\,J$$

Luego :

$$W = -1.10^{-11}\,J$$

20. La masa del Sol es 324.440 veces mayor que la de la Tierra y su radio 108 veces mayor que el terrestre. a) ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en la superficie del Sol que en la de la Tierra?. b) ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil que se lanzase verticalmente hacia arriba, desde la superficie solar, con una velocidad de 720 km/h?
$g_T = 10$ m s^{-2}

a)

$$\left.\begin{array}{l} F_{SOL} = \dfrac{G.M_S.m}{R_S^2} \\ F_{TIERRA} = \dfrac{G.M_T.m}{R_T^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{F_{SOL}}{F_{TIERRA}} = \frac{\left(\dfrac{G.M_S.m}{R_S^2}\right)}{\left(\dfrac{G.M_T.m}{R_T^2}\right)} = \frac{M_S.R_T^2}{M_T.R_S^2} = \frac{324400.M_T.R_T^2}{M_T.108^2.R_T^2} = 27´81 \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{SOL} = 27´81.F_{TIERRA}$$

Como vemos, el peso de un cuerpo situado hipotéticamente en la superficie solar sería 27´81 veces superior al que tendría en la Tierra. Consecuentemente,

$$g_{SOL} = 27´81.g_{TIERRA}$$

b) Se trata en este caso de calcular la velocidad de escape en la superficie del Sol.

$$\left[\begin{array}{l} E_M\,(\text{superficie}) = \dfrac{-G.M_S.m}{R_S^2} + \dfrac{1}{2}.m.v^2 \\ E_M\,(\text{máxima altura}) = \dfrac{-G.M_S.m}{(R_S+h)^2} \end{array}\right]$$

Puesto que el sistema es conservativo:

$$E_M\,(\text{superficie}) = E_M\,(\text{máxima altura}) \rightarrow \frac{-G.M_S.m}{R_S^2} + \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{-G.M_S.m}{(R_S+h)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-G.M_S}{R_S^2} + \frac{1}{2}.v^2 = \frac{-G.M_S}{(R_S+h)^2}$$

NECESITAMOS ABSOLUTAMENTE LOS DATOS DE MASA Y RADIO TERRESTRES

$$\left\{\begin{array}{l} M_{TIERRA} = 6.10^{24}\,kg \\ R_{TIERRA} = 6´4.10^6\,m \end{array}\right\}$$

A partir de aquí:

$$\left\{\begin{array}{l} M_{SOL} = 324400\,M_{TIERRA} = 1´94664.10^{30}\,Kg \\ R_{SOL} = 108.R_T = 6´912.10^8.m \end{array}\right\} (\text{Hemos de tomar todos los decimales o el problema no sale})$$

Sustituyendo ahora, se obtiene que:

h=73´59m

21. Un satélite de comunicaciones está situado en órbita geoestacionaria circular en torno al Ecuador terrestre. Calcule: a) radio de la trayectoria, aceleración tangencial del satélite y trabajo realizado por la fuerza gravitatoria durante un semiperiodo, b) campo gravitatorio y aceleración de la gravedad en cualquier punto de la órbita.
G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg , M_T = 5,98 10^{24} kg

a)

$$\tau = 24h = 86400s \rightarrow v = \omega.R_{ORB} \rightarrow v = \frac{2.\pi}{\tau}.R_{ORB} \rightarrow (1)$$

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m.v^2}{R_{ORB}} = \frac{G.M_T.m}{R_{ORB}^2} (2)$$

Sustituyen do (1) en (2) :

$$\frac{v^2}{R_{ORB}} = \frac{G.M_T}{R_{ORB}^2} \rightarrow \frac{\left(\frac{2.\pi}{\tau}.R_{ORB}\right)^2}{R_{ORB}} = \frac{G.M_T}{R_{ORB}^2} \rightarrow \frac{4.\pi^2}{\tau^2}.R_{ORB} = \frac{G.M_T}{R_{ORB}^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_{ORB} = \sqrt[3]{\frac{G.M_T.\tau^2}{4.\pi^2}}$$

Sustituyendo :

$$R_{ORB} = 42´30.10^6\, m$$

En cuanto a la aceleració n tangencial , esta será nula, puesto que el movimiento orbital es un MCU

Y en lo que respecta al trabajo realizado por la fuerza gravitator ia :

$$W_{GRAV} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F.dr.\cos\alpha = \int_A^B F.dr.\cos 90 = 0$$

