TEMA 2

FUNDAMENTOS DE FÍSICA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD.

1. Un muelle de constante elástica 250 Nm^{-1}, horizontal y con un extremo fijo, está comprimido 10 cm. Un cuerpo de 0'5 kg, situado en su extremo libre, sale despedido al liberarse el muelle.
   a) Explique las variaciones de energía del muelle y del cuerpo, mientras se estira el muelle.
   b) Calcule la velocidad del cuerpo en el instante de abandonar el muelle.

Solución:

Datos:	Incógnitas:
K=250 N/m m=0´5 Kg Δx=10 cm =0´1 m	a) ¿Variaciones de energía (ΔE)? b) ¿Velocidad (v) del cuerpo al abandonar el cuerpo?

a) En el instante inicial, el muelle, al estar comprimido, almacena una energía potencial elástica dada por la expresión $\frac{1}{2}K.x^2$.
Al dejar libre el muelle, la fuerza elástica o recuperadora hace que este tienda a adquirir su estado de equilibrio. En términos energéticos, la energía acumulada en el resorte va transmitiéndose paulatinamente al cuerpo **m** en forma de energía cinética ($E_K = \frac{1}{2}mv^2$).
Al no producirse pérdidas por rozamientos, y teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía:

$$\boxed{\Delta E_K = -\Delta E_P \rightarrow \Delta E_K + \Delta E_P = 0}$$

(en este caso, la energía potencial como energía potencial elástica)
Es decir, se produce una transferencia de energía desde el muelle al cuerpo, de manera que, una vez el muelle se halla en su posición de equilibrio (estiramiento o compresión cero), la energía potencial elástica del resorte resulta ser nula, lo que indica que la transferencia de energía al cuerpo ha sido total.

b) $$\Delta E_K = -\Delta E_{PE} \rightarrow \Delta E_K + \Delta E_{PE} = 0 \rightarrow E_{K,0} + E_{PE,0} = E_{K,1} + E_{PE,1}$$

a. Inicialmente:

$$\left.\begin{cases} E_{K,0} = 0 \\ E_{PE,0} = \frac{1}{2}Kx^2 \end{cases}\right\} \rightarrow E_{K,0} + E_{PE,0} = 0 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}Kx^2$$

b. Al final:

$$\left.\begin{cases} E_{K,1} = 0 \\ E_{PE,1} = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases}\right\} \rightarrow E_{K,1} + E_{PE,1} = 0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Por lo tanto, igualando:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Kx^2 \rightarrow mv^2 = Kx^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{Kx^2}{m}}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$v = \sqrt{\frac{250.0{'}1^2}{0{'}5}} = 2{'}236\ m/s$$

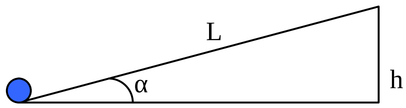
2. Un cuerpo se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con una velocidad inicial de 10 ms^{-1}.
   a) Explique cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante la subida.
   b) ¿Cómo variaría la longitud recorrida si se duplicara la velocidad inicial? ¿Y si se duplica el ángulo del plano?

Solución:

Datos:
$\alpha = 30^o$
$v_0 = 10 m/s$

Incógnitas:
a) ¿Variaciones de energías?
b1) ¿Cómo variará la longitud recorrida al duplicar la velocidad inicial?
b2) ¿Cómo variará la longitud recorrida al duplicar ángulo inclinación?

a)



El móvil posee en su estado inicial una energía cinética como consecuencia de la velocidad que lleva en ese momento. Como sabemos, el valor de tal energía será $\frac{1}{2}mv_0^2$

Conforme va ascendiendo por el plano inclinado, parte de esta E_K se va transformando en Energía Potencial Gravitatoria (E_P). La transferencia energética se produce siempre de forma que la Energía Mecánica de la bola (E_M), se mantiene constante, puesto que no existen fuerzas de rozamiento, en virtud del PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.
Las consideraciones matemáticas son:

$$Inicialmente\begin{cases} E_{K,0} = \frac{1}{2}mv^2 \\ E_{P,0} = 0 \end{cases} \rightarrow E_{M,0} = E_{K,0} + E_{P,0} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$En\ el\ punto\ más\ alto\begin{cases} E_{K,1} = 0 \\ E_{P,1} = mgh \end{cases} \rightarrow E_{M,1} = E_{K,1} + E_{P,1} = mgh$$

$$\boxed{E_{M,0} = E_{M,1}}$$

La longitud que recorrerá el cuerpo sobre el plano se obtendrá calculando la altura máxima que alcanzará el objeto, y, posteriormente, a través de la definición de seno, despejar esa incógnita. Es decir:

$$E_{M,0} = E_{M,1} \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 = gh \rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2g}v_0^2}$$

Pero, puesto que: $h = L.sen\alpha$ α
Tendremos que:

$$L.sen\alpha = \frac{1}{2g}v_0^2 \rightarrow L = \frac{1}{2g.sen\alpha}v_0^2 \rightarrow L = \frac{1}{2.9{'}8.sen30}10^2 = 10m$$

b) Si se duplica la velocidad inicial,

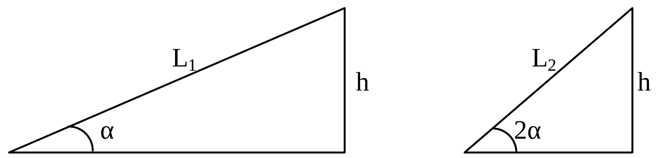
$$L = \frac{1}{2g.sen\alpha}v_0^2 \rightarrow L = \frac{1}{2.9{'}8.sen30}20^2 = 40m$$

Como vemos, se cuadruplica el espacio recorrido en el plano

c) En el caso en el que sea el ángulo del plano el que se duplique:

$$L = \frac{1}{2g.sen\alpha} v_0^2 \rightarrow L = \frac{1}{2.9'8.sen60} 10^2 = 5'77m$$

EL espacio recorrido sobre el plano es menor, ya que para alcanzar la misma altura que en el apartado a), debido a la mayor pendiente del plano, deberá realizarse un menor trayecto:



$L_1 > L_2$

3. a) ¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo, explique el significado físico.
b) ¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética de una partícula es igual a la disminución de energía potencial?. Justifique la respuesta.

Solución:

Datos:	**Incógnitas:**
	a) ¿E_K=(-)? ¿E_P=(-)? b) ¿Siempre se cumple que: $\Delta E_C = -\Delta E_P$?

a1) ¿E_K=(-)? La respuesta es NO. La propia fórmula de la energía cinética nos aporta la respuesta: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$

Analizando cada término del producto comprobamos que, por un lado, la masa es una magnitud siempre positiva, el coeficiente ½ también, claro está; y por último, el término v^2, que también lo es por ser un valor elevado a un exponente par, que como bien conocemos, da siempre un valor positivo.

Por lo tanto se trata del producto de tres factores positivos que dan, lógicamente otro valor siempre positivo.

a2) La situación es ahora muy diferente, puesto que en la definición de energía potencial, $E_P = mgh$, el factor h indica la altura respecto a un nivel o punto de referencia al que se le asigna el valor cero. En este sentido, si el objeto se halla a una altura superior a ese nivel, el valor de h será positivo, por lo que se tratará del producto de tres factores positivos, la masa, le módulo de la aceleración de la gravedad, y la propia altura. Sin embargo, en el caso en el que el cuerpo se encuentre por debajo de ese "nivel cero", h adoptará valores negativos, por lo que la energía potencial será negativa.

Los significados físicos de una energía potencial positiva y otra negativa son muy diferentes:

Si el valor es positivo, será el campo gravitatorio quien realizará la fuerza necesaria para llevar al cuerpo hasta el punto de referencia o nivel cero. Por el contrario, si la energía potencial es negativa, seremos nosotros (fuerza externa al campo), quienes habremos de realizar la fuerza para llevar la masa hasta el sistema de referencia, en contra del campo gravitatorio.

