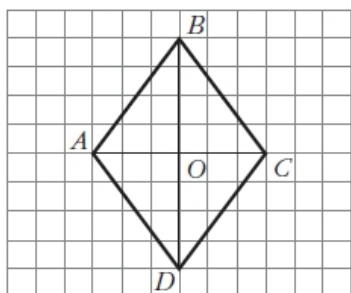


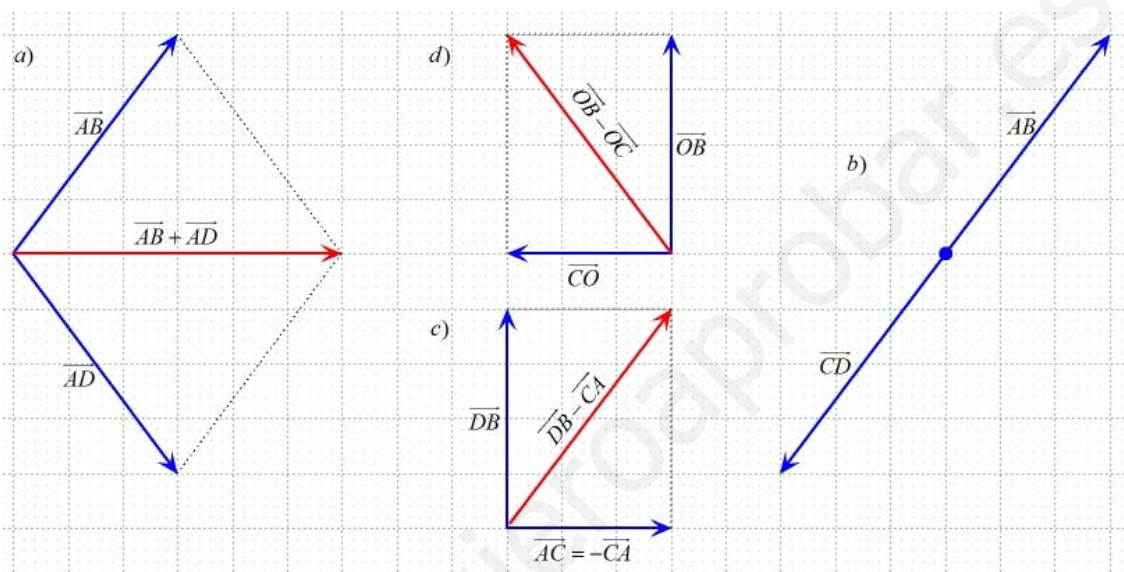
Soluciones Ficha 5.1: Geometría Analítica

1. Observa el rombo de la figura y calcula gráficamente:



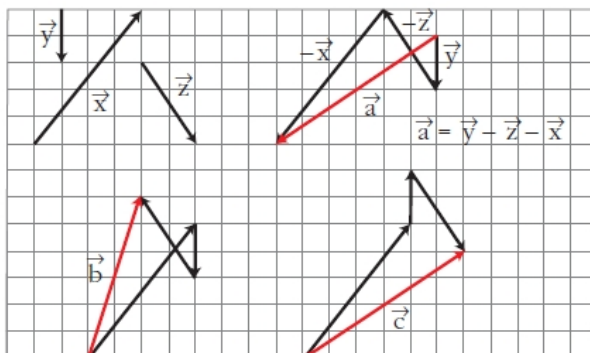
- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
- c) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$
- d) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

Suponiendo que el origen de coordenadas está en el punto O, calcula analíticamente las componentes de todos los vectores y efectúa las operaciones.



$A(-3,0)$	$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,4) \\ \overrightarrow{AD} = (3,-4) \\ \overrightarrow{CD} = (-3,4) \\ \overrightarrow{DB} = (0,8) \\ \overrightarrow{CA} = (-6,0) \\ \overrightarrow{OB} = (0,4) \\ \overrightarrow{OC} = (3,0) \end{array} \right\}$	a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (3,4) + (3,-4) = (6,0)$
$B(0,4)$		b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (3,4) + (-3,-4) = (0,0)$
$C(3,0)$		c) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} = (0,8) - (-6,0) = (6,8)$
$D(0,-4)$		d) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (0,4) - (3,0) = (-3,4)$