(Ya que en todo momento $d\vec{r}$ y $\vec{F}$ son $\perp$)

b) Antes de comenzar el análisis matemático, debemos indicar que la intensidad del campo gravitatorio y aceleración de la gravedad son la misma magnitud. De hecho, la intensidad del campo gravitatorio tiene como unidad en Sistema Internacional el N.Kg^{-1} (=Kg.m.s^{-2}.Kg^{-1}) que , como vemos, es equivalente al m.s^{-2}, unidad característica de las aceleraciones.
Vamos, por tanto, a determinar la intensidad del campo:

$$g = \frac{G.M_T}{R^2} = \frac{6´67.10^{-11}.5´98.10^{24}}{\left(42´30.10^6\right)^2} = 0´223 \text{ m.s}^{-2}$$

22. Suponga que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa.
   a) ¿Aumentaría la intensidad del campo gravitatorio en su nueva superficie?
   b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol?

   Justifique las respuestas.

a) La intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$) en un punto alrededor de una masa **M** viene dado por la expresión:

$$\vec{g} = \frac{-G.M}{R^2}.\vec{u}_R \,,$$

Donde M es la masa del cuerpo puntual que ejerce el campo y R es la distancia entre el cuerpo (puntual) y el punto considerado.
En un sentido estricto, la fórmula sólo es válida para cuerpos puntuales que concentren toda la masa en dicho punto; sin embargo, en el caso de partículas esféricas con distribución de masa homogénea (densidad homogénea) sucede que su comportamiento gravitatorio es idéntico al de una masa puntual de valor la masa del cuerpo. Para nuestro caso, podemos considerar el comportamiento gravitatorio generado por la Tierra como el que correspondería a una partícula puntual en la que toda la masa de la Tierra estuviera "recogida". Por lo tanto, la expresión inicial para el campo es perfectamente válida.
Comparemos los valores del campo:

$$\text{Para nuestra Tierra}: \quad g_0 = \frac{G.M_T}{R_T^2}$$

$$\text{Para la otra Tierra}: \quad g_0 = \frac{G.M_T}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} = \frac{4.G.M_T}{R_T^2} = 4.g_0$$

Como vemos, en la superficie, el campo de Tierra 2 sería cuatro veces mayor que el campo de la Tierra.

b) Explicación1. Ya se ha indicado que la ecuación del campo solo es válida para cuerpos puntuales, pero que puede ser utilizada para el caso de masas esféricas, reduciendo a un punto las dimensiones de estas.
Y puesto que en la expresión del campo no intervienen los tamaños de las partículas implicadas (en nuestro caso Tierra y Sol), ello supondrá que el comportamiento entre ambos astros será el mismo, independientemente de la reducción en el radio de uno de ellos

Explicación 2. Otro modo de argumentar se basaría en el análisis del tipo de fuerzas por las que uno de los planetas reduciría su masa; a saber:

a) Por fuerzas internas (a la Tierra): en este caso, las fuerzas no producirían ningún efecto dinámico puesto que se anularían dos a dos, según la tercera ley de Newton (Ppio de Acción y Reacción). Al no existir este efecto (producción de una aceleración como consecuencia de la existencia de una fuerza neta), no se produciría cambio en la órbita.
b) Por fuerzas externas (Sol sobre Tierra). En cualquier caso, por poder considerarse como masas puntuales, las distancias entre esos puntos no variaría, con lo que tampoco lo haría el campo, con lo que no habría ninguna modificación orbital.

23. El satélite de investigación europeo (ERS-2) sobrevuela la Tierra a 800 km de altura. Suponga su trayectoria circular y su masa de 1000 kg.

a) Calcule de forma razonada la velocidad orbital del satélite.

b) Si suponemos que el satélite se encuentra sometido únicamente a la fuerza de gravitación debida a la Tierra, ¿por qué no cae sobre la superficie terrestre? Razone la respuesta.