Solución:

b) ¿Siempre se cumple que: $\Delta E_C = -\Delta E_P$?
La respuesta es negativa
Precisamente esa es la característica que debe cumplir todo campo de fuerzas conservativo. Recordemos que estas fuerzas conservativas son aquellas que realizan un trabajo nulo al completar un ciclo cerrado (el cuerpo parte de una posición inicial para, por cualquier camino, retornar de nuevo a esta).

Si no todas las fuerzas que actúan son conservativas, como por ejemplo cuando aparecen rozamientos, la expresión $\Delta E_C = -\Delta E_P$ no se cumple. Si se cumple, lógicamente, el principio de conservación de la energía:

$$\left.\begin{array}{l} W_T = W_{CONS} + W_{NO\,\mathrm{CONS}} = \Delta E_K \\ W_{CONS} = -\Delta E_P \end{array}\right\} \rightarrow -\Delta E_P + W_{NO\,\mathrm{CONS}} = \Delta E_K \rightarrow W_{NO\,\mathrm{CONS}} = \Delta E_K + \Delta E_P$$

$$W_{NO\,\mathrm{CONS}} = \Delta E_M$$

4. Una partícula se mueve bajo la acción de una sola fuerza conservativa. El módulo de su velocidad decrece inicialmente, pasa por cero momentáneamente y más tarde crece.
   a) Ponga un ejemplo real en el que se observe este comportamiento.
   b) Describa la variación de la energía potencial y de la energía mecánica de la partícula durante ese movimiento.

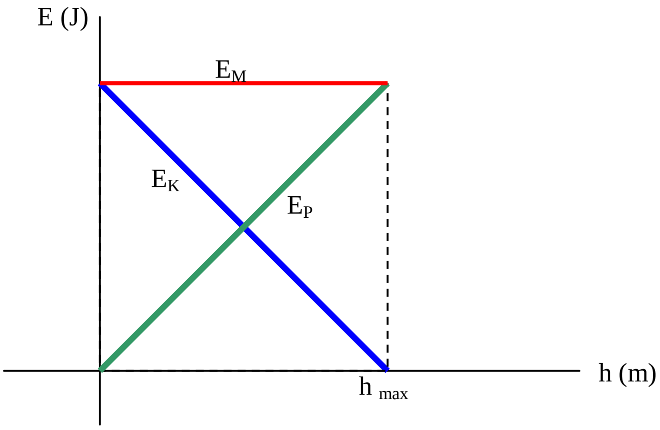
Solución:

Datos:
Fuerza Conservativa
$v_0 \downarrow \rightarrow 0 \rightarrow v \uparrow$

Incógnitas:
a) ¿Ejemplo?
b) Descripción ΔE_P, ΔE_M

a) El ejemplo más evidente es el de un lanzamiento vertical y hacia arriba suponiendo una atmósfera vacía, para descartar la presencia de fricciones (rozamientos) con el aire. El objeto se lanza con una velocidad inicial (valor máximo), y asciende. A medida que va ascendiendo, pierde velocidad, hasta que, para una determinada altura, su velocidad se anula; es el punto de máxima altura. Posteriormente, el móvil inicia su camino de vuelta, aumentando su velocidad a medida que desciende, hasta que, a nivel del suelo, alcanza de nuevo su velocidad máxima.
La única fuerza existente es la fuerza gravitatoria terrestre, de carácter conservativo, con lo que se cumple: $\Delta E_M = 0 \rightarrow \Delta E_K = -\Delta E_P$

b) Como ya se ha indicado, la energía mecánica se mantiene constante en todo el proceso; tal y como indica la fórmula arriba expuesta, las variaciones de energía cinética se corresponden con variaciones opuestas de energía potencial. Es decir, que cualquier aumento de energía cinética se produce por una disminución de igual valor en la energía potencial (y viceversa). Esto puede analizarse en el siguiente gráfico:



5. Un cuerpo de 10 kg se lanza con una velocidad de 30 ms^{-1} por una superficie horizontal lisa hacia el extremo libre de un resorte horizontal, de constante elástica 200 Nm^{-1}, fijo por el otro extremo.
   a) Analice las variaciones de energía que tienen lugar a partir de un instante anterior al impacto con el resorte y calcule la máxima compresión del muelle.
   b) Discuta en términos energéticos las modificaciones relativas al apartado a) si la superficie horizontal tuviera rozamiento.

Solución:

Datos:
m=10 Kg
v_0=30 $m.s^{-1}$
K=200 $N.m^{-1}$

Incógnitas:
a) Variaciones de energía (ΔE). Valor máxima compresión (Δx)
b) Y si hubiera rozamiento, como cambian las consideraciones?

a)

Vamos a analizar en primer lugar cada uno de los cuerpos que constituyen el sistema muelle-cuerpo: El resorte se halla en reposo y ninguna fuerza actúa sobre él. En cuanto al cuerpo, este va dotado de una velocidad inicial, y se desplaza hacia el muelle sobre una superficie sin rozamiento. Se trata de un sistema en el que todas las fuerzas son conservativas.
En el momento de la compresión, la energía cinética del cuerpo irá disminuyendo, y será transferida al muelle en forma de energía potencial elástica. El punto de máxima compresión se producirá, en términos energéticos, cuando toda la energía cinética que tenía el cuerpo antes de alcanzar al muelle se haya transformado en energía potencial elástica.
Si, como hemos dicho, se trata de una situación en la que todas las fuerzas existentes son conservativas, se cumple:

$$\Delta E_K = -\Delta E_{PE} \rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(\frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - 0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 \rightarrow mv_0^2 = K(\Delta x)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{mv_0^2}{K}} = \sqrt{\frac{10.30^2}{200}} = \sqrt{45} = \boxed{6'71\,m}$$

b) Al considerar rozamientos, la situación cambia, puesto que la ecuación:

$$\Delta E_K = -\Delta E_{PE}$$

Deja de ser válida, pues, recordemos, la fuerza de rozamiento no posee carácter conservativo (el trabajo realizado por esta fuerza varía en función de la trayectoria recorrida). Sin embargo, sí se cumple la conservación de la energía total:

$$W_{ROZ} = \Delta E_K + \Delta E_P \rightarrow W_{ROZ} = (0 - \frac{1}{2}mv_0^2) + (\frac{1}{2}K(\Delta x)^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{ROZ} = (0 - \frac{1}{2}mv_0^2) + (\frac{1}{2}K(\Delta x)^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{ROZ} = \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Si recordamos que $W_{ROZ} = F_{ROZ}.\Delta x.\cos 180^{o} = -F_{ROZ}.\Delta x$
Con lo que:

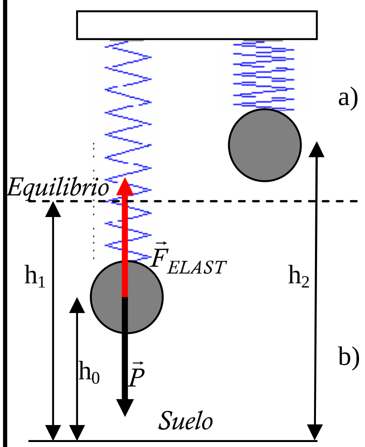
$$W_{ROZ} = \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow -F_{ROZ}.\Delta x = \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

6. Un bloque de masa m cuelga del extremo de un resorte de masa despreciable, vertical y fijo por su extremo superior.
   a) Indique qué fuerzas actúan sobre la partícula explicando si son o no conservativas.
   b) Se tira del bloque hacia abajo y se suelta, de modo que oscila verticalmente. Analice las variaciones de energía cinética y potencial del bloque y del resorte en una oscilación completa.