2. Los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} los hemos obtenido operando con los vectores \vec{x} , \vec{y} y \vec{z} . ¿Qué operaciones hemos realizado?



$$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$$

$$\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$$

3. Halla el vector \vec{u} tal que $\vec{u} = 3\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, siendo $\vec{a} = (-1, 3)$ y $\vec{b} = (9, -3)$.

$$\vec{u} = 3\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = 3(-1, 3) - \frac{1}{3}(9, -3) = (-3, 9) + (-3, 1) = (-6, 10)$$

4. Expresa el vector $\vec{a} = (1, 1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (-1, 3)$ y $\vec{v} = (9, -2)$.

$$\begin{aligned} \vec{a} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} &\Rightarrow (1, 1) = \lambda(-1, 3) + \mu(9, -2) \Rightarrow (1, 1) = (-\lambda, 3\lambda) + (9\mu, -2\mu) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1, 1) = (-\lambda + 9\mu, 3\lambda - 2\mu) \Rightarrow \begin{cases} 1 = -\lambda + 9\mu \\ 1 = 3\lambda - 2\mu \end{cases} \Rightarrow (\lambda, \mu) = \left(\frac{11}{25}, \frac{4}{25}\right) \Rightarrow \\ &\vec{a} = \frac{11}{25}\vec{u} + \frac{4}{25}\vec{v} \end{aligned}$$

5. De los siguientes conjuntos de vectores di cuáles son base de V^2 :

a) $B = \{(1, 0), (2, 1)\}$ b) $B = \{(4, 12), (3, 9)\}$

- a) Para que dos vectores en el plano formen base, basta con que dichos vectores ni sean paralelos ni proporcionales.

$$\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1} \rightarrow (1, 0) \not\parallel (2, 1) \Rightarrow \text{forman base de } V^2$$

b) $\frac{4}{3} = \frac{12}{9} \rightarrow (4, 12) \parallel (3, 9) \Rightarrow \text{no forman base de } V^2$

6. Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = (3, 4)$ respecto de las bases:

a) $B = \{(1, 0), (2, 4)\}$ b) $B = \{(2, 1), (-1, 2)\}$

a) $\vec{w} = \lambda(1, 0) + \mu(2, 4) \Rightarrow (3, 4) = \lambda(1, 0) + \mu(2, 4) \Rightarrow (3, 4) = (\lambda, 0) + (2\mu, 4\mu) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (3, 4) = (\lambda + 2\mu, 0 + 4\mu) \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda + 2\mu \\ 4 = 4\mu \end{cases} \Rightarrow (\lambda, \mu) = (1, 1) \Rightarrow$
 $\vec{w} = (1, 0) + (2, 4)$

b) $\vec{w} = \lambda(2, 1) + \mu(-1, 2) \Rightarrow (3, 4) = \lambda(2, 1) + \mu(-1, 2) \Rightarrow (3, 4) = (2\lambda, \lambda) + (-\mu, 2\mu) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (3, 4) = (2\lambda - \mu, \lambda + 2\mu) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2\lambda - \mu \\ 4 = \lambda + 2\mu \end{cases} \Rightarrow (\lambda, \mu) = (2, 1) \Rightarrow$
 $\vec{w} = 2(2, 1) + (-1, 2)$

7. Calcula el producto escalar de los vectores siguientes, sabiendo que sus coordenadas están referidas a la base canónica:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (3, 4) & \text{c) } \vec{u} = (-4, \sqrt{2}), \vec{v} = (\sqrt{8}, 3) \\ \text{b) } \vec{u} = (2, 5), \vec{v} = (-1, 3) & \text{d) } \vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (-3, 5) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a) } \vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (3, 4) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11 \\ \text{b) } \vec{u} = (2, 5), \vec{v} = (-1, 3) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = 13 \\ \text{c) } \vec{u} = (-4, \sqrt{2}), \vec{v} = (\sqrt{8}, 3) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -4\sqrt{8} + 3\sqrt{2} = -4 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \\ \text{d) } \vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (-3, 5) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 = -1 \end{array}$$