R_T = 6370 km ; g = 10 m s^{-2}

a) Para determinar la velocidad orbital del satélite nos basta con darnos cuenta de que la única fuerza existente, la fuerza gravitatoria, es la causante del movimiento de rotación alrededor de la Tierra, circular uniforme. La fuerza gravitatoria, como bien sabemos, es una fuerza central, cuya acción se dirige siempre hacia el centro del planeta. De un modo más claro, se trata de una fuerza centrípeta:

$$F_G = F_C$$

$$\frac{G.M_T.m}{(R_T + h)^2} = \frac{m.v_{ORB}^2}{(R_T + h)} \rightarrow \frac{G.M_T}{(R_T + h)} = v_{ORB}^2 \rightarrow v_{ORB} = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R_T + h)}}$$

Pero no disponemos de los valores de masa terrestre. Sin embargo sí conocemos el valor del campo en la superficie terrestre (g_0) :

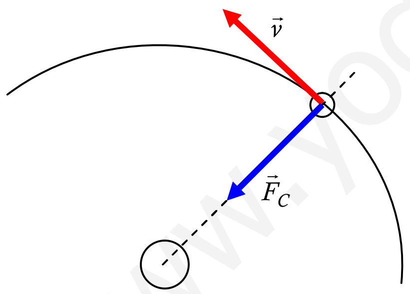
$$g_0 = \frac{G.M_T}{R_T{}^2} \rightarrow 10 = \frac{G.M_T}{(6370.10^3)^2} \rightarrow G.M_T = 4´06.10^{14}$$

Sustituyendo este valor en la velocidad orbital :

$$v_{ORB} = \sqrt{\frac{4´06.10^{14}}{(6370.10^3 + 800.10^3)}} = 7524´94 \ m.s^{-1}$$

b) El satélite, puesto que describe una órbita circular, se encuentra sometido a una fuerza centrípeta, fuerza que, como ya se indicó en el apartado anterior es la fuerza gravitatoria. En este caso, la tendencia a "caer" hacia la Tierra está compensada con la tendencia a desplazarse con la velocidad orbital en una dirección tangente a la dirección radial.

Sin embargo, en el caso en el que la velocidad no pudiese compensar esa tendencia a la caída, el satélite caería describiendo una espiral hasta caer a la Tierra. Si, por el contrario, el satélite se moviese con una velocidad superior a la velocidad orbital, este escaparía de su órbita inicial (circular).



24. La nave espacial Apolo XI orbitó alrededor de la Luna con un período de 119 minutos y a una distancia media del centro de la Luna de $1´8.10^6$ m. Suponiendo que su órbita fue circular y que la Luna es una esfera uniforme:
   a) Determine la masa de la Luna y la velocidad orbital de la nave.
   b) ¿Cómo se vería afectada la velocidad orbital si la masa de la nave espacial se hiciese el doble? Razone la respuesta.
   Dato: $G=6´67.10^{-11}$ $N.m^2\,Kg^{-2}$

a) La fuerza que permite al satélite dar vueltas alrededor de la Luna es su fuerza de atracción gravitacional. Puesto que es una fuerza central, es decir, de naturaleza centrípeta:

$$F_G = F_C$$

$$\frac{G.M_L.m}{(R_L+h)^2} = \frac{m.v_{ORB}^2}{(R_L+h)} \rightarrow \frac{G.M_L}{(R_L+h)} = v_{ORB}^2 \rightarrow v_{ORB} = \sqrt{\frac{G.M_L}{(R_L+h)}}$$

Además, disponemos del período de rotación de la nave :

$$\tau = 119.60 = 7140s$$

Esta magnitud (τ) se relaciona con la velocidad lineal a través de la ecuación :

$$\left.\begin{cases}\omega = \dfrac{2.\pi}{\tau} \\ v = \omega.(R_L+h)\end{cases}\right\} \rightarrow v_{ORB} = \frac{2.\pi}{\tau}.(R_L+h)$$

Igualando las dos expresiones correspondientes a la velocidad orbital :

$$\sqrt{\frac{G.M_L}{(R_L+h)}} = \frac{2.\pi}{\tau}.(R_L+h) \rightarrow \frac{G.M_L}{(R_L+h)} = \frac{4.\pi^2}{\tau^2}.(R_L+h)^2 \rightarrow M_L = \frac{4.\pi^2}{G.\tau^2}.(R_L+h)^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_L = \frac{4.\pi^2}{6´67.10^{-11}.(7140)^2}.(1´8.10^6)^3 \rightarrow M_L = 6´77.10^{22}\,Kg$$

b) Si analizamos la expresión correspondiente a la velocidad orbital:

$v_{ORB} = \sqrt{\frac{G.M_L}{(R_L+h)}}$, vemos que, en ningún momento aparece la masa del satélite. Tan sólo depende de la masa del astro y del radio de la órbita.