Solución:

Datos:
Masa =m

Incógnitas:
a) Fuerzas que actúan. ¿Conservativas?
b) Al tirar y soltar, explicar variaciones de energía



a) El peso ($\vec{P}$) es una fuerza conservativa, dirigida hacia el centro de la Tierra.
La fuerza elástica del muelle ($\vec{F}_{ELAST}$) también es conservativa.
Para ambos casos, los trabajos realizados por las respectivas fuerzas en una trayectoria cerrada son nulos. O, de otro modo, los trabajos realizados por estas fuerzas no dependen del camino elegido, sino tan sólo de las posiciones inicial y final.

b) Al tirar hacia abajo, el bloque disminuye su energía potencial, puesto que disminuye su altura respecto del suelo. Por su parte, el muelle sufre una variación contraria: aumenta su energía potencial elástica.

Al soltar el objeto y quedar libre el sistema, el objeto comienza a incrementar su energía cinética, a cambio, en virtud del teorema de conservación de la energía, de un decrecimiento de la energía potencial elástica del resorte.

La situación continúa hasta llegar el muelle a alcanzar de nuevo su longitud inicial, momento en el que la energía cinética del objeto es máxima, y, por el contrario, resulta mínima (nula) la energía potencial elástica del muelle.

Sin embargo la situación no finaliza ahí, porque el muelle volverá a incrementar su E_{PE}, puesto que ahora comenzará a comprimirse; simultáneamente, la E_K del objeto volverá a decrecer. La situación seguirá hasta que esta última se anule; se producirá, además, un aumento en la energía potencial del objeto.

Si analizamos matemáticamente las tres situaciones:

Estiramiento máximo (posición inicial):

$$E_{M,0} = E_{P,0} + E_{PE,0}$$

Vuelta al equilibrio:

$$E_{M,1} = E_{P,1} + E_{K,1} \qquad (E_{PE,1} = 0)$$

Compresión máxima:

$$E_{M,2} = E_{P,2} + E_{PE,2} \qquad (E_{K,2} = 0)$$

Por el principio de conservación de la energía, y por ser todas conservativas:

$$E_{M,0} = E_{M,1} = E_{M,2}$$

$$E_{P,0} + E_{PE,0} = E_{P,1} + E_{K,1} = E_{P,2} + E_{PE,2}$$

7. Un bloque de 5 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal mientras se le aplica una fuerza de 10N, paralela a la superficie.
   a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y explique el balance trabajo - energía en un desplazamiento del bloque de 0'5 m.
   b) Dibuje en otro esquema las fuerzas que actuarían sobre el bloque si la fuerza que se le aplica fuera de 30N en una dirección que forma 60º con la horizontal, e indique el valor de cada fuerza. Calcule la variación de energía cinética del bloque en un desplazamiento de 0'5m.

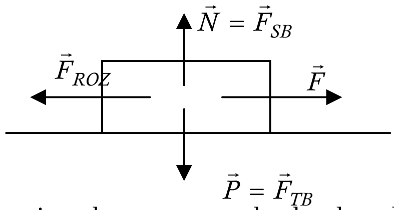
   $g = 10\ m/s^2$

Solución:

Datos:
m= 5 Kg
F=10 N
Δs=0´5 m
F´=30 N (α=30º)
Δs´ =0´5 m
$g=10\ m.s^{-2}$

Incógnitas:
a) Esquema Fuerzas. Balance trabajo-energía
b) Esquema fuerzas

a)



, donde: $\vec{F}_{TB}$ es la fuerza que ejerce la Tierra sobre el bloque, y $\vec{F}_{SB}$ la fuerza que ejerce la superficie del suelo sobre el bloque.

En primer lugar veamos el valor de cada fuerza:

$$\begin{cases} P = \vec{F}_{TB} = -m.g.\vec{j} = -5.10.\vec{j} = -50\vec{j}N \\ \vec{N} = \vec{F}_{SB} = -\vec{P} = 50\vec{j}N \\ F_{ROZ}\ ? \end{cases}$$

Puesto que el bloque se desplaza con velocidad constante, $F= F_{ROZ}$; de este modo la aceleración será nula. La fuerza aplicada debe ser la justa para compensar la fuerza de rozamiento entre las superficies del bloque y del suelo.

El trabajo realizado por cada una de las fuerzas indicadas en el esquema será:

$$\begin{cases} W_{PESo} = \mathrm{P}.\Delta\mathrm{x}.\cos 90 = mg\Delta\mathrm{x}.\cos 90 = 0\ \mathrm{J} \\ W_{NORMAL} = N.\Delta\mathrm{x}.\cos 90 = mg\Delta\mathrm{x}.\cos 90 = 0\ \mathrm{J} \quad (\text{en este caso } \mathrm{N} = \mathrm{P}) \\ \mathrm{W_F} = F.\Delta x.\cos 0 = F.\Delta x = 10.0\acute{}5 = 5J \end{cases}$$

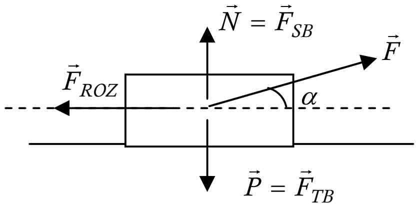
En cuanto al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, deberá ser el mismo que el realizado por la fuerza pero de signo contrario, es decir:

$$W_{ROZ} = -F.\Delta x = -5J$$

Lo razonado resulta más claro si añadimos que el trabajo realizado por la fuerza se invierte en vencer al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, por lo que ambos deberán ser iguales.

Respecto a las variaciones de energía, no se producen, puesto que, por un lado, el móvil se desplaza con velocidad constante, por lo que también lo será en todo momento la energía cinética, y, por otro, el desplazamiento se produce en un plano horizontal, por lo que tampoco existirán variaciones en la energía potencial.

b)



El enunciado sigue estableciendo que el móvil se desplaza a velocidad constante, por lo tampoco se producirán variaciones de energía cinética ni de energía potencial.

Las fuerzas que actúan en este caso son:

$$\begin{cases} \vec{P} = \vec{F}_{TB} = -m.g.\vec{j} = -5.10.\vec{j} = -50.\vec{j}N \\ \vec{N} = \vec{F}_{SB} = (P - F.sen\alpha).\vec{j} = (50 - 30.sen60).\vec{j} = 24'01.\vec{j}N \\ \vec{F}_X = F.\cos\alpha.\vec{i} = 30.\cos60\vec{i} = 15\vec{i}N \\ \vec{F}_Y = F.sen\alpha.\vec{j} = 30.sen60.\vec{j} = 25'98.\vec{j}N \\ \vec{F}_{ROZ} = -15.\vec{i}N \text{ (Puesto que la fuerza neta horizontal debe ser nula, ya que a = 0 (v = cte)} \end{cases}$$

Los trabajos realizados por cada una de las fuerzas serán:

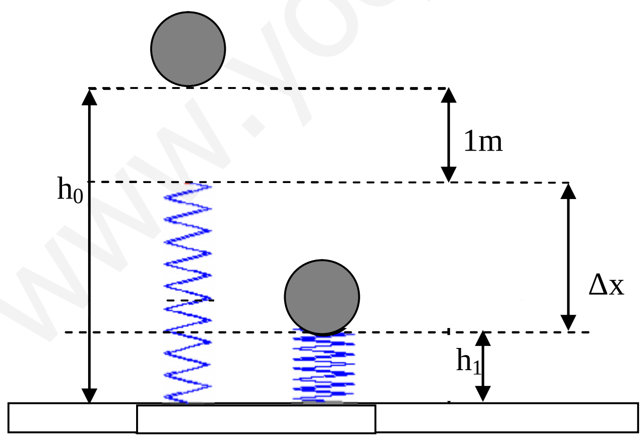
$$\begin{cases} W_{PESo} = P.\Delta x.\cos90 = mg\Delta x.\cos90 = 0\text{ J} \\ W_{NORMAL} = N.\Delta x.\cos90 = (mg - F.sen\alpha).\Delta x.\cos90 = 0\text{ J} \quad \text{(en este caso N + F.sen}\alpha = \text{P)} \\ W_F = F.\Delta x.\cos 60 = F.\Delta x = 30.0'5.\cos 60 = 7'5J \end{cases}$$