8. Halla el ángulo que forman las parejas de vectores:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (2, -1) & \text{c) } \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \vec{v} = (1, 2) \\ \text{b) } \vec{u} = (0, 1), \vec{v} = (1, 1) & \text{d) } \vec{u} = (\sqrt{3}, 1), \vec{v} = (1, \sqrt{3}) \end{array}$$

$$\text{a) } \vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (2, -1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{0}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \arccos 0 = 90^\circ$$

$$\text{b) } \vec{u} = (0, 1), \vec{v} = (1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \\ |\vec{u}| = 1 \text{ y } |\vec{v}| = \sqrt{2} \end{array} \right\} \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

$$\text{c) } \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \vec{v} = (1, 2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ y } |\vec{v}| = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \sqrt{5}} = \arccos \frac{4}{5} = 36^\circ 52' 11,63''$$

$$\text{d) } \vec{u} = (\sqrt{3}, 1), \vec{v} = (1, \sqrt{3})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ y } |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right\} \alpha = \arccos \frac{2\sqrt{3}}{4} = 30^\circ$$

9. Calcula el valor del número real x para que los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (x, 1)$:

- Sean ortogonales.
- Formen un ángulo de 60° .
- Sean paralelos.

$$\text{a) } \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 60^\circ \Rightarrow x+2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2x+4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (2x+4)^2 = (\sqrt{5} \sqrt{x^2+1})^2 \Rightarrow 4x^2+16 = 5(x^2+1) \Rightarrow 4x^2+16-5x^2-5=0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -x^2+11=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11} \\
 \text{c) } \vec{u} \parallel \vec{v} &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

10. Determina todas las ecuaciones de las rectas:

$$\text{a) } r \equiv 2x+3y-5=0 \qquad \text{b) } s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \end{cases} \qquad \text{c) } t \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2}$$

$$\text{a) } r \equiv 2x+3y-5=0 \Rightarrow \begin{cases} P(1,1) \text{ (par de números que cumplen la ec. de la recta)} \\ \vec{d} = (-3,2) \end{cases}$$

Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (1, 1) + \lambda(-3, 2)$$

Ecuación punto-pendiente:

$$-\frac{2}{3}(x-1) = y-1$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=1+2\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2}$$

Ecuación general:

$$2x+3y-5=0$$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\text{b) } s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1,2) \\ \vec{d} = (1,-3) \end{cases}$$

Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (1, 2) + \lambda(1, -3)$$

Ecuación punto-pendiente:

$$-3(x-1) = y-2$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3}$$

Ecuación general:

$$-3x-y+5=0$$

Ecuación explícita:

$$y = -3x+5$$

$$\text{c) } t \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P(-2,1) \\ \vec{d} = (3,2) \end{cases}$$

Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (-2, 1) + \lambda(3, 2)$$

Ecuación punto-pendiente:

$$\frac{2}{3}(x+2) = y-1$$

Ecuaciones paramétricas:

Ecuación continua:

$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3}$$

Ecuación general:

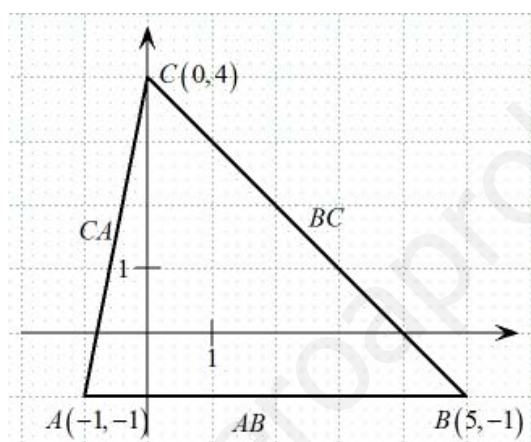
$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} - y + 1 = 0 \rightarrow 2x - 3y + 7 = 0$$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

11. Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(5, -1)$ y $C(0, 4)$, se pide:

- Ecuaciones de las medianas¹, y como intersección de ellas calcula el baricentro.
- Ecuaciones de las tres alturas², y como intersección de ellas calcula el ortocentro.
- Ecuaciones de las tres mediatrices³ de los lados, y como intersección de ellas el circuncentro.
- Perímetro de dicho triángulo.



a) Mediana correspondiente al vértice A

$$\text{Punto medio de } BC = \left(\frac{5+0}{2}, \frac{-1+4}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right) = M_1$$