25. Demuestre, razonadamente, las siguientes afirmaciones:

a) a una órbita de radio R de un satélite le corresponde una velocidad orbital v característica.

b) la masa M de un planeta puede calcularse a partir de la masa m y del radio orbital R de uno de sus satélites.

a) Los fundamentos teóricos que explican el movimiento de satélites artificiales en sus órbitas estables pueden ser desarrollados cosiderando los principios físicos indicados en la imagen de la página anterior (Ley de la Gravitación Universal, Conservación del Momento Angular y Conservación de la Energía).

La energía mecánica que posee un satélite que gira alrededor del planeta será:

$$E_{MEC} = E_P + E_K = \left(\frac{-G.m_T.m}{r}\right) + \frac{1}{2}mv^2 = cte$$

, y este valor deberá ser negativo en todo momento, puesto que el primer término se relaciona con la acción gravitatoria del satélite, y para que el artefacto permanezca constantemente ligado al planeta es necesario que la energía cinética sea menor, en términos absolutos, que la energía potencial correspondiente al punto de la órbita en la que se encuentre dicho satélite (de este modo, no dispondrá en ningún momento de la energía suficiente como para escapar de la acción de planeta):

$$\left|\frac{-G.m_T.m}{r}\right| > \left|\frac{1}{2}mv^2\right|$$

Esta condición se cumplirá entre determinados valores de r, uno máximo (apogeo) y otro mínimo (perigeo). La trayectoria que cumplirá esta condición será, claro está, una elipse con la Tierra en uno de sus focos (recordemos las leyes de Kepler).

Y,claro está, una de las elipses que cumplen lo deducido anteriormente es, precisamente, la circunferencia. Al analizar este sencillo caso:

$\vec{F}_{GRAV} = m.\vec{a}_C$ (al tener los dos vectores iguales dirección y sentido, podemos realizar un tratamient o escalar. Así :

$$\frac{G.m_T.m}{r^2} = m.\frac{v_{ORB}{}^2}{r} \rightarrow \frac{G.m_T}{r} = v_{ORB}{}^2 \rightarrow v_{ORB} = \sqrt{\frac{G.m_T}{r}}$$

b) Tal determinación será posible siempre que se conozcan datos de un planeta o satélite en órbita alrededor suyo.

Considerando las órbitas como circulares, la fuerza de atracción gravitatoria es la fuerza centrípeta productora del movimiento. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} F_c &= \frac{mv^2}{R} \\ F_g &= G\frac{M.m}{R^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{mv^2}{R} = G\frac{M.m}{R^2} \rightarrow v^2 = G\frac{M}{R} \rightarrow M = \frac{R.v^2}{G}$$

Pero,

$$v = \omega.R = \frac{2\pi.R}{\tau}$$

Por lo que:

$$M = \frac{R.\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2}{G} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 R}{G.\tau^2}$$

$, donde:$

$$\begin{cases} R = \text{Distancia que separa los centros de masa de ambos astros} \\ \tau = \text{Período de revolución del cuerpo que gira alrededor del astro central} \end{cases}$$

26. a) Determine la densidad media de la Tierra.
b) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio terrestre se reduce a la tercera parte?
$G=6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $R_T=6370$ km; $g=10$ m s^{-2}

a) Como muy bien sabemos, la densidad de un cuerpo es un propiedad intensiva que se expresa matemáticamente como:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Puesto que nuestro objetivo es determinar tal magnitud, lo que haremos será en primer lugar determinar los valores de masa y volumen terrestre.
Por lo que respecta a la masa, el campo gravitatorio de un punto de la superficie será:

$$g_0 = \frac{G.M_T}{R_T^2} \rightarrow \frac{g_0.R_T^2}{G} = M_T \rightarrow M_T = \frac{10.\left(6370.10^3\right)^2}{6´67.10^{-11}} = 6´08.10^{24}\,kg$$

En cuanto al volumen del planeta, por tratarse de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}.\pi.R_T^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(6370.10^3\right)^3 = 1´08.10^{21}\,m^3$$