8. Un cuerpo de 0'5 kg se encuentra inicialmente en reposo a una altura de 1 m por encima del extremo libre de un resorte vertical, cuyo extremo inferior está fijo. Se deja caer el cuerpo sobre el resorte y después de comprimirlo, vuelve a subir. El resorte tiene una masa despreciable y una constante elástica K = 200 $N.m^{-1}$
   a) Haga un análisis energético del problema y justifique si el cuerpo llegará de nuevo al punto de partida.
   b) Calcule la máxima compresión que experimenta el resorte.
   g = 10 m/s^2 g = 10 m/s^2

Solución:

Datos:
m=0´5 Kg
L=1m (sobre resorte)
K=200$N.m^{-1}$

Incógnitas:
a) Análisis energético. ¿Llegará al punto de lanzamiento?
b) Compresión máxima.



a)

El cuerpo posee inicialmente una energía potencial gravitatoria $E_{PG,0} = mgh_0$. Al soltarlo este comienza a caer; en su caída se produce una transferencia de energía potencial a energía cinética, como consecuencia lógica de la pérdida de altura y ganancia en velocidad.
Al impactar con el muelle la energía potencial y cinética que tienen en ese instante van a ir transformando en energía potencial elástica del resorte. Por ello, la pérdida de altura, junto a la pérdida de velocidad, que suponen pérdidas en los valores E_k y E_{PG} a costa de un incremento de la E_{PE} del resorte, como ya hemos indicado.

Puesto que el objeto, situado sobre el muelle, no llega al suelo, dispondrá aún de cierta cantidad de energía en forma de energía potencial gravitatoria.
Al no existir rozamientos, la energía mecánica del sistema deberá ser una magnitud constante a lo largo de todo el proceso. Por tanto, al no haber pérdidas energéticas, en el retorno la bola regresará al punto de partida inicial.

b) En este sentido, las energías en cada uno de estos tres instantes será:
Al soltar la bola:

$$\left.\begin{cases} E_{MUELLE,0} = 0 \\ E_{BLOQUE,0} = E_{PG,0} = mgh_0 \end{cases}\right\} \rightarrow E_{MEC,0} = mgh_0$$

Al llegar la bola al muelle:

$$\left.\begin{cases} E_{MUELLE,1} = 0 \\ E_{BLOQUE,1} = E_{PG,1} + E_{K,1} = mg(h_0 - 1) + \frac{1}{2}mv_1^2 \end{cases}\right\} \rightarrow E_{MEC,1} = mg(h_0 - 1) + \frac{1}{2}mv_1^2$$

En el punto más bajo, de máxima compresión:

$$\left.\begin{cases} E_{MUELLE,2} = \frac{1}{2}K.(\Delta x)^2 \\ E_{BLOQUE,2} = E_{K,2} = mgh_1 \end{cases}\right\} \rightarrow E_{MEC,2} = mgh_1 + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 = mg(h_0 - 1 - \Delta x) + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2$$

b) puesto que no hay rozamiento, como ya se ha dicho,

$$E_{MEC,0} = E_{MEC,1} = E_{MEC,2}$$

La máxima compresión la obtendremos igualando la primera y tercera de las expresiones:

$$mgh_0 = mg(h_0 - 1 - \Delta x) + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 \rightarrow mgh_0 = mgh_0 - mg - mg\Delta x + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - mg\Delta x - mg = 0 \rightarrow K(\Delta x)^2 - 2mg\Delta x - 2mg = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta x = \frac{2mg \pm \sqrt{(2mg)^2 - 4.K.(-2mg)}}{2K} = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 + 8Kmg}}{2K} = \begin{cases} 0'25m \\ -0'2m \end{cases}$$

9. a) ¿Qué se entiende por fuerza conservativa? ¿Y por energía potencial?. Indique algunos ejemplos de fuerzas conservativas y no conservativas.
b) ¿Puede un mismo cuerpo tener más de una forma de energía potencial? Razone la respuesta aportando algunos ejemplos.

Solución:

Datos:

Incógnitas:

a) Fuerza conservativas : Es toda fuerza que, producida a lo largo de una trayectoria cerrada, realiza un trabajo total nulo. Es decir:

$$\vec{F}_{CONSERVATIVA} \Rightarrow W = \oint \vec{F}.d\vec{r} = 0$$

Energía potencial: Se trata de una función de estado (que depende únicamente de la posición en la que se encuentra el cuerpo y de la masa de ese cuerpo, para el caso de E_{PG}, o de la posición y de las características propias del resorte, la constante recuperadora, para el caso de $E_{PE.}$

$$W_{CONS} = \int_A^B \vec{F}_{CONS}.d\vec{r} = -(E_{P2} - E_{P1}) = -\Delta E_P$$

La energía potencial gravitatoria equivale al trabajo que una fuerza conservativa (fuerza de atracción gravitatoria realiza para llevar la unidad de masa desde el infinito (donde E_{PG}=0) hasta el punto considerado. Siempre tiene un valor negativa, y su valor es $E_{PG} = -\dfrac{GMm}{R}$, expresión que, para el caso en el que nos encontremos en la superficie terrestre, adopta la conocida forma de $E_{PG} = mgh$

Donde:

$$\begin{cases} G = \text{constante de gravitación universal} = 6{'}67.10^{-11}\, N.m^2.Kg^{-2} \\ M = \text{masa cuerpo 1 (Kg)} \\ \text{m} = \text{masa cuerpo2 (Kg)} \\ \text{R} = \text{distancia que separa M de m (en metros)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{m} = \text{masa cuerpo (Kg)} \\ \text{g} = \text{aceleración de la gravedad terrestre en la superficie (g} = 9{'}81\text{m.s}^{-2}) \\ \text{h} = \text{altura sobre el suelo (en metros)} \end{cases}$$

Por su parte, la E_{PE} equivaldrá al trabajo que deberá realizara la fuerza conservativa (fuerza elástica) para producir una deformación Δx. Su valor viene dado por:

$$E_{PE} = \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 \text{, siendo}$$

$$\begin{cases} K = \text{constante recuperadora del cuerpo elástico (N.m}^{-1}) \\ \Delta x = \text{valor de la deformación (estiramiento o compresión, en metros)} \end{cases}$$

Como ejemplos de fuerzas conservativas, ya hemos mencionado la fuerza de atracción gravitatoria y la fuerza elástica, y como ejemplos de fuerzas no conservativas, las fuerzas de rozamiento o fricción.

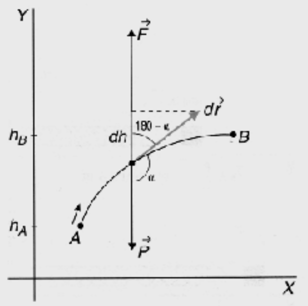
b) Desde luego que si. Un cuerpo puede poseer a la vez energía potencial gravitatoria y energía potencial elástica, como sucede con un resorte colgado del techo a cierta altura y que sufre un movimiento de oscilación (compresiones y estiramientos)
Otra posibilidad sería la posesión, por parte de un cuerpo, de energía potencial eléctrica y energía potencial gravitatoria. El ejemplo a esto podría ser un cuerpo eléctricamente cargado situado a determinada altura con respecto al suelo

10. Comente las siguientes frases: a) la energía mecánica de una partícula permanece constante si todas las fuerzas que actúan sobre ella son conservativas, b) si la energía mecánica de una partícula no permanece constante, es porque una fuerza disipativa realiza trabajo.