Ec. de la recta que pasa por $A(-1, -1)$ con vector director

$$\overrightarrow{AM_1} = \left(\frac{5}{2} - (-1), \frac{3}{2} - (-1) \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$m_A \equiv \frac{x+1}{\frac{7}{2}} = \frac{y+1}{\frac{5}{2}}$$

Mediana correspondiente al vértice B

$$\text{Punto medio de } CA = \left(\frac{0+(-1)}{2}, \frac{4+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2} \right) = M_2$$

Ec. de la recta que pasa por $B(5, -1)$ con vector director

$$\overrightarrow{BM_2} = \left(\frac{-1}{2} - 5, \frac{3}{2} - (-1) \right) = \left(-\frac{11}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

¹ Mediana: recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

² Altura: recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.

³ Mediatriz: recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.

$$m_B \equiv \frac{x-5}{-\frac{11}{2}} = \frac{y+1}{\frac{5}{2}}$$

Mediana correspondiente al vértice C

$$\text{Punto medio de } AB = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1+(-1)}{2} \right) = (2, -1) = M_3$$

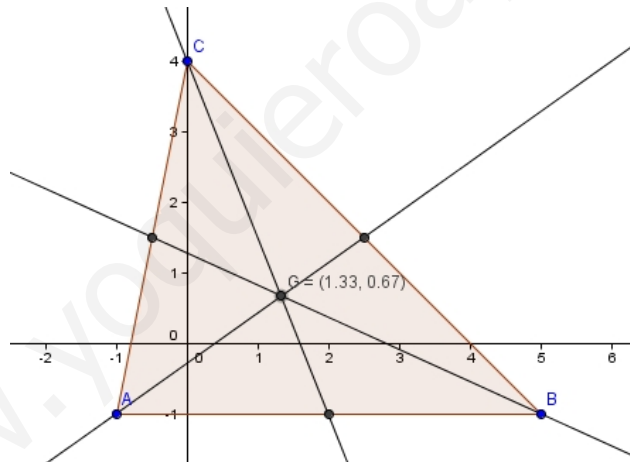
Ec. de la recta que pasa por $C(0,4)$ con vector director $\overrightarrow{CM_3} = (2-0, -1-4) = (2, -5)$

$$m_C \equiv \frac{x-0}{2} = \frac{y-4}{-5}$$

Calculamos el baricentro como intersección de m_A , m_B y m_C . Para ello basta con resolver

el sistema $\begin{cases} m_A \\ m_C \end{cases}$:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{\frac{7}{2}} = \frac{y+1}{\frac{5}{2}} \\ \frac{x-0}{2} = \frac{y-4}{-5} \end{cases} \rightarrow (x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right) = \text{Baricentro}$$



- b) Altura correspondiente al lado AB
Es el eje OY , cuya ecuación es $x = 0$.

Altura correspondiente al lado BC

Ec. de la recta que pasa por B y por C :

$$B(5, -1)$$

$$\overrightarrow{d_{BC}} = \overrightarrow{BC} = (0-5, 4-(-1)) = (-5, 5)$$

$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{5} \Rightarrow \frac{5}{-5}(x-5) = y+1 \Rightarrow m_{BC} = -1$$

$$\text{Ecuación de la altura: } \begin{cases} A(-1, -1) \\ m_A = 1 \end{cases} \rightarrow y+1 = x+1$$

Altura correspondiente al lado CA

Ec. de la recta que pasa por B y por C :

$$C(0,4)$$

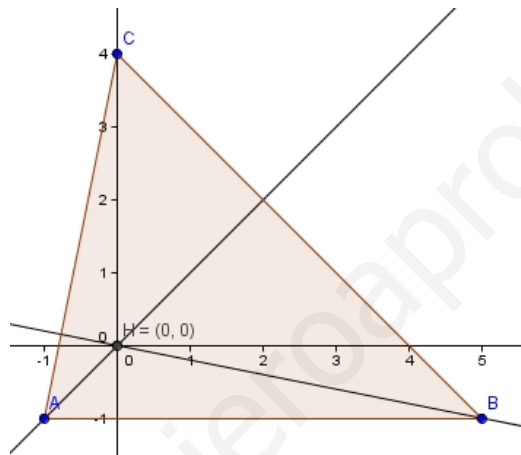
$$\vec{d}_{CA} = \overline{CA} = (-1-0, -1-4) = (-1, -5)$$

$$\frac{x-0}{-1} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow \frac{-5}{-1}x = y-4 \Rightarrow m_{CA} = 5$$

$$\text{Ecuación de la altura: } \begin{cases} B(5, -1) \\ m_B = -\frac{1}{5} \rightarrow y+1 = -\frac{1}{5}(x-5) \end{cases}$$