Ahora, simplemente sustituimos en la ecuación de la densidad y tenemos la solución:

$$\rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{6´08.10^{24}}{1´08.10^{21}} = 5629´63Kg.m^{-3}$$

b) Necesitamos comparar la intensidad del campo entre dos puntos, la superficie terrestre y el punto en el que esta se reduce a la tercera parte:

$$\left.\begin{array}{l} g_0 = \dfrac{G.M_T}{R_T^2} \\ g = \dfrac{G.M_T}{\left(R_T+h\right)^2} \rightarrow \dfrac{g_0}{3} = \dfrac{G.M_T}{\left(R_T+h\right)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{g_0}{g} = \frac{\left(\dfrac{G.M_T}{R_T^2}\right)}{\left(\dfrac{G.M_T}{\left(R_T+h\right)^2}\right)} \rightarrow \frac{g_0}{\left(\dfrac{g_0}{3}\right)} = \frac{\left(\dfrac{G.M_T}{R_T^2}\right)}{\left(\dfrac{G.M_T}{\left(R_T+h\right)^2}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 = \frac{\left(\dfrac{1}{R_T^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{\left(R_T+h\right)^2}\right)} \rightarrow 3 = \frac{\left(R_T+h\right)^2}{R_T^2} \rightarrow \frac{R_T+h}{R_T} = \sqrt{3} \rightarrow R_T + h = \sqrt{3}.R_T \rightarrow h = R_T.\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Sustituyendo :

$$h = 6370.10^3.\left(\sqrt{3}-1\right) = 4663´16.10^3\,m$$

27. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
a) El peso de un cuerpo en la superficie de un planeta cuya masa fuera la mitad que la de la Tierra sería la mitad de su peso en la superficie de la Tierra.
b) El estado de "ingravidez" de los astronautas en el interior de las naves espaciales orbitando alrededor de la Tierra se debe a que la fuerza que ejerce la Tierra sobre ellos es nula.

a)

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= \frac{G.M_T}{R_T^2} \\ g &= \frac{G.(M_T/2)}{R_T^2} = \frac{G.M_T}{2R_T^2} = \frac{g_0}{2} \end{aligned}\right]$$

La proposición es, pues, verdadera.

b) Falso. El valor de la gravedad disminuye, como bien sabemos, con la distancia, y tan sólo se anula cuando nos encontremos en el infinito, donde cualquier interacción gravitatoria resultase nula.
Desde luego que esta no es la situación existente en una nave espacial en los alrededores de la Tierra.
Teniendo en cuenta que el satélite gira alrededor de la Tierra por acción de la fuerza gravitatoria, es imposible asumir un valor nulo de gravedad (intensidad del campo gravitatorio).
La sensación de ingravidez es consecuencia de una apreciación de nuestro propio peso de una manera indirecta, por medio del cuerpo sobre el que nos apoyamos (una báscula, por ejemplo); si no se produce esa interacción, tal y como sucede cuando caemos en un recinto que también lo hace (nave espacial), nos sentimos “ingrávidos”. Esta misma sensación podemos apreciarla por ejemplo, en las montañas rusas.
El estado de ingravidez es consecuencia de que sobre el cuerpo sólo actúa la fuerza gravitatoria (pero no la interacción entre el astronauta y el suelo de la nave). De un modo menos riguroso, pero perfectamente comprensible, podemos decir que tanto nave como ocupantes están cayendo hacia la Tierra con la misma aceleración (empujados por la misma fuerza). Esto es lo que da la sensación de ingravidez.

28. a) Razone cuáles son la masa y el peso en a Luna de una persona de 70 kg.
b) Calcule la altura que recorre en 3 s una partícula que se abandonara, sin velocidad inicial, en un punto próximo a la superficie de la Luna y explique las variaciones de energía cinética, potencial y mecánica en ese desplazamiento.
$G = 6{,}67.10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; $M_L = 7{,}2.10^{22}$ kg ; $R_L = 1{,}7.10^6$ m

a)
La masa es, como todos sabemos una magnitud asociada a la cantidad de materia que posee un cuerpo. Se trata de una magnitud escalar, que nos mide la inercia que posee ese cuerpo (es decir, la oposición ejercida por este a ser acelerado por acción de una fuerza). Desde luego, es independiente del punto en el que se halle el objeto. Así pues, la masa en la Luna será la misma que la de la Tierra, es decir, 70 Kg