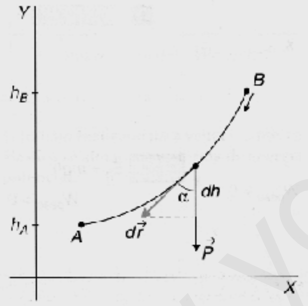
Solución:

Datos:	**Incógnitas:**

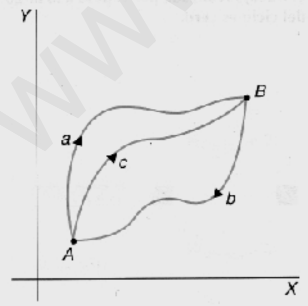
a) **"la energía mecánica de una partícula permanece constante si todas las fuerzas que actúan sobre ella son conservativas"**



Cuando el cuerpo asciende, el peso realiza un trabajo negativo.



Cuando el cuerpo desciende, el peso realiza un trabajo positivo.



El trabajo realizado por las fuerzas conservativas no depende de la trayectoria seguida.

Se trata, efectivamente, del principio de conservación de la energía mecánica, válido para el caso en el que todas las fuerzas que actúan son conservativas.
Pero ¿qué son fuerzas conservativas? Podríamos decir que son aquellas en las que el trabajo que realizan para desplazar una partícula en un ciclo cerrado resulta nulo. Matemáticamente:

$$W_{CONSERVATIVO} = \oint \vec{F}.d\vec{r} = 0$$

Otra definición equivalente es aquella que considera que el trabajo realizado por la fuerza (conservativa) para llevar un objeto desde A hasta B no depende de la trayectoria elegida.
Un ejemplo de este tipo de fuerzas lo constituye la fuerza de atracción gravitatoria (Ver imagen izqda)
Supongamos que queremos elevar un cuerpo de masa m desde un punto A (situado a una altura hA) hasta otro B (situado a una altura hB).
Para elevar el cuerpo (Fig. superior), deberemos realizar una fuerza igual al peso, pero de sentido contrario a él ($\vec{F} = m.g.\vec{j}$). La elevación se producirá a velocidad constante (en un proceso infinitamente lento), puesto que al ser $\vec{F} = -\vec{P}$ la fuerza neta es nula y la velocidad del movimiento, como acabamos de indicar, constante. Es decir, durante la elevación no se produce cambio en la energía cinética.
El trabajo realizado por el peso, durante la ascensión, vendrá dado por:

$$W_{PESO} = \int_A^B \vec{P}.d\vec{r} = \int_A^B m.\vec{g}.d\vec{r} = \int_A^B m.g.dr.\cos\alpha$$

(Ver figura superior)

Pero si miramos el dibujo, $\cos\alpha = \cos(180-\alpha)$, y $dh = dr.\cos(180-\alpha) = -dr.\cos\alpha$

Por lo tanto, siguiendo con la integral:

$$W_{PESO} = -\int_A^B m.g.dh = -m.g.(h_B - h_A) = -m.g.h$$

(indicando el signo negativo que el peso y el desplazamiento son de distinto signo).
Cuando el cuerpo cae en un proceso infinitamente lento, aplicando hacia arriba la fuerza estrictamente necesaria para que el cuerpo no acelere en su caída (velocidad constante), el trabajo realizado por el peso será:

$$W_{PESO} = \int_B^A \vec{P}.d\vec{r} = \int_B^A m.\vec{g}.d\vec{r} = \int_B^A m.g.dr.\cos\alpha$$

Pero si miramos de nuevo el dibujo central, $dh = dr.\cos\alpha$

$$W_{PESO} = \int_B^A m.g.dh = m.g.(h_A - h_B) = m.g.h$$

, positivo en este caso por ser el peso y el desplazamiento del mismo signo.

Sumando ahora el trabajo realizado en todo el ciclo,

$$W_{A\to B} + W_{B\to A} = -mgh + mgh = 0$$

Como vemos:

- $W_{A\to B} = -W_{B\to A}$, independientemente de la trayectoria elegida
- $W_{A\to B} + W_{B\to A} = 0 \to W_{TOTAL}(PESO) = \oint \vec{P}.d\vec{r} = 0$
- $W_{A\to B}$ puede ser definido como la diferencia entre dos cantidades que dependen de la posición del cuerpo (además de depender de su masa):
  $W_{A\to B} = -(mgh_B - mgh_A)$
  , donde cada uno de los términos mgh se denomina energía potencial (gravitatoria), que solo puede ser definido para fuerzas conservativas. Entonces:
  $W_{A\to B} = -\Delta E_P$

Una vez definido el concepto de fuerza conservativa, seguiremos nuestro comentario:
Si el cuerpo **m** posee en el punto A una velocidad v_A y en el punto B otra diferente v_B , el trabajo realizado sobre la partícula será igual, según el teorema de las fuerzas vivas, a:

$$W_{A\to B} = \Delta E_K$$

Por tanto, si: $\left.\begin{cases} W_{A\to B} = -\Delta E_P \\ W_{A\to B} = \Delta E_K \end{cases}\right\} \to -\Delta E_P = \Delta E_K \to \Delta E_P + \Delta E_K = 0 \to$

$$\left(E_{P2} - E_{P1}\right) + \left(E_{K2} - E_{K1}\right) = 0 \to \left(E_{P2} + E_{K2} -\right) - \left(E_{P1} + E_{K1}\right) = 0 \to$$
$$\to E_{M2} - E_{M1} = 0 \to E_{M2} = E_{M1} \to \Delta E_M = 0$$

, como queríamos demostrar

b) **“si la energía mecánica de una partícula no permanece constante, es porque una fuerza disipativa realiza trabajo”**

Si existen fuerzas no conservativas, como la fuerza de rozamiento:

$$W_{TOTAL} = W_{CONSERVATIVO} + W_{NO\ CONSERVATIVO} = \Delta E_K$$

, según el teorema de las fuerzas vivas

Pero, como ya hemos indicado en el apartado anterior:

$$W_{CONSERVATIVO} = -\Delta E_P$$

Por lo tanto

$$W_{CONSERVATIVO} + W_{NO\ CONSERVATIVO} = \Delta E_K \rightarrow -\Delta E_P + W_{NO\ CONSERVATIVO} = \Delta E_K \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{NO\ CONSERVATIVO} = \Delta E_K + \Delta E_P$$

11. Un bloque de 0,2 kg, inicialmente en reposo, se deja deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Tras recorrer 2 m, queda unido al extremo libre de un resorte, de constante elástica 200 N m^{-1}, paralelo al plano y fijo por el otro extremo. El coeficiente de rozamiento del bloque con el plano es 0,2.