Ortocentro como intersección de las alturas:

$$\begin{cases} x=0 \\ y+1 = x+1 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (0, 0) = \text{Ortocentro}$$



c) Mediatriz del lado AB

$$\text{Punto medio de } AB = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1+(-1)}{2} \right) = (2, -1) = M_3$$

Ec. de la recta que pasa por A y por B : $y = -1$

Mediatriz: $x = 2$

Mediatriz del lado BC

$$\text{Punto medio de } BC = \left(\frac{5+0}{2}, \frac{-1+4}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right) = M_1$$

Ec. de la recta que pasa por B y por C : $y+1 = -x+5$

$$\text{Mediatriz: } \begin{cases} M_1 \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right) \rightarrow y - \frac{3}{2} = x - \frac{5}{2} \\ m = 1 \end{cases}$$

Mediatriz del lado CA

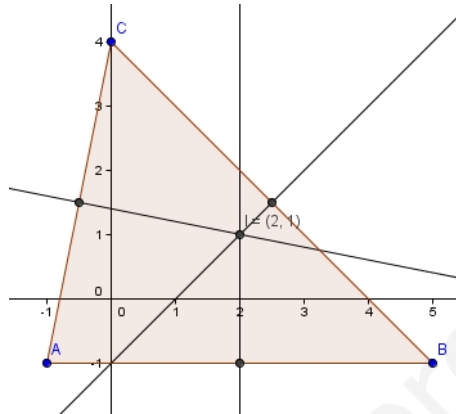
$$\text{Punto medio de } CA = \left(\frac{0+(-1)}{2}, \frac{4+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2} \right) = M_2$$

Ec. de la recta que pasa por C y por A : $5x = y - 4$

$$\text{Mediatriz: } \begin{cases} M_2 \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{5} \left(x + \frac{1}{2} \right) \\ m = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

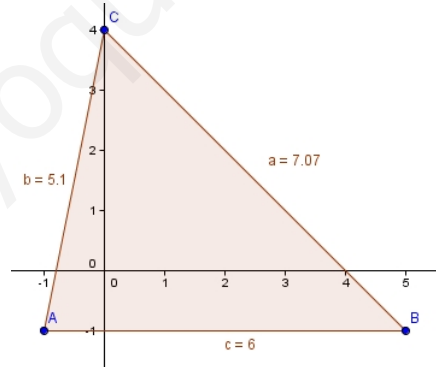
Circuncentro como intersección de las mediatrices:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - \frac{3}{2} = x - \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow (x, y) = (2, 1) = \text{Circuncentro}$$



d) Calculamos las distancias correspondientes:

$$\left. \begin{aligned} d(A, B) &= 6 \\ d(B, C) &= |\overline{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} \\ d(C, A) &= |\overline{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Perímetro} = 6 + \sqrt{50} + \sqrt{26} \approx 18,17 \text{ u}$$



12. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\text{a) } \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 4 \end{cases} \\ s \equiv y = -x + 4 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} \\ s \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0,0) \\ \vec{d} = (1,1) \end{cases} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-4}{1} \rightarrow x - y + 4 = 0 \\ s \equiv y = -x + 4 \rightarrow x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \\ C=4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A'=1 \\ B'=1 \\ C'=-4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{A}{A'}=1 \\ \frac{B}{B'}=-1 \\ \frac{C}{C'}=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes}$$

También se podría haber estudiado la posición relativa de estas rectas, viendo si los vectores directores de las rectas son paralelos o no

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = -x \Rightarrow m_r = -1 \\ s \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow m_s = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow m_r \neq m_s \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes}$$