El peso, sin embargo, es la fuerza con la que un astro atrae a un cuerpo. Por lo tanto, esta magnitud, de carácter vectorial, sí variará en función del valor de la intensidad del campo gravitatorio existente en el punto en el que se halle el cuerpo. Matemáticamente:

$$Peso = F_G = \frac{G.M_L.m}{R_L^2} = \frac{6'67.10^{-11}.7'2.10^{22}.70}{\left(1'7.10^6\right)^2} = 116'32N$$

(Como sabemos, $F = m.g_L = m.\left(\frac{G.M_L}{R_L^2}\right) \rightarrow 116'32 = 70.g_L \rightarrow g_L = \frac{116'32}{70} = 1'66 m.s^{-2}$

b1) Puesto que se trata de un movimiento de caída libre, el movimiento estará descrito por la ecuación:

$y=y_0+v_0.t+\frac{1}{2}at^2$ (expresado escalarmente)

$y\text{-}y_0=v_0.t+\frac{1}{2}at^2 \rightarrow h=v_0.t+\frac{1}{2}at^2$ (siendo $h=y\text{-}y_0$)

Puesto que $v_0=0$:

$h=\frac{1}{2}at^2$

, o

$h=\frac{1}{2}.g_L.t^2=\frac{1}{2}.1'66.3^2=7'47m$

b2) Inicialmente, el cuerpo, situado a cierta altura con respecto a la superficie lunar y sin velocidad inicial, dispone de un valor de energía mecánica igual a la suma de su energía potencial y su cinética (nula). A medida que el cuerpo desciende, se produce una paulatina pérdida de energía potencial, a favor de un aumento en su energía cinética, puesto que, a medida que cae, su velocidad aumenta, al estar sometido a una aceleración. En el momento de impactar con la superficie lunar, la energía potencial habrá adquirido su valor mínimo y su energía cinética será máxima.

Analíticamente:

$$\left.\begin{aligned} E_{M1} &= E_{K1} + E_{P1} = 0 + \frac{-G.M_L.m}{\left(R_L + h\right)^2} \\ E_{M2} &= E_{K2} + E_{P2} = \frac{1}{2}m.v_2^2 + \frac{-G.M_L.m}{R_L^2} \end{aligned}\right\}$$

Puesto que el sistema es conservativo, la energía mecánica será constante:

$$E_{M1} = E_{M2} \rightarrow E_{K1} + E_{P1} = E_{K2} + E_{P2} \rightarrow 0 + \frac{-G.M_L.m}{\left(R_L + h\right)^2} = \frac{1}{2}m.v_2^2 + \frac{-G.M_L.m}{R_L^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-G.M_L.m}{\left(R_L + h\right)^2} - \frac{-G.M_L.m}{R_L^2} = \frac{1}{2}m.v_2^2 \rightarrow \Delta E_P = \frac{1}{2}m.v_2^2$$

Si queremos conocer el valor de ΔE_P :

$$\frac{-G.M_L.m}{\left(R_L + h\right)^2} - \frac{-G.M_L.m}{R_L^2} \rightarrow -6'67.10^{-11}.70.7'2.10^{22}.\left(\frac{1}{\left(1'7.10^6 + 7'47\right)} - \frac{1}{1'7.10^6}\right) = 868'01N$$

29. Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Según la ley de gravitación la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa de éste. Sin embargo, dos cuerpos de diferente masa que se sueltan desde la misma altura llegan al suelo simultáneamente.

b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa en el desplazamiento de una partícula entre dos puntos es menor si la trayectoria seguida es el segmento que une dichos puntos.

a) Verdadero.

Como sabemos, la fuerza que la Tierra ejercerá sobre un cuerpo de masa **m** será:

$$\vec{F}_{CT} = -G.\frac{M \ .M_2}{r_{12}^2}.\vec{u}_r$$

Por otro lado, a partir de la segunda ley de la dinámica:

$\vec{F}_{CT} = m.\vec{a}$ (Fuerza ejercida sobre el cuerpo por la Tierra)

Igualando:

$$\left.\begin{cases} \vec{F}_{CT} = -G.\dfrac{M_T.m}{r_{12}^2}.\vec{u}_r \\ \vec{F}_{CT} = m.\vec{a} \end{cases}\right\} \rightarrow G.\frac{M_T.m}{r_{12}^2} = m.a \text{ (al igualar módulos)} \rightarrow G.\frac{M_T}{r_{12}^2} = a$$

Aceleración que no es otra que la gravedad en la superficie terrestre (g_0), que a nivel de la superficie terrestre es, aproximadamente 9´81m.s^{-1}.