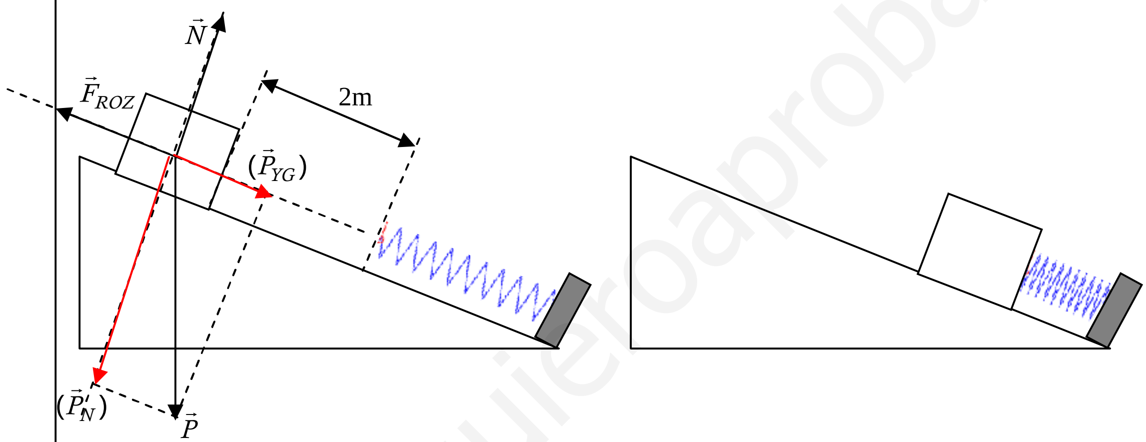
    a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando comienza el descenso e indique el valor de cada una de ellas. ¿Con qué aceleración desciende el bloque?

    b) Explique los cambios de energía del bloque desde que inicia el descenso hasta que comprime el resorte y calcule la máxima compresión de éste. g = 10 m s^{-2}

Solución:

Datos:
m= 0´2 Kg
v_0=0 m.s^{-1}
α=30º
s=2m
K=200N.m^{-1}
μ=0´2

Incógnitas:
a) Esquema fuerzas. ¿aceleración bloque?
b) Variaciones de energía. Valor de máxima compresión



a) Las fuerzas que actúan sobre el objeto son tres:
   - Peso
   - Normal (fuerza que ejerce la superficie de apoyo sobre el bloque, en dirección perpendicular a la superficie)
   - Fuerza de rozamiento, que se opone al movimiento

   Pero será de mucha utilidad descomponer el peso en dos componentes tales que una de ellas tenga la dirección del desplazamiento $(\vec{P}_{TG})$, y la otra, la dirección de la fuerza normal $(\vec{P}_N)$. Así:

   $P = mg = 0'2.10 = 2N$

   Las componentes del peso serán :

   $$\begin{cases} P_{TG} = P.sen\alpha = m.g.sen\alpha \\ P_N = P.\cos\alpha = mg.\cos\alpha \end{cases}$$

   El valor de la fuerza normal tendrá el mismo módulo que P_N, igual dirección, pero sentido contrario. Por lo tanto:

   $N = mg.\cos\alpha$

   $F_{ROZ} = \mu.N$ (EN LA DIRECCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO, PERO EN CONTRA DEL MOVIMIENTO

   $F_{ROZ} = \mu.mg.\cos\alpha$

Los valores de P, N y F_{ROZ} serán:

$$\begin{cases} P = mg = 0\text{´}2.10 = 2N \\ N = mg.\cos\alpha = 0\text{´}2.10.\cos 30 = 1\text{´}73N \\ F_{ROZ} = \mu N = 0\text{´}2.0\text{´}2.10.\cos 30 = 0\text{´}35N \end{cases}$$

Puesto que el bloque desliza por el plano,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ROZ} = m\vec{a}$$

Las fuerzas perpendiculares al desplazamiento ($\vec{N}, \vec{P}_N$) son iguales en módulo, dirección, pero de sentido contrario; por lo tanto, se anulan entre sí.

(Recordemos en este momento que $\vec{N}, \vec{P}_N$ no son fuerzas de acción y reacción; la fuerza peso se produce como resultado de la interacción OBJETO-TIERRA, por lo que su reacción se produce en el centro del planeta. Por su parte, la fuerza normal se produce como consecuencia de la interacción entre las superficies de bloque y plano).

Nos quedan, pues, las fuerzas de igual dirección que el desplazamiento. Matemáticamente:

$$\sum F_{FAVOR} - \sum F_{CONTRA} = ma \qquad \text{(expresión escalar)}$$

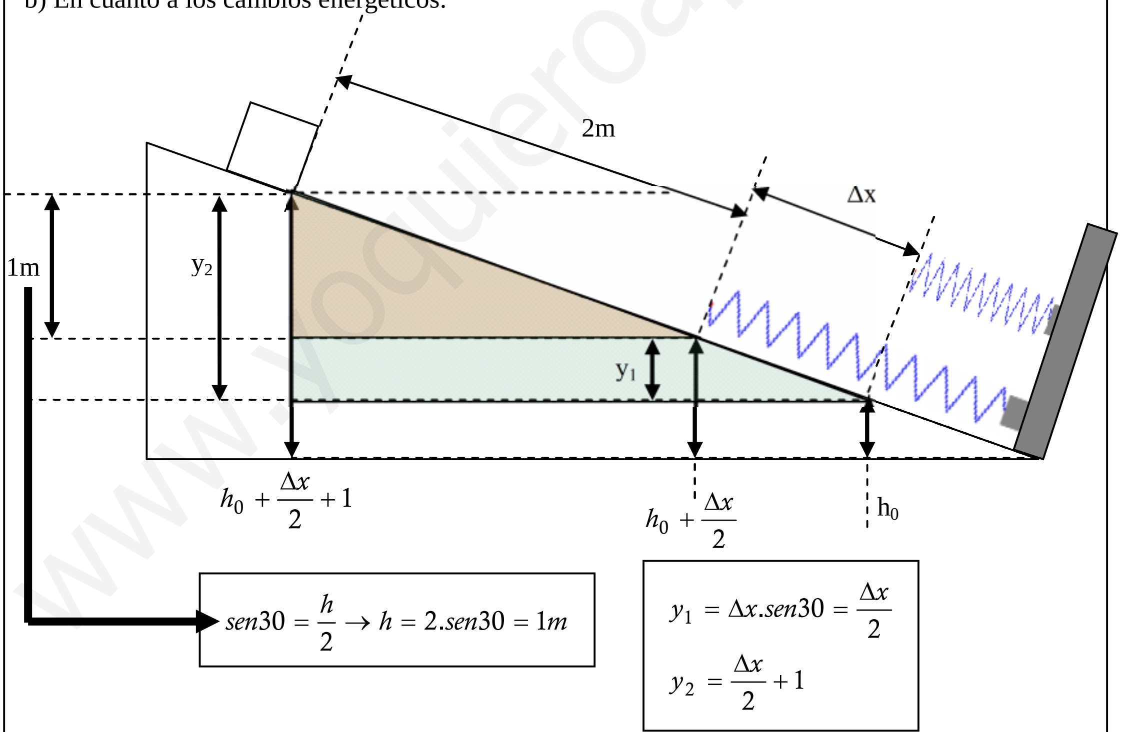
$$P_{TG} - F_{ROZ} = ma \rightarrow mg.sen\alpha - \mu mg.\cos\alpha = ma \rightarrow$$

$$\rightarrow g.sen\alpha - \mu g.\cos\alpha = a$$

Sustituyendo :

$$a = 10.sen30 - 0\text{´}2.10.\cos 30 = 3\text{´}27 m.s^{-1}$$

b) En cuanto a los cambios energéticos:



- Comencemos analizando la situación inicial, en la que el objeto está en reposo en su altura máxima ($h_0+1+\frac{\Delta x}{2}$). Por tanto posee cierta energía potencial gravitatoria, pero su energía cinética es nula, por encontrarse en reposo. Por su parte, el resorte no se halla deformado, por lo que tampoco existe energía potencial elástica. Así:

$$E_{M0} = E_{PG,0} = mg(h_0 + 1 + \frac{\Delta x}{2})$$

El momento en el que el objeto va a chocar contra el muelle será nuestra segunda posición. El objeto se halla a una menor altura, por lo que su contenido de energía potencial gravitatoria habrá disminuido, pero habrá adquirido velocidad (que será máxima en ese momento), por lo que tendrá asociado cierto valor de energía cinética. El resorte aún no ha comenzado a comprimirse. Por lo tanto:

$$E_{M1} = E_{PG,1} + E_{K1} = mg\left(h_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2}mv_1^2$$

Por último, en el momento en el que el objeto se detiene (energía cinética nula), este se encontrará aún a determinada altura; además el muelle se hallará en su máxima compresión. La energía potencial gravitatoria del objeto se ha visto reducida, al igual que su energía cinética (nula ahora). Esas cantidades de energía "perdidas" por el bloque han sido transferidas al muelle, y han sido acumuladas por este en forma de energía potencial elástica. De este modo:

$$E_{M2} = E_{PG,2} + E_{PE,2} = mgh_0 + \frac{1}{2}K.(\Delta x)^2$$

Para determinar el valor de la compresión hemos de tener en cuenta que existen pérdidas de energía por las fuerzas de rozamiento, fuerzas que, recordemos no son conservativas.
Debido a esta circunstancia, no se cumple:

$$\Delta E_K + \Delta E_P = 0$$

, sino esta otra:

$$\Delta E_K + \Delta E_P = W_{ROZ} \quad \text{(CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA)}$$

Así, tomando como situaciones la inicial y la final (olvidemos la intermedia):

(☺)

$$(E_{K2} - E_{K0}) + (E_{PG2} - E_{PG0}) + (E_{PE2} - E_{PE0}) = W_{ROZ} \to$$

$$\to \left(mgh_0 + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2\right) - \left[mg\left(h_0 + \frac{\Delta x}{2} + 1\right)\right] = F_{ROZ}.(2+\Delta x).\cos 180 \to$$

$$\to mgh_0 + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - mgh_0 - mg\frac{\Delta x}{2} - mg = -F_{ROZ}.(2+\Delta x) \to$$

$$\to \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - mg\frac{\Delta x}{2} - mg = -\mu.N.(2+\Delta x) \to$$

$$\to \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - mg\frac{\Delta x}{2} - mg = -\mu..m.g.\cos\alpha.(2+\Delta x) \to$$

Sustituyendo :

$$\frac{1}{2}.200.(\Delta x)^2 - 0'2.9'8.\frac{\Delta x}{2} - 0'2.9'8 = -0'2.0'2.9'8.\cos 30.(2+\Delta x) \to$$

$$\to 100.(\Delta x)^2 - 0'98\Delta x - 1'96 = -0'34.(2+\Delta x) \to 100.(\Delta x)^2 - 0'98\Delta x - 1'96 = -0'68 - 0'34.\Delta x -$$

$$\to 100.(\Delta x)^2 - 0'64\Delta x - 1'28 = 0$$

$$\textit{Soluciones}: \begin{cases} \Delta x = 0'121m \\ \Delta x = -0'108m \ \text{(sin significación física)} \end{cases}$$

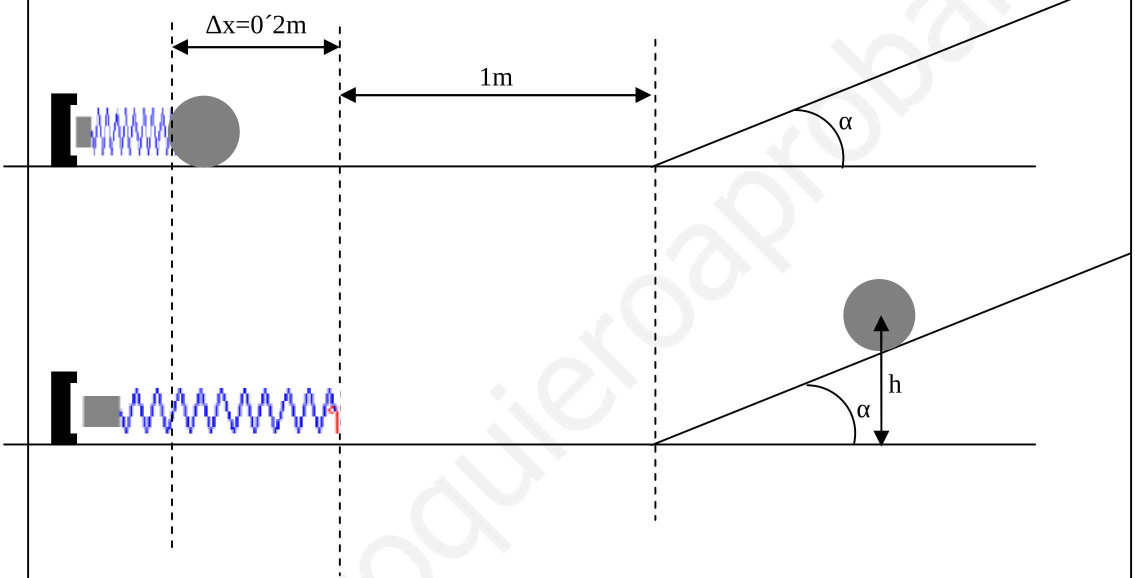
12. Un bloque de 2 kg está situado en el extremo de un muelle, de constante elástica 500 $N.m^{-1}$, comprimido 20 cm. Al liberar el muelle el bloque se desplaza por un plano horizontal y, tras recorrer una distancia de 1 m, asciende por un plano inclinado 30º con la horizontal. Calcule la distancia recorrida por el bloque sobre el plano inclinado.
    a) Supuesto nulo el rozamiento.
    b) Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y los planos es de 0,1.

Tomar g = 10 $m.s^{-2}$

Solución:

Datos:
m=2Kg
$K=500N.m^{-1}$
$\Delta x=0´2m$
s=1m
α=30º
(μ=0´1)
$g=10m.s^{-2}$

Incógnitas:
a) ¿distancia recorrida? (sin rozamiento)
b) ¿distancia recorrida? (con rozamiento)



a) Sin rozamiento:

Por tratarse de una situación en la que todas las fuerzas son de naturaleza conservativa, se cumple la conservación de la energía mecánica. Por lo tanto, bastará con comparar las situaciones inicial y final, e igualarlas.

- Situación inicial. El muelle se halla comprimido, en tanto que el cuerpo se encuentra en reposo. El balance energético para la energía mecánica será:

$$E_{M1} = E_{PE,1} = \frac{1}{2}K.(\Delta x)^2$$

- Situación final. El objeto ha alcanzado su máxima altura, y, claro está, se encuentra parado (durante ese instante). Por su parte, el muelle está en posición de equilibrio. Así:

$$E_{M2} = E_{PG,2} = mgh$$

Ya que la energía mecánica del sistema permanece constante:

$$E_{M1} = E_{M2} \rightarrow E_{PE,1} = mgh \rightarrow \frac{1}{2}K.(\Delta x)^2 = mgh \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{K.(\Delta x)^2}{2mg} \rightarrow h = \frac{500.0´2^2}{2.2.10} = 0´5m$$

$$Pero: \qquad \text{sen}30 = \frac{0´5}{x} \rightarrow x = \frac{0´5}{\text{sen}30} = 1m \qquad \text{(recorrido sobre el plano)}$$

b) Con rozamiento:

La situación es muy diferente, puesto que al tratarse la fuerza de rozamiento de una fuerza no conservativa, no se cumple la constancia de la energía mecánica. Es decir:

$$\Delta E_M = 0$$

Sin embargo, si debe mantenerse cierto el principio general de conservación de la masa. En este caso:

$$\Delta E_K + \Delta E_P = W_{ROZ}$$

Analicemos las situaciones, tal y como se hizo en el apartado anterior.