Es decir, la aceleración con la que un objeto es atraído hacia la superficie terrestre es independiente de la masa de este. Dicho de otro modo, los cuerpos que se dejan caer desde cierta altura (en las cercanías de la superficie terrestre), describen un movimiento cinemática (MRUA) independiente de su masa.

Sin embargo, la causa que los produce, es decir, la fuerza de atracción gravitatoria, o dicho de otra manera, el peso del cuerpo, si variará en función de la masa, puesto que como todos sabemos:

$$P = m.g_0$$

Y, claro está, a diferentes masas, distintos pesos (fuerzas)

Como resumen, podemos decir que el comportamiento cinemática de cuerpos de distinta masa es el mismo (despreciando rozamientos), pero, en cambio, los comportamientos dinámicos sí son diferentes.

b) Falso

Para calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria debida a una masa **M**, para desplazar una masa **m** desde un punto **A,** hasta **B**, tendrá que considerarse la variación, tanto de la dirección como del propio valor de la fuerza a lo largo del desplazamiento del cuerpo. Habrá de utilizarse, claro, el cálculo integral:

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}.\vec{ds} = \int_A^B -G\frac{M.m}{r^2}.\vec{u}_r.\vec{ds} = \int_A^B -G\frac{M.m}{r^2}.\vec{u}_r.\vec{ds}$$

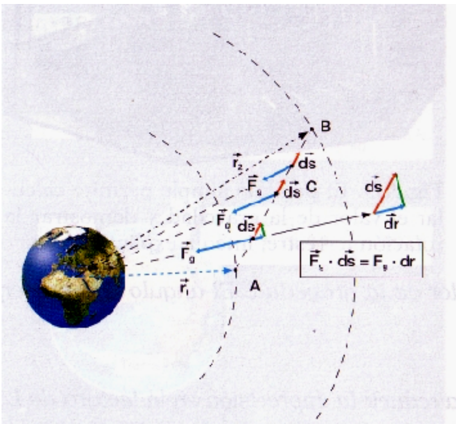
, y, de la figura puede verse que :

$$\vec{u}_r.\vec{ds} = dr$$

, con lo que :

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B -G\frac{M.m}{r^2}.dr = -G.M.m.\int_A^B \frac{dr}{r^2} = -G.M.m.\left[\frac{-1}{r}\right]_A^B \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{A\rightarrow B} = \left(\frac{-G.M.m}{r_A}\right) - \left(\frac{-G.M.m}{r_B}\right)$$



Es decir, el trabajo para desplazar a una partícula en el interior de un campo gravitatorio depende tan sólo de las posiciones final e inicial, y no de la trayectoria elegida para conectar ambos puntos.
Según ello, será posible caracterizar (también) el campo gravitatorio desde un punto de vista escalar, a partir del concepto de trabajo.
Si volvemos a la expresión:

$$W_{A\to B}=\left(\frac{-G.M.m}{r_A}\right)-\left(\frac{-G.M.m}{r_B}\right)\quad (*)$$

, se ve fácilmente que se trata de la diferencia de dos cantidades. Cada una de estas cantidades:

$$\frac{-G.M.m}{r}$$

, recibe el nombre de **energía potencial gravitatoria (E_p)**
En el caso en el que $r=\infty$, el valor de la energía potencial se hace nulo. Este será el punto de referencia de energías potenciales (lo que suele llamarse el orígen de potenciales). Vemos entonces que los valores E_p para cualquier otro punto tendrá un valor negativo.

Según lo anteriormente indicado, la expresión (*), podrá ponerse como:

$$W_{A\to B}=E_P^{(A)}-E_P^{(B)}$$

$$W_{A\to B}=-\Delta E_P$$

La utilidad de esta expresión es doble:

- Por un lado evita tener que realizar casos particulares para movimientos que coinciden en los puntos inicial y final, pero con trayectorias diferentes.
- Por otro, permite predecir la espontaneidad del proceso, es decir, si el trabajo lo realiza el campo gravitatorio o una fuerza externa. Puesto que todo cuerpo libre que se desplaza en un campo gravitatorio lo hace hacia energías potenciales decrecientes, W_{campo} >0; en caso contrario será una fuerza externa quien realice dicho trabajo.