- Situación inicial. El muelle se halla comprimido, en tanto que el cuerpo se encuentra en reposo. No hay diferencia con el caso en el que no hay rozamiento. El balance energético para la energía mecánica será:

  $$E_{M1} = E_{PE,1} = \frac{1}{2}K.(\Delta x)^2$$

- Situación final. El objeto ha alcanzado su máxima altura, y, claro está, se encuentra parado (durante ese instante). Por su parte, el muelle está en posición de equilibrio. Así:

  $$E_{M2} = E_{PG,2} = mgh$$

  Sin embargo, debido a la existencia de fuerzas de rozamiento, la conservación de la energía obliga el cumplimiento de la igualdad:

  $$\Delta E_M = W_{ROZ} \rightarrow mgh - \frac{1}{2}.K.(\Delta x)^2 = W_{ROZ1} + W_{ROZ2}$$

  $W_{ROZ1} y W_{ROZ2}$ son los trabajos realizados por las fuerzas de rozamiento en el plano horizontal y en el plano inclinado. Sus valores son:

  $$W_{ROZ1} = F_{ROZ1}.\Delta s_1.\cos 180 = -F_{ROZ1}.\Delta s_1 = -\mu.N_{1.}\Delta s_1 = -\mu..m.g\Delta s_1 = -2J$$

  $$W_{ROZ2} = F_{ROZ2}.\Delta s_2.\cos 180 = -F_{ROZ2}.\Delta s_2 = -\mu.N_{2.}\Delta s_2 =$$

  $$= -\mu..m.g.\cos 30.\Delta s_2 = -0'1.2.10.\cos 30.\Delta s_2 = -1'733.\Delta s_2 \text{ J}$$

Nos queda ahora hacer cumplir la conservación de la energía. Por tanto:

$$mgh - \frac{1}{2}.K.(\Delta x)^2 = -2 - 1'733.\Delta s_2$$

Pero, recordemos,

$$\left\{ sen30 = \frac{h}{\Delta s_2} \rightarrow h = \Delta s_2.sen30 = \frac{\Delta s_2}{2} \right.$$

$$mg\frac{\Delta s_2}{2} - \frac{1}{2}.K.(\Delta x)^2 = -2 - 1'733.\Delta s_2$$

Sustituyendo:

$$2.10\frac{\Delta s_2}{2} - \frac{1}{2}.500.(0'2)^2 = -2 - 1'733.\Delta s_2 \rightarrow 10\Delta s_2 - 10 = -2 - 1'733.\Delta s_2 \rightarrow$$

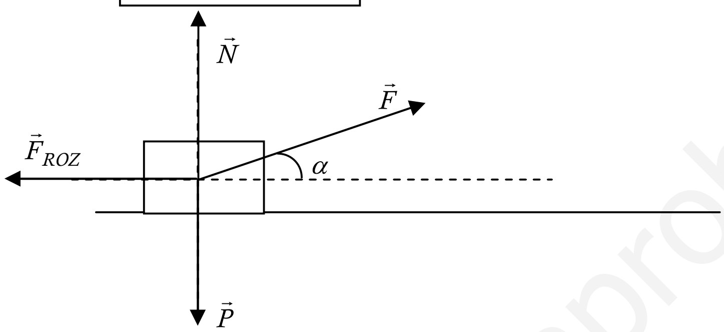
$$\rightarrow 10\Delta s_2 + 1'733.\Delta s_2 = -2 + 10 \rightarrow 11'733.\Delta s_2 = 8 \rightarrow \Delta s_2 = \frac{8}{11'733} = 0'68m$$

13. Un trineo de 100 kg desliza por una pista horizontal al tirar de él con una fuerza **F,** cuya dirección forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1.
   a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el trineo y calcule el valor de F para que el trineo deslice con movimiento uniforme.
   b) Haga un análisis energético del problema y calcule el trabajo realizado por la fuerza F en un desplazamiento de 200 m del trineo. g =10 m s $^{-2}$

Solución:

Datos:
m=100 Kg
α=30º
$\mu = 0\acute{}1$
$\Delta s = 200m$
g= 10 m.s^{-1}

Incógnitas:
a) Esquema fuerzas.
¿F? para MRU
b) Análisis energético. ¿W para Δs=200m?



a)
El sistema, como se nos indica en el enunciado, se encuentra en equilibrio dinámico, puesto que todas las fuerzas que actúan sobre él se encuentran equilibradas. Por ello:

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_X = 0 \\ \sum \vec{F}_Y = 0 \end{cases}$$

Desarrollando:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_X = 0 \rightarrow \vec{F}_x + \vec{F}_{ROZ} = 0 \rightarrow F_x - F_{ROZ} = 0 \\ \sum \vec{F}_Y = 0 \rightarrow \vec{N} + \vec{F}_y + \vec{P} = 0 \rightarrow N + F_y - P = 0 \end{cases}$$

De la segunda de las ecuaciones podemos despejar el valor de la fuerza normal (fuerza ejercida por la superficie de contacto sobre el móvil en dirección siempre perpendicular a tal superficie):

$$N + F_y - P = 0 \rightarrow N = P - F_y \rightarrow N = mg - F.sen\alpha$$

Ahora, utilizando la primera de ellas podremos determinar el valor de F; deberemos antes recordar el valor de la fuerza de rozamiento:

$$F_x - F_{ROZ} = 0 \rightarrow F.\cos\alpha - \mu N = 0$$

, y, puesto que conocemos el valor de N:

$$F.\cos\alpha - \mu N = 0 \rightarrow F.\cos\alpha - \mu(mg - F.sen\alpha) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F.\cos\alpha - \mu mg + \mu.F.sen\alpha = 0 \rightarrow F.(\cos\alpha + \mu..sen\alpha) = \mu mg \rightarrow$$

$$\rightarrow F = \frac{\mu mg}{.(\cos\alpha + \mu..sen\alpha)}$$

Sustituyendo los correspondientes valores:
F=109´17 N

b)
Comenzaremos el análisis energético haciendo referencia a los trabajos realizados por la fuerza normal y por el peso. Ambas fuerzas son perpendiculares en todo momento a la trayectoria seguida por el bloque, por lo que el trabajo que realizan es nulo, en virtud de la propia definición de trabajo:

$$W = A\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F.dr.\cos\theta = 0 \qquad (\cos 90º = 0)$$

La cuestión, pues, queda reducida a evaluar los trabajos producidos por las fuerzas F_x y F_{roz}. Pero además vamos a simplificar aún más la tarea, puesto que para el caso de movimientos rectilíneos, la integral adopta la forma:

$$W = F.\Delta r.\cos\theta$$

- **Para la fuerza F_x:**

$$W_{(F_x)} = F_x.\Delta r.\cos 0 = F_x.\Delta r \rightarrow$$
$$\rightarrow W_{(F_x)} = 200.F_x = 200.(F.\cos 30) \rightarrow$$
$$\rightarrow W_{(F_x)} = 100.F.\sqrt{3} = 18908'80\ J$$

- **Para la fuerza F_{ROZ}:**

$$W_{(F_{ROZ})} = F_{ROZ}.\Delta r.\cos 180 = -F_{ROZ}.\Delta r \rightarrow$$
$$\rightarrow W_{(F_{ROZ})} = -200.F_{ROZ} = -200.(\mu N) \rightarrow$$
$$\rightarrow W_{(F_{ROZ})} = -200.\mu.(mg - F.sen\alpha) =$$
$$= 200.0'1.(100.10 - 109'17.sen30) = 18908'3\text{ J}$$

, que, salvo por errores acumulados en las cifras decimales, dan el mismo valor, como cabía esperar, puesto que ambas fuerzas son iguales para mantener el MRU
La consideración más inmediata es que la componente de la fuerza en la dirección del movimiento realiza un trabajo para compensar la pérdida energética como consecuencia del rozamiento con la superficie.